

路和森林的符号乘积图的边染色

王雅静

浙江师范大学, 数学与计算机科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2022年2月9日; 录用日期: 2022年3月4日; 发布日期: 2022年3月11日

摘要

2019年, Behr 利用符号图的边染色概念证明了对于任意的符号图 (G, σ) 都有 $\Delta(G, \sigma) \leq \chi'(G, \sigma) \leq \Delta(G, \sigma) + 1$, 其中 $\chi'(G, \sigma)$ 是 (G, σ) 的边染色数, $\Delta(G, \sigma)$ 是 (G, σ) 的最大度。本文我们证明了在路和森林的符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 其中 P_n 和 T_m 分别是有 n 个顶点的路和有 m 个顶点的森林, 当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 1$ 时, 则 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma) = \Delta(P_n \square T_m, \sigma)$ 。

关键词

符号图, 乘积图, 路, 森林, 边染色

Edge Coloring of the Signed Product Graphs of Paths and Forests

Yajing Wang

College of Mathematics and Computer Science of Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 9th, 2022; accepted: Mar. 4th, 2022; published: Mar. 11th, 2022

Abstract

2019, Behr used the concept of edge coloring of signed graphs to prove that for any

signed graphs (G, σ) there is $\Delta(G, \sigma) \leq \chi'(G, \sigma) \leq \Delta(G, \sigma) + 1$, where $\chi'(G, \sigma)$ is the number of edge coloring of (G, σ) , $\Delta(G, \sigma)$ is the maximum degree of (G, σ) . In this paper, we prove that in the signed product graphs of paths and forests $(P_n \square T_m, \sigma)$, P_n and T_m are respectively paths with the number of n vertices and forests with the number of m vertices. When $n > 2$ and $\Delta(T_m) > 1$, then $\chi'(P_n \square T_m, \sigma) = \Delta(P_n \square T_m, \sigma)$.

Keywords

Signed Graphs, Product Graphs, Paths, Forests, Edge-Coloring

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Harary 在上世纪50年代提出符号图的概念 [1]。符号图 (G, σ) 是给基础图 $G = (V(G), E(G))$ 的边集加一个符号映射 $\sigma : E(G) \rightarrow \{+1, -1\}$, 使得 G 的每一条边 e 都有一个符号 $\sigma(e)$ 。当 $\sigma(e) = +1$ 时, 边 e 为正边; 当 $\sigma(e) = -1$ 时, 边 e 为负边。 (G, σ) 的一个 incidence 是点-边有序对 (v, e) , v 是 e 的一个端点。给定一个符号图 (G, σ) , $I(G)$ 表示 (G, σ) 中所有的 incidence 的集合。 $V(G)$ 表示 (G, σ) 的顶点集; $E(G, \sigma)$ 表示 (G, σ) 的边集。 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度。本文所讨论的符号图均是无环, 无重边的简单有限符号图。

本文未说明的记号和术语均参阅文献 [2]。

定义 1 简单符号图 (G, σ) 的边染色是指对 (G, σ) 的 incidence 着色, 使得同一个顶点关联的 incidence 均有不同的颜色。符号图 (G, σ) 的边色数 $\chi'(G, \sigma)$ 是指使得符号图 (G, σ) 为正常边染色的最少的颜色数。

Vizing 在 1964 年, 给出了简单图的边染色数的上下界。

定理 1 (Vizing, 1964, [3]) 一个图 G 的边染色数 $\chi'(G)$ 满足 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

2019 年, Behr 给出了简单符号图的边染色概念 [4] 并证明了上述结论在简单符号图 (G, σ) 中同样满足 $\Delta(G, \sigma) \leq \chi'(G, \sigma) \leq \Delta(G, \sigma) + 1$ 。

定义 2 图 G 和 H 的乘积图 $G \square H$ 是指具有顶点集 $V(G \square H)$ 和边集 $E(G \square H)$ 的图, 其中 $V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$, $E(G \square H) = \{(u, v)(u', v') | u = u', vv' \in E(H) \text{ 或 } v = v', uu' \in E(G)\}$ 。

定义 3 符号乘积图 $(G \square H, \sigma)$ 是给它的边集加一个符号映射 $\sigma : E(G \square H) \rightarrow \{+1, -1\}$ ，使得 $G \square H$ 的每一条边 e 都有一个符号 $\sigma(e)$ 。

定义 4 对于符号图 (G, σ) ，如果 $\chi'(G, \sigma) = \Delta(G, \sigma)$ ，则称符号图 (G, σ) 为第一类的符号图。记 $(G, \sigma) \in \mathcal{C}^1$ 。

定义 5 对于符号图 (G, σ) ，如果 $\chi'(G, \sigma) = \Delta(G, \sigma) + 1$ ，则称符号图 (G, σ) 为第二类的符号图。记 $(G, \sigma) \in \mathcal{C}^2$ 。

在文献 [5], [6], [7]中, 均研究了符号图的染色。在本文中, 我们将符号图的一个 n -边染色定义为:

定义 6 设 (G, σ) 是一个符号图, n 是一个正整数, 若 $n = 2k$, 则 (G, σ) 的一个 n -边染色就是一个映射 $\gamma : E(G) \rightarrow \{\pm k, \pm(k-1), \dots, \pm 1\}$; 若 $n = 2k + 1$, 则 $\gamma : E(G) \rightarrow \{\pm k, \pm(k-1), \dots, \pm 1, 0\}$, 使得对任意的边 $e = vw \in E(G)$ 都有 $\gamma(v, e) = \sigma(e)\gamma(w, e)$ 。当任意相邻的两条边 $e_1 = vw$ 和 $e_2 = vu$, 使得 $\gamma(v, e_1) \neq \gamma(v, e_2)$, 则称 γ 是 (G, σ) 上的正常 n -边染色。

Behr 通过对**定理 1**进行推广, 得到任意简单符号图 (G, σ) 的边染色数 $\chi'(G, \sigma)$ 满足 $\Delta(G, \sigma) \leq \chi'(G, \sigma) \leq \Delta(G, \sigma) + 1$ 。在本文中, 我们证明了路和森林的符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 的边染色数 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma)$ 满足当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 1$ 时, 则 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma) = \Delta(P_n \square T_m, \sigma)$ 。我们分成 2 个定理来证明这个结论。我们首先证明在路和森林的符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 当 $1 \leq \Delta(T_m) \leq 2$ 时, **定理 2** 成立; 再证明当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 2$ 时, **定理 3**成立。

定理 2 在符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 其中 n, m 分别是 P_n, T_m 上的点数。

(i) 当 $n = 2, \Delta(T_m) = 1$ 且符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 是一个非平衡圈时, 则符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第二类的符号图。

(ii) 当 $n = 2, \Delta(T_m) = 1$ 且符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 是一个平衡圈时, 则符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第一类的符号图。

(iii) 当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) = 2$ 时, 则符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第一类的符号图。

定理 3 在符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 其中 n, m 分别是 P_n, T_m 上的点数。

当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 2$ 时, 则符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第一类的符号图。

2. 定理 2 的证明

证明 在符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 当 $1 \leq \Delta(T_m) \leq 2$ 时, 符号图 $(P_n \square T_m, \sigma) = (P_n \square P_m, \sigma)$ 。由 $P_n \square P_m$ 的结构知, $(P_n \square P_m, \sigma)$ 是带有符号的方格图。

首先证明(i)。当 $n = 2, \Delta(T_m) = 1$ 且符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 只有一个非平衡圈时我们设这个非平衡圈为 $C = v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$ 。设 $v_3 v_0$ 是一条正边, 因为 C 是非平衡圈, 所以 $P = v_0 v_1 v_2 v_3$ 上一定有奇数条负边。 P 至少可以用2种颜色染好, 设用 $\pm a$ 染好。假设从 $(v_0, v_0 v_1)$ 开始用 a 和 $-a$ 进行染色, 则 $(v_3, v_2 v_3)$ 一定染 $-a$ 。所以圈 C 上最后一条边 $v_3 v_0$ 一定要用第三种颜色才能染好, 设为 b 。所以 $\chi'(P_2 \square P_2, \sigma) = 3$ 。而此时符号图 $\Delta(P_2 \square P_2, \sigma) = 2$, 所以此时符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 是第二类的符号图。

其次证明(ii)。当 $n = 2$, $\Delta(T_m) = 1$ 且符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 只有一个平衡圈时我们设这个平衡圈为 $C' = v'_0 v'_1 v'_2 v'_3 v'_0$ 。设 $v'_3 v'_0$ 是一条正边, 因为 C' 是平衡圈, 所以 $P' = v'_0 v'_1 v'_2 v'_3$ 上一定有偶数条负边。 P' 至少可以用2种颜色染好, 设用 $\pm a$ 染好。假设从 $(v'_0, v'_0 v'_1)$ 开始用 a 和 $-a$ 进行染色, 则 $(v'_3, v'_2 v'_3)$ 一定染 a 。所以圈 C' 上最后一条边 $v'_3 v'_0$ 可以用 $-a$ 染好。所以 $\chi'(P_2 \square P_2, \sigma) = 2$ 。而此时符号图 $\Delta(P_2 \square P_2, \sigma) = 2$, 所以符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 是第一类的符号图。

最后我们证明(iii)。当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) = 2$ 时, $\Delta(P_n \square P_m) = 4$ 。

我们给出这个符号图 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的一个正常4-边染色 γ 并且证明这个界是紧的。

首先我们给出这个符号图 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的一个正常4-边染色 γ 。

对于任意的 $i, j, i \in [m], j \in [n]$, i 表示 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的第 i 行, j 表示 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的第 j 列, $u_{i,j}$ 表示 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 上第 i 行, 第 j 列的点。

令

$$\begin{cases} \gamma(u_{i,1}, e(u_{i,1}u_{i,2})) = 1, \\ \gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i,j-1})) = \gamma(u_{i,j-1}, e(u_{i,j-1}u_{i,j}))\sigma(e(u_{i,j-1}u_{i,j})), \\ \gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i,j+1})) = -\gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i,j-1})), \end{cases} \quad (1)$$

重复上述染色过程,直到在第 m 行。而对于任意的第 i 行的路 P_i 来说, 它的最后一条边 $e(u_{i,n-1}u_{i,n})$ 染色为:

$$\begin{cases} \gamma(u_{i,n-1}, e(u_{i,n-1}u_{i,n-2})) = \gamma(u_{i,n-2}, e(u_{i,n-1}u_{i,n-2}))\sigma(e(u_{i,n-2}u_{i,n-1})), \\ \gamma(u_{i,n-1}, e(u_{i,n-1}u_{i,n})) = -\gamma(u_{i,n-1}, e(u_{i,n-2}u_{i,n-1})), \\ \gamma(u_{i,n}, e(u_{i,n}u_{i,n-1})) = \gamma(u_{i,n-1}, e(u_{i,n-1}u_{i,n}))\sigma(e(u_{i,n-1}u_{i,n})), \end{cases} \quad (2)$$

由 i 的任意性知 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的每一行的 incidence 都可以用任意2个相反的颜色 $\pm a$ 染好。上述染色我们取的是 $a = 1$ 。

紧接着令

$$\begin{cases} \gamma(u_{1,j}, e(u_{1,j}u_{2,j})) = 2, \\ \gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i-1,j})) = \gamma(u_{i-1,j}, e(u_{i-1,j}u_{i,j}))\sigma(e(u_{i-1,j}u_{i,j})), \\ \gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i+1,j})) = -\gamma(u_{i,j}, e(u_{i,j}u_{i-1,j})), \end{cases} \quad (3)$$

重复上述染色过程,直到在第 n 列。而对于任意的第 j 列的路 P_j 来说, 它的最后一条边 $e(u_{m-1,j}u_{m,j})$ 染色为:

$$\begin{cases} \gamma(u_{m-1,j}, e(u_{m-1,j}u_{m-2,j})) = \gamma(u_{m-2,j}, e(u_{m-1,j}u_{m-2,j}))\sigma(e(u_{m-1,j}u_{m-2,j})), \\ \gamma(u_{m-1,j}, e(u_{m-1,j}u_{m,j})) = -\gamma(u_{m-1,j}, e(u_{m-2,j}u_{m-1,j})), \\ \gamma(u_{m,j}, e(u_{m,j}u_{m-1,j})) = \gamma(u_{m-1,j}, e(u_{m-1,j}u_{m,j}))\sigma(e(u_{m-1,j}u_{m,j})), \end{cases} \quad (4)$$

由 j 的任意性知 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的每一列的 incidence 都可以用不同于 $\pm a$ 的任意 2 个相反的颜色 $\pm b$ 染好。上述染色我们取得是 $b = 2$ 。

又因为 $P_n \square P_m$ 的任意2行和任意2列都不会交于一点。所以 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 可以用4个颜色 $\pm a$ 和 $\pm b$ 染好。即 γ 是符号图 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 的一个正常4-边染色, $\chi'(P_n \square P_m, \sigma) = 4$ 。

由Behr得到的简单符号图的边染色结论, 我们知道对于任意的简单符号图 (G, σ) , $\chi'(G, \sigma)$ 的下界是 $\Delta(G, \sigma)$ 。我们在上面证明中已经给出了1种染色方法得到 $\chi'(P_n \square P_m, \sigma) = 4$, 所以 $\chi'(P_n \square P_m, \sigma) = \Delta(P_n \square P_m, \sigma)$, 即 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 是第一类的。而当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) = 2$ 时, $T_m = P_m$, 所以符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第一类的符号图。

3. 定理3的证明

证明 对于符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 来说, 当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 2$ 时, 我们给出这个符号图的一个正常 $\Delta(P_n \square T_m, \sigma)$ -边染色 γ 并且证明这个界是紧的。

由 $P_n \square T_m$ 的结构知, 当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 2$ 时, $\Delta(P_n \square T_m) = \Delta(T_m) + 2$ 。参考定理2的染色方法, 类似地。我们先给 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 的每一行进行染色。 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 的每一行均是点不交的路 P_i ($i \in [m]$), 因此每个 P_i 均可以用2种颜色 $\pm a$ 染好。又因为 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 的每一列均是点不交的树 T_j ($j \in [n]$)。

因为根据文献 [2]中命题2.2: 如果符号图是一个最大度为 Δ 的树 T , 则 $\chi'(T, \sigma) = \Delta$ 。

可知对于任意的一棵树 T_m 均满足 $\chi'(T_m, \sigma) = \Delta(T_m)$ 。又因为 T_j 是两两点不相交的, 所以每个 T_j 均可以用不同于 $\pm a$ 的 $\Delta(T_m)$ 种颜色染好。即 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma) = \Delta(T_m) + 2 = \Delta(P_n \square T_m)$ 。所以, 符号图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 为第一类的符号图。

通过定理2, 定理3的证明, 我们可以得到: 路和森林的符号乘积图 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 的边染色数 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma)$ 满足当 $n > 2$ 且 $\Delta(T_m) > 1$ 时, 则 $\chi'(P_n \square T_m, \sigma) = \Delta(P_n \square T_m, \sigma)$ 。

在符号图 $(P_n \square P_m, \sigma)$ 中, 当 $n > 2, m = 2$ 或 $n = 2, m > 2$ 时, 则符号图 $(P_n \square P_m, \sigma) = (P_n \square P_2, \sigma)$ 或 $(P_n \square P_m, \sigma) = (P_2 \square P_m, \sigma)$ 。在 $(P_n \square T_m, \sigma)$ 中, 当 $n > 2, \Delta(T_m) = 1$ 时, 则符号图 $(P_n \square T_m, \sigma) = (P_n \square P_2, \sigma)$ 。

事实上当 $n = m$ 时, $(P_n \square P_2, \sigma)$ 和 $(P_2 \square P_m, \sigma)$ 是同一个简单符号图。而对于 $(P_n \square P_2, \sigma)$ 来说, 当 $n > 2$ 时, 则 $\chi'(P_n \square P_2, \sigma)$ 可能是 $\Delta(P_n \square P_2, \sigma) + 1$, 见图1, 也可能是 $\Delta(P_n \square P_2, \sigma)$, 见图2。图1, 图2均是 $(P_n \square P_2, \sigma)$ 的子图。

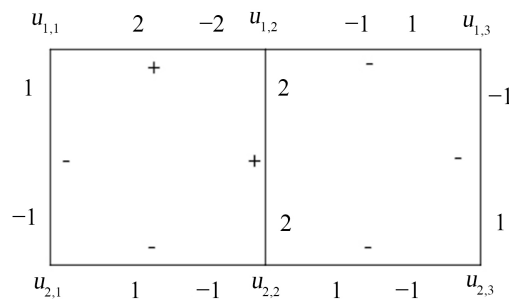


Figure 1. $\chi'(P_3 \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma) + 1$

图 1. $\chi'(P_3 \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma) + 1$

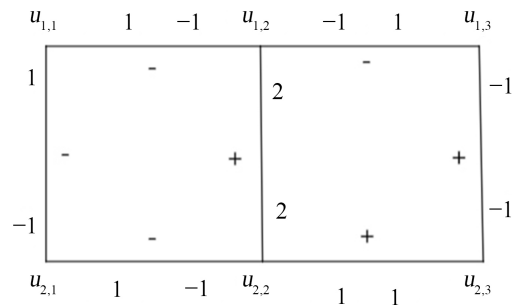


Figure 2. $\chi'(P_3 \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma)$

图 2. $\chi'(P_3 \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma)$

在图 1 中, $u_{2,2}$ 关联 2 条负边 $e(u_{2,1}u_{2,2})$, $e(u_{2,3}u_{2,2})$, 1 条正边 $e(u_{1,2}u_{2,2})$, 并且 2 个圈的公共边是正边 $e(u_{1,2}u_{2,2})$, 此时 $u_{2,2}$ 关联的这 3 条边至少要用 3 种颜色染好。

在图 1 中, 令

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(u_{1,2}, e(u_{1,2}u_{2,2})) = 2, \\ \gamma(u_{2,2}, e(u_{1,2}u_{2,2})) = 2, \\ \gamma(u_{2,2}, e(u_{2,2}u_{2,1})) = -1, \\ \gamma(u_{2,1}, e(u_{2,2}u_{2,1})) = 1, \\ \gamma(u_{2,2}, e(u_{2,2}u_{2,3})) = 1, \\ \gamma(u_{2,3}, e(u_{2,2}u_{2,3})) = -1. \end{array} \right. \quad (5)$$

而要想图 1 所用颜色最少, 只能令

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(u_{2,1}, e(u_{2,1}u_{1,1})) = -1, \\ \gamma(u_{1,1}, e(u_{2,1}u_{1,1})) = 1, \\ \gamma(u_{2,3}, e(u_{2,3}u_{1,3})) = 1, \\ \gamma(u_{1,3}, e(u_{2,3}u_{1,3})) = -1, \\ \gamma(u_{1,3}, e(u_{1,3}u_{1,2})) = 1, \\ \gamma(u_{1,2}, e(u_{1,3}u_{1,2})) = -1. \end{array} \right. \quad (6)$$

而此时, $\gamma(u_{1,1}, e(u_{1,1}u_{1,2}))$, $\gamma(u_{1,2}, e(u_{1,1}u_{1,2}))$ 只能用第四种颜色才能染好。

所以, 图 1 中 $(P_3 \square P_2, \sigma)$ 的边色数 $\chi'(P_3 \square P_2, \sigma)$ 是 $\Delta(P_n \square P_2, \sigma) + 1$ 。

因此, 对于 $(P_n \square P_2, \sigma)$, 有一部分符号乘积图满足 $\chi'(P_n \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma) + 1$ 是第一类的, 也有一部分符号乘积图满足 $\chi'(P_n \square P_2, \sigma) = \Delta(P_n \square P_2, \sigma)$ 是第二类的, 这些还需要我们进一步研究。

参考文献

- [1] Harary, F. (1953) On the Notion of Balance of a Signed Graph. *Michigan Mathematical Journal*, **2**, 143-146. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917>
- [2] Zhang, L., Lu, Y., Lou, R., Ye, D. and Zhang, S. (2020) Edge Coloring Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **282**, 234-242. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.12.004>
- [3] Vizing, V. (1964) On an Estimate of the Chromatic Class of a p-Graph. *Discret Analiz*, **3**, 23-30.
- [4] Behr, R. (2020) Edge Coloring Signed Graphs. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111654. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111654>
- [5] Cartwright, D. and Harary, F. (1968) On the Coloring of Signed Graphs. *Elemente der Mathematik*, **23**, 85-89.
- [6] Zaslavsky, T. (1991) Orientation of Signed Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **12**, 361-375. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(13\)80118-7](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(13)80118-7)
- [7] Zaslavsky, T. (1982) Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **4**, 47-74. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(82\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6)