

四次间接PH曲线的几何特征

沈洋, 秦凌云, 杨雪, 段卓, 彭兴璇

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年3月12日; 录用日期: 2022年4月5日; 发布日期: 2022年4月14日

摘要

四次间接PH曲线根据其导数的表示可以分为两类, 本文介绍了两类四次间接PH曲线的几何特征。主要方法是用Bernstein形式的复多项式表示平面Bézier曲线并且通过引入辅助控制顶点将几何特征转化为非线性方程求解问题, 使得四次平面曲线成为间接PH曲线的条件可以用控制多边形上的几何约束来描述。

关键词

间接PH曲线, 几何特征, Bézier曲线, 控制多边形

Geometric Characteristics of Quartic Indirect PH Curves

Yang Shen, Lingyun Qin, Xue Yang, Zhuo Duan, Xingxuan Peng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 12th, 2022; accepted: Apr. 5th, 2022; published: Apr. 14th, 2022

Abstract

Quadric indirect PH curves can be divided into two types according to the expression of their derivatives. This paper introduces the geometric characteristics of two kinds of quadric indirect PH curves. The plane Bézier curves are represented by using the Bernstein form of complex polynomials. The geometric features are transformed into nonlinear equations by introducing auxiliary control vertices. Then the conditions of quartic plane curves to be indirect PH curves can be described by the geometric constraints on the control polygon.

Keywords

Indirect PH Curves, Geometric Characteristic, Bézier Curves, Control Polygon



1. 引言

Bézier 曲线在计算机辅助几何设计(CAGD)中有着广泛的应用,包括数控加工、铁路设计、形状混合等等,然而一般的 Bézier 曲线不是有理形式的。平面适当参数化的多项式曲线有有理偏移的充要条件是其速端曲线的平方范数最多有两个奇数重复根,这样的曲线可以分为两类:PH 曲线和间接 PH 曲线。

对于 PH 曲线的研究相对深入。近几年来,文献[1]通过加入辅助线,用几何方法求出三次 PH 曲线控制多边形的弦长,从而构造出满足初始条件的控制多边形。文献[2]在一定条件下,可以证明两圆之间存在唯一的三次 PH 过渡曲线。文献[3]研究四次 PH 曲线的插值构造问题,并将 PH 曲线的构造问题转化成方程求解问题;该作者同样也运用了此种方法研究三次 PH 曲线的插值构造问题,在文献[4]分析了四次 PH 曲线的控制多边形的几何性质,推导出了控制点之间的几何关系;文献[5]研究了平面五次 Bézier 曲线为 PH 曲线的充要条件,并给出了初始条件下五次 PH 曲线的 Hermite 插值构造方法;文献[6]对离散数据进行 G1-Hermite 插值,给出一种基于空间五次 PH 曲线充分必要条件的构造方法;文献[7][8]等研究了六次和七次 PH 曲线的 Hermite 插值构造及几何特征;另外,文献[9]探讨了 7 次 Bézier 曲线是 PH 曲线的充要条件得到了 7 次 PH 曲线的控制多边形的性质;文献[10]讨论了 PH 曲线为 7 次 PH 曲线的 G2 边界数据(点、一阶导数和曲率)的 Hermite 插值问题。文献[11]根据高次 PH 曲线其 Bézier 控制多边形的角度和边的长度并给出了构造辅助点的可行方法。文献[12][13]等研究了 PH 曲线的应用相关问题。

然而对于间接 PH 曲线的研究相对较少。文献[14]在一定的端点条件下构造了 G1, C1 和 C2 的 Hermite 插值曲线,并提出了 OR 样条逼近 Bézier 曲线的方法;文献[15]给出了三次间接 PH 曲线的完整的几何表征,并利用曲线给出了 C1-Hermite 插值的简单几何构造,但是该方法不能扩展到四次和五次间接 PH 曲线中;文献[16]使用平面 Bézier 曲线的复表示来推导出四次间接 PH 曲线的一个代数刻画和两个几何刻画,可以自然扩展到二次和三次 PH 曲线但扩展到四次极为复杂,具有一定的难度;文献[17]利用导矢曲线的定理推出了四次间接 PH 曲线的控制多边形边长和角度的几何判别条件,只局限于第一类间接 PH 曲线,对于第二类没有给出其几何理论;文献[18]采用高斯消去法得到五次间接 PH 曲线的几何约束条件且此类曲线在几何造型中的应用有待进一步研究。

尽管前人已经推出了四次间接 PH 曲线的控制多边形的条件,但是该方法从导矢定理的条件出发,只推导出一类四次间接 PH 曲线的几何特征,并不适用于第二类间接 PH 曲线,方法复杂且具有一定的局限性。本文以间接 PH 曲线的代数条件为基础,通过引入辅助控制顶点的几何的方法得到间接 PH 曲线满足的非线性约束条件,将其转化成方程求解代数问题进而分别得到了两类四次间接 PH 曲线的几何特征。该方法计算简单,如果给出 Bézier 控制多边形可以确定四次多项式曲线是否为间接 PH 曲线。

2. 四次间接 PH 曲线及其分类

定理 1 [18] 一条平面参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ 是间接 PH 曲线当且仅当其一阶导数可分解为:

$$P'(t) = \rho(t)R(t)W^2(t) \quad (1)$$

其中 $\rho(t)$ 是关于 t 的实多项式, $R(t), W(t)$ 为复多项式。

根据 $P'(t)$ 因式分解的次数不同,四次间接 PH 曲线可以分为两大类:

第 1 类. $\rho(t)$ 为实常数, $R(t)$, $W(t)$ 为一次复多项式时, 在本文我们称 $P(t)$ 为第 1 类四次间接 PH 曲线。

第 2 类. $\rho(t)$ 为实二次多项式, $R(t)$ 为一次复多项式时, 在本文我们称 $P(t)$ 为第 2 类四次间接 PH 曲线。

Duan [17]等已经分析了第一类普通四次间接 PH 曲线的几何判断方法及速端分解式等等, 本文通过引入辅助控制顶点给出了两类四次间接 PH 曲线的几何特征更简洁的证明。

3. 第 1 类四次间接 PH 曲线的几何特征

在此种情况下, $P(t)$ 可以写成如下形式:

$$P'(t) = [a_0(1-t) + t][z_0(1-t) + z_1t]^2 \tag{2}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ 。

将(2)式展开可以得到

$$P'(t) = a_0 z_0^2 (1-t)^3 + (2a_0 z_0 z_1 + z_0^2)t(1-t)^2 + (a_0 z_1^2 + 2z_0 z_1)t^2(1-t) + z_1^2 t^3 \tag{3}$$

与(3)式比较 Bernstein 多项式系数, 有

$$\begin{cases} a_0 z_0^2 = 4\Delta P_0 \\ 2a_0 z_0 z_1 + z_0^2 = 12\Delta P_1 \\ a_0 z_1^2 + 2z_0 z_1 = 12\Delta P_2 \\ z_1^2 = 4\Delta P_3 \end{cases} \tag{4}$$

在这里我们引入辅助控制顶点 L_i , $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} L_1 = P_1 + \frac{1}{12} z_0^2 = P_2 - \frac{a_0}{6} z_0 z_1 \\ L_2 = P_2 + \frac{1}{6} z_0 z_1 = P_3 - \frac{a_0}{12} z_1^2 \end{cases} \tag{5}$$

则有

$$a_0 = \frac{\Delta P_0}{3(L_1 - P_1)} = \frac{P_2 - L_1}{L_2 - P_2} = \frac{3(P_3 - L_2)}{\Delta P_3}$$

因此 a_0 可以作为形状调节因子, 调节曲线的形状。四次间接 PH 曲线的控制多边形有如下图 1 表示:

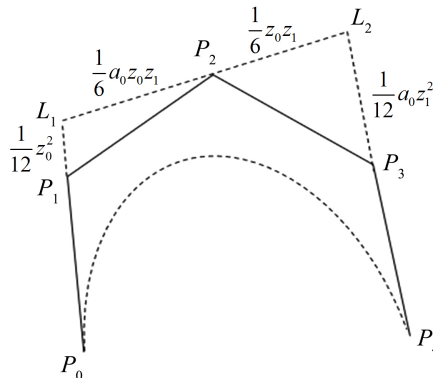


Figure 1. The Bézier control polygon of the first class of quartic indirect PH curves
图 1. 第 1 类四次间接 PH 曲线的 Bézier 控制多边形

换句话说, 等式(4)和(5)等价于

$$\begin{cases} z_0^2 = 12(L_1 - P_1) \\ z_0 z_1 = 6(L_2 - P_2) \\ z_1^2 = 4\Delta P_3 \\ z_0 z_1 = -\frac{6}{a_0}(L_1 - P_2) \\ z_1^2 = -\frac{12}{a_0}(L_2 - P_3) \\ z_0^2 = \frac{4}{a_0}\Delta P_0 \end{cases} \quad (6)$$

由于辅助点的选取已经满足了对于角度的约束, 因此控制多边形长度的条件可以立即导出, 根据 $(z_0 z_1)^2 = z_0^2 z_1^2$, 我们有

$$\begin{cases} \left[\frac{6}{a_0}(L_1 - P_2) \right]^2 = \frac{4}{a_0}\Delta P_0 \frac{12}{a_0}(L_2 - P_3) \\ \left[6(L_2 - P_2) \right]^2 = 12(L_1 - P_1)4\Delta P_3 \\ \left[6(L_2 - P_2) \right] \left[-\frac{6}{a_0}(L_1 - P_2) \right] = 4\Delta P_3 \frac{4}{a_0}\Delta P_0 \end{cases} \quad (7)$$

综上, 第 1 类四次间接 PH 曲线的充要条件可以表述为以下定理:

定理 2 一个平面 4 次 Bézier 曲线是第 1 类间接 PH 曲线当且仅当

$$\begin{aligned} 3\|L_1 P_2\|^2 &= 4\|\Delta P_0\|\|L_2 P_3\| \\ 3\|L_2 P_2\|^2 &= 4\|\Delta P_3\|\|P_1 L_1\| \\ 9\|L_1 P_2\|\|P_2 L_2\| &= 4\|\Delta P_0\|\|\Delta P_3\| \end{aligned}$$

定理 2 揭示了第 1 类所有适当参数化的 4 次 Bézier 曲线的一个几何刻画, 我们用 Bézier 控制多边形以及辅助控制顶点的构造给出了这一几何特性。

4. 第 2 类四次间接 PH 曲线的几何特征

考虑一条曲线是第 2 类四次间接 PH 曲线的条件, 给定四次 Bézier 曲线 $P(t)$, 控制顶点 $P_i, i=0, \dots, 4$ 以及两个辅助控制顶点 $Q_i, i=1, 2$ 。在这里 Q_0 为 $P_0 P_1$ 上的点, Q_1 为 $P_4 P_3$ 上的点, 且 $Q_0 Q_1$ 交于点 P_2 (如图 2)。现在给出第 2 类四次间接 PH 曲线的一个充要条件:

定理 3 平面参数曲线 $P(t)$ 是一条第 2 类四次间接 PH 曲线当且仅当

$$\begin{aligned} \|\Delta P_0\|\|Q_1 - P_2\| &= 3\|Q_0 - P_1\|\|P_2 - Q_0\| \\ 9\|Q_0 - P_1\|\|P_3 - Q_1\| &= \|\Delta P_0\|\|\Delta P_3\| \\ 3\|Q_1 - P_2\|\|P_3 - Q_1\| &= \|\Delta P_3\|\|P_2 - Q_0\| \end{aligned}$$

证明 根据定理 1, $P(t)$ 是第 2 类四次间接 PH 曲线当且仅当

$$P'(t) = \left[a_0(1-t)^2 + 2a_1 t(1-t) + a_2 t^2 \right] [z_0(1-t) + t] \quad (8)$$

其中 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ 。

将(8)式展开得到

$$P'(t) = a_0 z_0 (1-t)^3 + (2a_1 z_0 + a_0) t (1-t)^2 + (a_2 z_0 + 2a_1) t^2 (1-t) + a_2 t^3$$

将其与 Bernstein 多项式系数进行比较, 得到关于 a_0, a_1, a_2 和 z_0 的四个非线性方程组

$$\begin{cases} a_0 z_0 = 4\Delta P_0 \\ 2a_1 z_0 + a_0 = 12\Delta P_1 \\ a_2 z_0 + 2a_1 = 12\Delta P_2 \\ a_2 = 4\Delta P_3 \end{cases} \quad (9)$$

由辅助点 $Q_i, i=1,2$ 的定义, 知

$$\begin{cases} Q_0 = P_1 + \frac{1}{12} a_0 = P_2 - \frac{1}{6} a_1 z_0 \\ Q_1 = P_2 + \frac{1}{6} a_1 = P_3 - \frac{1}{12} a_2 z_0 \end{cases} \quad (10)$$

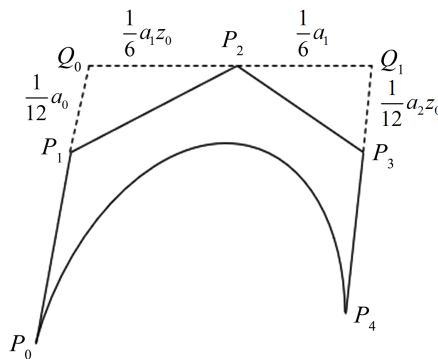


Figure 2. The control polygons and auxiliary control vertices of the second class of quartic indirect PH curves
图 2. 第 2 类四次间接 PH 曲线的控制多边形和辅助控制顶点

当且仅当所有方程相容时, 方程组(9)和(10)才有解, 通过考虑实变量和复变量, 可以得到

$$\begin{cases} a_0 z_0 = 4\Delta P_0 \\ a_0 = 12(Q_0 - P_1) \\ a_1 z_0 = 6(P_2 - Q_0) \\ a_1 = 6(Q_1 - P_2) \\ a_2 z_0 = 12(P_3 - Q_1) \\ a_2 = 4\Delta P_3 \end{cases}$$

由于辅助点 $Q_i, i=1,2$ 的选取已经满足了对于角度的要求, 长度的条件我们可以根据上式得出

$$\begin{cases} 4\Delta P_0 \cdot 6(Q_1 - P_2) = 12(Q_0 - P_1) \cdot 6(P_2 - Q_0) \\ 12(Q_0 - P_1) \cdot 12(P_3 - Q_1) = 4\Delta P_3 \cdot 4\Delta P_0 \\ 6(Q_1 - P_2) \cdot 12(P_3 - Q_1) = 4\Delta P_3 \cdot 6(P_2 - Q_0) \end{cases}$$

上述每一步都是可逆的, 因此省略了充分性的证明。

综上, 对于第 2 类四次间接 PH 曲线的几何特征我们可由上式得出。

参考文献

- [1] 陈远宁, 陈琳. 一种构造三次 PH 曲线的几何方法[J]. 大学数学, 2009, 25(4): 127-130.
- [2] 刘莹莹, 王旭辉. 平面三次 PH 过渡曲线的构造[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2016, 39(9): 1288-1291+1296.
- [3] 方林聪, 阳诚砖, 邸文钰, 刘芳. 插值给定数据点的四次 PH 曲线构造[J]. 中国图象图形学报, 2020, 25(7): 1473-1480.
- [4] Wang, G. and Fang, L. (2009) On Control Polygons of Quartic Pythagorean-Hodograph Curves. *Computer Aided Geometric Design*, **26**, 1006-1015. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.08.003>
- [5] 雍俊海, 郑文. 一类五次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005(5): 990-995.
- [6] 彭丰富, 刘惠. 一类 G~1 连续的空间五次 PH 曲线[J]. 桂林电子科技大学学报, 2016, 36(6): 504-507.
- [7] 王慧, 朱春钢, 李彩云. 六次 PH 曲线 G~2 Hermite 插值[J]. 图学学报, 2016, 37(2): 155-165.
- [8] 李毓君, 方林聪. 七次 PH 曲线 G~2[C~1]Hermite 插值方法[J]. 中国科学: 信息科学, 2019, 49(6): 698-707.
- [9] Zheng, Z., Wang, G. and Yang, P. (2016) On Control Polygons of Pythagorean Hodograph Septic Curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **296**, 212-227. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.09.006>
- [10] Jüttler, B. (2001) Hermite Interpolation by Pythagorean Hodograph Curves of Degree Seven. *Mathematics of Computation*, **70**, 1089-1111. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-00-01288-6>
- [11] Li, Y., Fang, L. and Cao, J. (2019) Identification of Two Classes of Planar Septic Pythagorean Hodograph Curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **348**, 383-400. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.002>
- [12] 吴伟栋, 杨勋年. 一类代数-三角函数表示的空间 PH 曲线及其应用[J]. 图学学报, 2018, 39(2): 295-303.
- [13] 寿华好, 江瑜, 缪永伟. 基于三次 PH 曲线误差可控代数曲线等距线逼近算法[J]. 图学学报, 2012, 33(2): 30-33.
- [14] 郑志浩, 汪国昭. OR 插值曲线构造及 Bézier 曲线逼近[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(3): 366-371.
- [15] Lu, X., Zheng, J., Cai, Y. and Zhao, G. (2016) Geometric Characteristics of a Class of Cubic Curves with Rational Offsets. *Computer-Aided Design*, **70**, 36-45. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.07.006>
- [16] Hormann, K. and Zheng, J. (2020) Algebraic and Geometric Characterizations of a Class of Planar Quartic Curves with Rational Offsets. *Computer Aided Geometric Design*, **79**, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2020.101873>
- [17] 段小娟, 汪国昭. 一类 4 次 OR 曲线的几何判别法[J]. 计算机辅助几何和图形学学报, 2018, 30(3): 500-513.
- [18] 李毓君, 方林聪. 五次间接 PH 曲线的几何特征[J]. 中国科学: 信息科学, 2021, 51(5): 808-821.