Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 1693-1699
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114184

Hans汉斯

奇偶符号Harary图的*rna*数

陈晓月，金利刚

浙江师范大学，浙江 金华

收稿日期：2022年3月14日；录用日期：2022年4月8日；发布日期：2022年4月18日

摘　要

奇偶符号图的概念最初是由Acharya和Kureethara提出的，随后有Zaslavsky等人相继研究。设(G,σ)是n个顶点的符号图，如果能够对(G,σ)中的$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$个顶点等价转换得到$(G,+)$，则称$(G,\sigma)$是一个奇偶符号图，并称$\sigma$是$G$的一个奇偶符号。$\sum^{-}(G)$定义为在图$G$的所有可能奇偶符号$\sigma$下，$(G,\sigma)$的负边数的集合。图$G$的*rna*数$\sigma^{-}(G)$定义为：$\sigma^{-}(G)=\min\sum^{-}(G)$。本文研究了Harary图$H_{k,n}$的*rna*数。我们计算出了$\sigma^{-}(H_{3,n})$，$\sigma^{-}(H_{4,n})$和$\sigma^{-}(H_{k,k+2})$的精确值。对于$H_{k,n}$的其他情况，我们给出其*rna*数的一个上下界：$k\le\sigma^{-}(H_{k,n})\le\left\lfloor \frac{kn+n}{4} \right\rfloor$。

关键词

奇偶符号图，*rna*数，奇偶划分，Harary图

The *rna* Number of Parity Signed Harary Graph

Xiaoyue Chen, Ligang Jin

Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 8th, 2022; published: Apr. 18th, 2022

Abstract

The concept of parity signed graphs was initiated by Acharya and Kureethara very recently and then followed by Zaslavsky etc.. Let (G,σ) be a signed graph on n vertices. If (G,σ) is switch-equivalent

文章引用: 陈晓月, 金利刚. 奇偶符号 Harary 图的 *rna* 数[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 1693-1699.
DOI: 10.12677/aam.2022.114184

to $(G,+)$ at a set of $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ many vertices, then we call (G,σ) a parity signed graph and σ a parity-signature. $\sum^{-}(G)$ is defined as the set of the number of negative edges of (G,σ) over all possible parity-signatures σ. The *rna* number $\sigma^{-}(G)$ of G is given by $\sigma^{-}(G)=\min\sum^{-}(G)$. In this paper, we study the *rna* number of Harary graph $H_{k,n}$. We obtain the exact values of $\sigma^{-}(H_{3,n})$, $\sigma^{-}(H_{4,n})$ and $\sigma^{-}(H_{k,k+2})$. For the remaining case of $H_{k,n}$, we prove an upper bound and a lower bound of its *rna* number: $k \le \sigma^{-}(H_{k,n}) \le \left\lfloor \frac{kn+n}{4} \right\rfloor$.

Keywords

Parity Signed Graphs, The *rna* Number, Parity Division, Harary Graph

1. 引言

我们考虑的是有限的、简单的且连通的图。符号图是图的一类延伸，近几年来对符号图的研究是一个热点，例如，符号图流的问题[1]，符号图的最小圈覆盖问题[2]，符号图的同态问题[3]，符号图的染色问题[4]，符号图的圆盘染色问题[5]等等。符号图的概念最初由 Harary [6]在 1953 年提出。符号图(G,σ)是指图G和定义在图G的边集上的映射σ，其中$\sigma: E(G)\to\{-1,1\}$称为G的一个符号配置。如果$\sigma(e)=1$，记e是正边，否则e就是负边。

奇偶符号图是一种特殊的符号图。奇偶符号图的概念最初是由 Acharya 和 Kureethara [7]提出的。符号图$S=(G,\sigma)$称作奇偶符号图，如果存在一个双射$f:V(G)\to\{1,2,\cdots,n\}$，使得对于图$G$的每一条边$e=uv$，若$\sigma^{-}(e)=1$，则$f(u)$和$f(v)$有相同的奇偶性；若$\sigma^{-}(e)=-1$，则$f(u)$和$f(v)$有相反的奇偶性。这里的双射$f$称为图$G$(也称为$S$)的一个奇偶标记，$\sigma$称为$(G,\sigma)$的一个奇偶符号。Acharya、Kureethara 和 Zaslavsky [8]刻画了奇偶符号图，其刻画如下：一个符号图S是一个奇偶符号图当且仅当S可以划分成两部分A和B，使得$\left||A|-|B|\right|\le 1$，并且$S$的任意两个相邻的顶点$u$和$v$在一个集合中当且仅当边$uv$是正边。在本文中，这种划分$\{A,B\}$称作奇偶划分。奇偶符号图的这种刻画成立，其原因在于图G的一个奇偶标记可导出对应的一个奇偶划分：

$$A=\{v\in V(G): f(v)\text{是奇数}\},\ B=\{v\in V(G): f(v)\text{是偶数}\}$$

Acharya 和 Kureethara [7]定义了奇偶符号图的 *rna* 数。设G是一个图，$\sum^{-}(G)$表示为符号图(G,σ)在所有可能奇偶符号σ下负边数的集合。图G的 *rna* 数定义为奇偶符号图(G,σ)在所有可能的奇偶标记下负边数最小值，根据定义可以得到：$\sigma^{-}(G)=\min\sum^{-}(G)$。

对于$2\le k<n$，Harary 图$H_{k,n}$的顶点集记为$V(H_{k,n})=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$，根据$k$和$n$的奇偶性，Harary 图分为以下三种类型：

类型 1：当k是偶数时，记$k=2r$，两个顶点v_i和v_j相邻当且仅当$|i-j|\le r$。

类型 2：当 k 是奇数，n 是偶数时，记 $k=2r+1$，则 $H_{2r+1,n}$ 由 $H_{2r,n}$ 通过添加边 $\left\{v_i v_{i+\frac{n}{2}}: i=0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1\right\}$ 得到。

类型 3：当 k 是奇数，n 是奇数时，记 $k=2r+1$，则 $H_{2r+1,n}$ 由 $H_{2r,n}$ 通过加边 $\left\{v_i v_{i+\frac{n-1}{2}}: i=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2}\right\}$ 得到。

实质上，Harary 图 $H_{k,n}$ 是将 n 个顶点等距离地排成一个环，并且根据 k 和 n 的奇偶性向环上加弦。为了方便起见，本文中所有顶点的下标都对模 n 同余。将 Harary 图 $H_{k,n}$ 的外环记为 $v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0$，由 Harary 图 $H_{k,n}$ 的定义，对于第一、二种类型的 Harary 图 $H_{k,n}$，$H_{k,n}$ 是 k-正则的；对于第三种类型的 Harary 图 $H_{k,n}$，除了一个顶点 v_{n-1} 的度是 $k+1$，其余所有顶点的度均是 k。当 $k=2$ 时，$H_{k,n}$ 是一个环。因此，$\sigma^-\left(H_{2,n}\right)=\sigma^-\left(C_n\right)=2$。在本文中，我们只研究 $k>2$ 的情况。首先我们计算了 $\sigma^-\left(H_{3,n}\right)$，$\sigma^-\left(H_{4,n}\right)$，$\sigma^-\left(H_{k,k+2}\right)$ 的精确值，随后我们给出了三种类型的 Harary 图 $H_{k,n}$ 的 rna 数的上下界：$k\le\sigma^-\left(H_{k,n}\right)\le\left\lfloor\frac{kn+n}{4}\right\rfloor$。

本文用到其他一些数学符号，其定义如下。$\delta(G)$，$\kappa(G)$，$\kappa'(G)$ 分别表示图 G 的最小度，点连通度和边连通度，$G[F]$ 表示边子集或顶点子集 F 在图 G 的导出子图，$G[F]$ 中的顶点 v 的度记为 $d_{G[F]}(v)$。设 $S=(G,\sigma)$ 是一个符号图，S 的所有负边组成的集合记为 $E^-(S)$。令 $V(A)$ 和 $V(B)$ 是图 G 的两个不相交的点集，记 $E_G(A,B)$ 表示为连接 $V(A)$ 中的顶点到 $V(B)$ 中的顶点的边集，当 G 在上下文已经明确时，简写为 $E(A,B)$。

2. 主要结论及其证明

引理 1 $\sigma^-\left(H_{k,n}\right)\ge k$。

证明 对于 Harary 图 $H_{k,n}$ 来说，有 $\delta\left(H_{k,n}\right)=\kappa\left(H_{k,n}\right)=\kappa'\left(H_{k,n}\right)=k$，由 rna 数的定义知，$\sigma^-\left(H_{k,n}\right)\ge\kappa'\left(H_{k,n}\right)=k$。

引理 2 在 $H_{k,n}$ ($H_{2,3}$ 除外)的奇偶划分 $\{A,B\}$ 下，边割集 $E(A,B)$ 的导出子图不可能是一个星。

证明 假设 $E(A,B)$ 的导出子图是一个星。不妨假设 v 是该星的中心且 $v\in A$。则对于 $H_{k,n}$ 的任意一个圈 C，若 C 含有 B 中的点，则 $V(C)\cap A\subseteq\{v\}$。特别地，记 $H_{k,n}$ 的外环仅包含 A 中最多一个顶点，与 Harary 图的外环包含 $H_{k,n}$ 的所有顶点这个事实矛盾。故假设不成立，即 $E(A,B)$ 的导出子图不可能是一个星。

引理 3 $H_{k,n}$ 在任意一个奇偶划分下，边割集长度不可能是 3。

证明 对于 $k=2$ 时，在任意一个奇偶划分下，$H_{k,n}$ 的边割集长度一定是偶数。对于 $k>2$ 的情况，我们从 Harary 三种类型的图出发证明引理。假设存在一种奇偶划分 $\{A,B\}$，其中 $|A|=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$，$|B|=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，使得 $|E(A,B)|=3$。

情形 1 当 $H_{k,n}$ 为 Harary 图的第一种类型时，此时 k 为偶数，由握手定理，$\sum_{v\in A}d_A(v)=k\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-|E(A,B)|$ 的值是偶数，则 $|E(A,B)|$ 的值一定是偶数，因此，边割集长度不可能是 3。

情形 2 当 $H_{k,n}$ 为 Harary 图的第二种类型时。当 $\frac{n}{2}$ 为偶数时，由握手定理，$\sum_{v\in A}d_A(v)=k\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-|E(A,B)|$ 的值是偶数，则 $|E(A,B)|$ 的值一定是偶数。因此，我们讨论当 $\frac{n}{2}$ 为奇数时的情况。

情形 2.1 当 $k=3$ 时，易知 $\left|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)\right|=2$。设 $v_i\in A$，$v_{i+1}\in B$，$0\le i\le \frac{n}{2}-1$。如果 $v_{i+\frac{n}{2}}\in B$，由引理 2，则 $v_{i-1}\in A$，并且 $v_{i+\frac{n}{2}-1}\in A$，此时 $\left\{v_iv_{i+1},v_iv_{i+\frac{n}{2}},v_{i+\frac{n}{2}}v_{i+\frac{n}{2}-1}\right\}\subseteq E(A,B)$，由假设 $\left|E(A,B)\right|=3$，则 $\{v_{i-2},v_{i-3},\cdots,v_0,v_{n-1},v_{n-2},\cdots,v_{i+2}\}\subseteq A$，而此时 $v_{i+2}v_{i+1}\in E(A,B)$，与 $\left|E(A,B)\right|=3$ 矛盾，故有 $v_{i+\frac{n}{2}}\in A$，同理可得 $v_{i+\frac{n}{2}+1}\in B$，此时 $\left\{v_iv_{i+1},v_{i+\frac{n}{2}}v_{i+\frac{n}{2}+1}\right\}\subseteq E(A,B)$，则有 $v_{i+\frac{n}{2}+1}\in A$，$v_{i+\frac{n}{2}+2}\in B$，而此时 $v_{i+\frac{n}{2}+1}v_{i+\frac{n}{2}+2}\in E(A,B)$，与 $\left|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)\right|=2$ 矛盾。

情形 2.2 当 $k>3$ 时，根据引理 1，$\sigma^-(H_{k,n})>3$，所以 $H_{k,n}$ 在奇偶划分下，边割集长度不可能是 3。

情形 3 当 $H_{k,n}$ 为 Harary 图的第三种类型时。

情形 3.1 当 $k=3$ 时，易知 $\left|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)\right|=2$。不妨设 $v_i\in A$，$v_{i+1}\in B$，$0\le i\le \frac{n-1}{2}$ 如果 $v_{i+\frac{n-1}{2}}\in B$，由引理 2，则 $v_{i-1}\in A$，$v_{i+\frac{n-3}{2}}\in A$，此时 $\left\{v_iv_{i+1},v_iv_{i+\frac{n-1}{2}},v_{i+\frac{n-1}{2}}v_{i+\frac{n-3}{2}}\right\}\subseteq E(A,B)$，要满足条件 $\left|E(A,B)\right|=2$，则 $\{v_{i-2},v_{i-3},\cdots,v_0,v_{n-1},v_{n-2},\cdots,v_{i+2}\}\subseteq A$，而此时 $v_{i+2}v_{i+1}\in E(A,B)$，与 $\left|E(A,B)\right|=3$ 矛盾，故 $v_{i+\frac{n-1}{2}}\in A$，同理 $v_{i+\frac{n+1}{2}}\in B$，此时 $\left\{v_iv_{i+1},v_{i+\frac{n-1}{2}}v_{i+\frac{n+1}{2}}\right\}\subseteq E(A,B)$，则 $v_{i+\frac{n-3}{2}}\in A,v_{i+\frac{n-5}{2}}\in A,\cdots,v_{i+2}\in A$，于是 $v_{i+2}v_{i+1}\in E(A,B)$，与假设矛盾，故 $k=3$ 时，$H_{3,n}$ 在奇偶划分下，边割集长度不可能是 3。

情形 3.2 当 $k>3$ 时，根据引理 1，$\sigma^-(H_{k,n})>3$，所以 $H_{k,n}$ 在奇偶划分下，边割集长度不可能是 3。

综上所述 $H_{k,n}$ 在任意一个奇偶划分下，边割集长度不可能是 3。

定理 2 $\sigma^-(H_{3,n})=\begin{cases}4, & \text{其他}\\ 5, & \frac{n}{2}\text{为奇数}\end{cases}$

证明 $H_{3,n}$ 只可能为 Harary 图的第二种类型和第三种类型，因此我们分为以下两种情形考虑。

情形 1 当 $H_{3,n}$ 为 Harary 图的第二种类型时。

情形 1.1 当 $\frac{n}{2}$ 为偶数时，由引理 3，$\sigma^-(H_{3,n})\ge 4$，下面我们来证明 $\sigma^-(H_{3,n})=4$。我们给出一个 Harary 图的奇偶标记使得 $H_{3,n}$ 恰好包括 4 条负边。设 $f:V(H_{3,n})\to\{1,2,\cdots,n\}$ 定义如下：

$$f(v_i)=\begin{cases}2i+1, & 0\le i\le \frac{n}{4}-1\\ 2i-\frac{n}{4}-1, & \frac{n}{4}\le i\le \frac{n}{2}-1\\ 2i-\frac{n}{2}+1, & \frac{n}{2}\le i\le \frac{3n}{4}-1\\ 2i-\frac{3}{4}n, & \frac{3}{4}n\le i\le n-1\end{cases}$$

由映射易知，f 是一个奇偶标记，可导出对应的奇偶划分：

$$A=\left\{v_0,v_1,\cdots,v_{\frac{n}{4}-1},v_{\frac{n}{2}},v_{\frac{n}{2}+1},v_{\frac{3n}{4}-1}\right\},\quad B=\left\{v_{\frac{n}{4}},v_{\frac{n}{4}+1},\cdots,v_{\frac{n}{2}-1},v_{\frac{3n}{4}},v_{\frac{3n}{4}+1},v_{n-1}\right\},$$

此时 $E(A,B)=\left\{v_{\frac{n}{4}-1}v_{\frac{n}{4}},v_{\frac{3n}{4}-1}v_{\frac{3n}{4}},v_{\frac{n}{2}-1}v_{\frac{n}{2}},v_0v_{n-1}\right\}$，所以 $\sigma^-(H_{3,n})=4$。

情形 1.2 当 $\frac{n}{2}$ 为奇数时，设有奇偶划分 $\{A,B\}$，由握手定理，$\sum_{v\in A}d_A(v)=3\cdot\frac{n}{2}-|E(A,B)|$ 的值是一个偶数，则 $|E(A,B)|$ 的值一定是奇数，再结合引理 3，$\sigma^-(H_{3,n})\ge 5$，下面我们来证明 $\sigma^-(H_{3,n})=5$。我们给出一个 Harary 图的奇偶标记使得 $H_{3,n}$ 恰好包括 5 条负边。设 $f:V(H_{3,n})\to\{1,2,\cdots,n\}$ 定义如下：

$$f(v_i)=\begin{cases}2i+1, & 0\le i\le\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\\ 2i-\frac{n}{4}-\frac{5}{2}, & \frac{n}{4}+\frac{1}{2}\le i\le\frac{n}{2}-1\\ 2i-\frac{n}{2}+2, & \frac{n}{2}\le i\le\frac{3n}{4}-\frac{3}{2}\\ 2i-\frac{3}{4}n-\frac{3}{2}, & \frac{3}{4}n-\frac{1}{2}\le i\le n-1\end{cases}$$

由映射易知，f 是一个奇偶标记，可导出对应的一个奇偶划分：

$$A=\left\{v_0,v_1,\cdots,v_{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}},v_{\frac{n}{2}},v_{\frac{n}{2}+1},v_{\frac{3n}{4}-\frac{3}{2}}\right\},\quad B=\left\{v_{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}},v_{\frac{n}{4}+\frac{3}{2}},\cdots,v_{\frac{n}{2}-1},v_{\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}},v_{\frac{3n}{4}+1},v_{n-1}\right\}。$$

因此，$E(A,B)=\left\{v_{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}v_{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}},v_{\frac{3n}{4}-\frac{3}{2}}v_{\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}},v_0v_{n-1},v_{\frac{n}{2}-1}v_{\frac{n}{2}},v_{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}v_{\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}}\right\}$，所以 $\sigma^-(H_{3,n})=5$。

情形 2 当 $H_{3,n}$ 为 Harary 图的第三种类型时，由引理 3，$\sigma^-(H_{3,n})\ge 4$，下面我们来证明 $\sigma^-(H_{3,n})=4$。我们给出一个 Harary 图的奇偶标记使得 $H_{3,n}$ 恰好包括 4 条负边。给定 $H_{3,n}$ 一个奇偶划分 $\{A,B\}$：

$$B=\left\{v_1,v_2,\cdots,v_{\frac{n-1}{4}},v_{\frac{n+1}{2}},v_{\frac{n+3}{2}},\cdots,v_{\frac{3n-3}{4}}\right\},A=H_{3,n}\setminus B,$$

此时 $E(A,B)=\left\{v_0v_1,v_{\frac{n-1}{2}}v_{\frac{n+1}{2}},v_{\frac{n-1}{4}}v_{\frac{n+3}{4}},v_{\frac{3n-3}{4}}v_{\frac{3n+1}{4}}\right\}$，所以 $\sigma^-(H_{3,n})=4$。

引理 4 $H_{4,n}$ 在任意一个奇偶划分下，边割集长度不可能是 4。

证明 假设 $H_{4,n}$ 存在一种的奇偶划分 $\{A,B\}$，其中 $|A|=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$，$|B|=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，使得 $|E(A,B)|=4$。

情形 1 $|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)|=2$。不妨设 $v_i\in A$，$v_{i+1}\in B$，$0\le i\le n-1$。因为 $E(A,B)$ 包含 $H_{4,n}$ 的两条弦，则这两条弦的端点可分为如下四种子情况。

情形 1.1 如果这两条弦的两个端点分别为 v_i，v_{i+1}，假设 $v_{i+2}\in B$，$v_{i+3}\in A$，此时 $\{v_iv_{i+1},v_{i+2}v_{i+3}\}\subseteq E(A,B)$，则 $v_{i-1}\in B$，$v_{i-1}v_i\in E(A,B)$，与 $|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)|=2$ 矛盾，故假设不成立。假设 $v_{i-2}\in B$，$v_{i+3}\in A$，$v_{i+2}\in A$，则 $A=H_{4,n}\setminus\{v_{i+1},v_{i-2}\}$，与奇偶划分矛盾，故假设不成立。如果 $v_{i-2}\in B$，$v_{i+3}\in A$，$v_{i+2}\in B$，则 $\{v_{i+3},v_{i+5}\}\subseteq A$，$v_{i+4}\in B$，此时 $\{v_iv_{i+1},v_{i+2}v_{i+3},v_{i+4}v_{i+5}\}\subseteq E(A,B)$，与 $|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)|=2$ 矛盾，故情形 1.1 不存在。

情形 1.2 如果这两条弦的共同的端点为 v_i，v_{i+1} 中其中一个顶点时，不妨设这个端点为 v_i。根据引理 2，$v_{i-1}\in A$，此时 $\{v_{i-1}v_{i+1},v_iv_{i-2},v_iv_{i+2}\}\subseteq E(A,B)$，与 $E(A,B)$ 包含 $H_{4,n}$ 的两条弦矛盾。故情形 1.2 不存在。

情形 1.3 如果 v_i、v_{i+1} 中只有一个顶点作为这两条弦的端点时，不妨设 v_i 为其中一条弦的端点并且 $v_{i+2}\in B$，则 $v_{i-1}\in B$，$v_{i-2}\in A$，此时 $\{v_iv_{i+1},v_{i-1}v_{i-2},v_{i-1}v_i\}\subseteq E(A,B)$，与假设矛盾。故情形 1.3 不存在。

情形 1.4 如果 v_i， v_{i+1} 均不作为这两条弦的端点，则有 $v_{i+2}\in A$， $v_{i+3}\in B$，此时 $\{v_iv_{i+1},v_{i+1}v_{i+2},v_{i+2}v_{i+3}\}\subseteq E(A,B)$，与假设矛盾。故情形 1.4 不存在。

情形 2 $\left|\{v_0v_1\cdots v_{n-1}v_0\}\cap E(A,B)\right|=4$。不妨设 $v_i\in A$， $v_{i+1}\in B$， $0\le i\le n-1$，易知 $\{v_{i+2},v_{i+4}\}\subseteq A$，则 $\{v_iv_{i+1},v_{i+1}v_{i+2},v_{i+2}v_{i+3},v_{i+3}v_{i+4},v_{i+4}v_{i+5}\}\subseteq E(A,B)$，矛盾。

综上所述 $H_{4,n}$ 在任意一个奇偶划分下，边割集长度不可能是 4。

定理 3 $\sigma^-(H_{4,n})=6$。

证明 假设 $H_{4,n}$ 存在一种的奇偶划分 $\{A,B\}$ 使得 $|A|=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$，则 $\sum_{v\in A}d_A(v)=4\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-|E(A,B)|$ 的值是偶数，则 $|E(A,B)|$ 的值一定是偶数，再结合引理 4， $\sigma^-(H_{k,n})\ge 6$，下面我们来证明 $\sigma^-(H_{k,n})=6$。我们给出一个 Harary 图的奇偶标记使得 $H_{4,n}$ 恰好包括 6 条负边。设 $f:V(H_{4,n})\to\{1,2,\cdots,n\}$ 定义如下：

$$f(v_i)=\begin{cases}2i+2, & 1\le i\le\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil-1\\ 2i-n-1, & \left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\le i\le n-1\end{cases}$$

由映射易知，f 是一个奇偶标记，我们可以写出相应的负边集合：

$$\left\{v_0v_{n-1},v_0v_{n-2},v_1v_{n-1},v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil-2}v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil},v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil-1}v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil+1},v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil-1}v_{\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil}\right\},$$

所以 $\sigma^-(H_{k,n})=6$。

定理 4 对任意的正整数 $r\ge 2$，

$$\sigma^-(H_{2r-2,2r})=r^2-r。$$

证明 对于图 $H_{2r-2,2r}$ 来说，设 $f:V(H_{2r-2,2r})\to\{1,2,\cdots,2r\}$ 定义如下：

$$f(v_i)=\begin{cases}2i+1, & 0\le i\le r-1\\ 2i+1-n, & r\le i\le 2r-1\end{cases}$$

由映射易知，f 是一个奇偶标记，可导出对应的一个奇偶划分：

$$A=\{v_0,v_1,\cdots,v_{r-1}\},\ B=\{v_r,v_{r+1},\cdots,v_{2r-1}\},$$

这里 $H_{2r-2,2r}[A]$， $H_{2r-2,2r}[B]$ 均是两个完全图 K_r，因此在这种奇偶划分下，边割集长度一定最小，因此，

$$\sigma^-(G)=E(A,B)=\frac{(2r-2)\cdot 2r}{2}-\frac{r\cdot(r-1)}{2}\cdot 2=r^2-r。$$

定理 5 对任意的正整数 $r\ge 2$，有

$$\sigma^-(H_{2r-1,2r+1})=r^2。$$

证明 设 $H_{2r-1,2r+1}$ 环上的点依次为 $v_0,v_1,\cdots,v_{2r}$。记 $A=\{v_0,v_1,\cdots,v_r\}$， $B=\{v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_{2r}\}$。则 $\{A,B\}$ 为 $H_{2r-1,2r+1}$ 的一种奇偶划分。容易看出， $H_{2r-1,2r+1}[A]$， $H_{2r-1,2r+1}[B]$ 分别是两个完全图 K_{r+1}， K_r。因此，在这种奇偶划分下，边割集长度一定最小。因此，

$$\sigma^-(H_{2r-1,2r+1})=|E(A,B)|=\frac{(2r-1)\cdot(2r+1)+1}{2}-\frac{(r+1)\cdot r}{2}-\frac{(r-1)\cdot r}{2}=r^2。$$

Ligang Jin 和 Xiaoyue Chen [9]给出了对于任意一个图 G 的 rna 数的上界：对于 $n(n\ge 4)$ 个顶点，m

条边的图 G，$\sigma^{-}(G)\le\left\lfloor\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right\rfloor$，当且仅当 $G=K_n$ 或 K_n-e 或 $K_n-\Delta$ 时等式成立。现在将这个上界应用到 Harary 图上。

引理 5 对于任意的 k,n，有 $k\le\sigma^{-}(H_{k,n})\le\left\lfloor\frac{kn+n}{4}\right\rfloor$。

证明 下界由引理 1，$\sigma^{-}(H_{k,n})\ge k$。上界代入公式 $\sigma^{-}(G)\le\left\lfloor\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right\rfloor$。对于第一、二种类型的 Harary 图来说，$m=\frac{kn}{2}$，因此 $\sigma^{-}(G)\le\left\lfloor\frac{kn+n}{4}\right\rfloor$；对于第三种类型的 Harary 图来说，$m=\frac{kn+1}{2}$，因此 $\sigma^{-}(H_{k,n})\le\left\lfloor\frac{kn+1+n}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{kn+n}{4}\right\rfloor$。

3. 总结与展望

本文研究了 Harary 图的 *rna* 数，我们通过分析 Harary 图的结构性质，计算出了一些特殊类型 Harary 图 *rna* 数的精确值，并且借助文献[8]中的结论给出了 Harary 图 *rna* 数的上下界。值得注意的是，从 $\sigma^{-}(H_{3,n})$，$\sigma^{-}(H_{4,n})$，$\sigma^{-}(H_{k,k+2})$ 的值可以看出，本文中给出 Harary 图 *rna* 数的下界不是紧的，这还需要我们继续加以改进。

基金项目

国家自然科学基金 NSFC：ZJNSF LY20A010014。

参考文献

[1] Raspaud, A. and Zhu, X (2011) Circular Flow on Signed Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **101**, 464-479. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2011.02.007

[2] Lu, Y., Cheng, J., Luo, R. and Zhang, C.Q. (2019) Shortest Circuit Covers of Signed Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **134**, 164-178. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2018.06.001

[3] Naserasr, R., Sopena, E. and Zaslavsky, T. (2021) Homomorphisms of Signed Graphs: An Update. *European Journal of Combinatorics*, **91**, Article ID: 103222. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2020.103222

[4] Zaslavsky, T. (1982) Signed Graph Coloring. *Discrete Mathematics*, **39**, 215-228. https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90144-3

[5] Kang, Y. and Steffen, E. (2018) Circular Coloring of Signed Graphs. *Journal of Graph Theory*, **87**, 135-148. https://doi.org/10.1002/jgt.22147

[6] Harary, F. (1953) On the Notion of Balance of a Signed Graph. *Michigan Mathematical Journal*, **2**, 143-146. https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917

[7] Acharya, M. and Kureethara, J.V. (2021) Parity Labeling in Signed Graphs. *Journal of Prime Research in Mathematics*, **17**, 1-7.

[8] Acharya, M., Kureethara, J.V. and Zaslavsky, T. (2021) Characterizations of Some Parity Signed Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **81**, 89-100.

[9] Jin, L., Chen, X. and Kang, Y. (2021) A Study on Parity Signed Graphs: The RNA Number. arXiv:2111.04956 [math.CO]