

高斯色噪声对耦合神经元的放电模式和相位同步的影响

鲁君翊¹, 代士琪¹, 李亚静², 鹿露露¹, 易鸣¹

¹中国地质大学(武汉), 数学与物理学院, 湖北 武汉

²武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2022年3月26日; 录用日期: 2022年4月21日; 发布日期: 2022年4月28日

摘要

大脑中的神经系统是由众多的神经元所构成, 神经元的放电模式与相位同步在不同的条件下表现出不一样的动力学行为。本文首先建立了具有高斯色噪声和时间延迟的耦合神经元模型, 并从理论上推导了在时间延迟存在的情况下耦合神经元的同步流形, 然后以高斯色噪声为研究对象, 探究了与高斯色噪声有关的一些参量(包括耦合神经元之间的相互关联度、耦合强度、噪声强度、时间延迟的大小)对耦合神经元放电模式与相位同步的作用与影响。结果表明: 在固定的单时延背景下, 噪声强度和相互关联度都是通过改变神经元放电所产生的峰之间的间隔来影响神经元的放电模式的, 从总体上来说, 连续增大噪声强度和相互关联度会使峰峰间隔呈相似规律地减小; 耦合强度是通过改变神经元放电过程中的局部峰值来影响神经元的放电模式的, 耦合强度越大, 神经元放电过程中出现的不同局部峰值越多。在双时延和双耦合的背景下, 相互关联度和噪声强度从较小值逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况都是交替的同步和异步状态→异步状态→相位漂移和反相位状态的共存或交替; 双时延的差值从零逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况是: 异步状态→相位漂移和反相位状态共存或交替→相位漂移状态; 双耦合强度的差值从较小值逐渐增大的过程中, 耦合神经元始终处于相位漂移状态, 但是其整体的相位同步性会增强。

关键词

高斯色噪声, 耦合神经元, 放电模式, 相位同步, 时间延迟, 噪声强度, 耦合强度, 相互关联度

Effect of Gaussian Color Noise on Firing Mode and Phase Synchronization of Coupled Neurons

Junyi Lu¹, Shiqi Dai¹, Yajing Li², Lulu Lu¹, Ming Yi¹

文章引用: 鲁君翊, 代士琪, 李亚静, 鹿露露, 易鸣. 高斯色噪声对耦合神经元的放电模式和相位同步的影响[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2165-2186. DOI: 10.12677/aam.2022.114233

¹School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan Hubei

²School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan Hubei

Received: Mar. 26th, 2022; accepted: Apr. 21st, 2022; published: Apr. 28th, 2022

Abstract

The nervous system in the brain is composed of numerous neurons, and the firing patterns and phase synchronization of neurons show different kinetic behaviors under different conditions. In this paper, we firstly establish a coupled neuron model with Gaussian color noise and time delay, and theoretically derive the synchronization flow pattern of coupled neurons in the presence of time delay. And then we take Gaussian colored noise as the research object to investigate the role and influence of some parameters related to Gaussian colored noise on the firing pattern and phase synchronization of coupled neurons. The results show that in a fixed single time delay background, both noise intensity and intercorrelation affect the firing pattern of neurons by changing the interval between the peaks generated by neuronal discharge, and in general, increasing noise intensity and intercorrelation continuously decreases the interval between peaks in a similar pattern; coupling intensity affects the firing pattern of neurons by changing the local peaks during neuronal discharge. The greater the coupling strength, the more different local peaks appear during the neuron discharge. In the context of double time delay and double coupling, the phase change of the coupled neuron is alternately synchronous and asynchronous \rightarrow asynchronous \rightarrow coexistence or alternation of phase drift and anti-phase states during the gradual increase of intercorrelation and noise intensity from smaller values; the phase change of the coupled neuron is: asynchronous \rightarrow phase drift and anti-phase states during the gradual increase of the difference of double time delay from zero coexistence or alternation \rightarrow phase drift state; during the process of gradually increasing the difference of dual coupling strength from smaller values, the coupled neuron is always in phase drift state, but its overall phase synchronization will be enhanced.

Keywords

Gaussian Colored Noise, Coupled Neuron, Firing Pattern, Phase Synchronization, Time Delay, Noise Intensity, Coupling Intensity, Correlation Rate

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

当我们谈论计算神经科学时，一般就是在谈论神经元系统，因为计算神经科学与神经元系统有着千丝万缕的联系。计算神经科学关心的是神经元系统对外界信息处理与表达的机制，在现有的理论基础以及实验成果的基础上，它建立了更丰富的神经元系统模型[1] [2]。计算神经科学是多学科交叉的，这是由其研究对象与方法决定的，物理学、计算机科学甚至像心理学这样的表面上看起来与之相差比较远的学科都与计算神经科学有关系。清楚地解释人脑工作机制是计算神经科学的终极目的。纵观目前世界各国科学家们对计算神经科学的研究情况，欧洲国家和美国处在比较前沿的位置，而我们国家还处在一个起步的阶段，还有很大的空间可以发展。中国很多年轻的科学家有着丰富的脑科学研究经验，也有着大量

的与脑科学研究相关的实验数据,所以在计算神经科学领域,我们国家未来的前景会很广阔[3] [4] [5] [6] [7]。

非线性科学是一门多学科渗透交叉的科学,它包括数学、物理学、计算机科学、生物学等门类的学科。近年来,科技的不断发展使得越来越多的人开始关注并研究非线性科学。混沌与分岔是两个常见的非线性现象,非线性的本质可以用动力学的观点去阐释[8] [9] [10] [11]。分岔指的是系统的参数连续而小的变化,它是雅可比等一些人在19世纪引入的。很多领域当中都涉及分岔现象,比如化学反应、天体物理学等。分岔在离散系统和连续系统中都会出现,它会造系统的拓扑结构突然改变。混沌现象则是由庞加莱发现的,这是他在研究三体问题时重要的一个收获。混沌现象因为其运动的不稳定性而不可准确预测,但是在非线性动力学中,混沌运动则是确定的。初始值对混沌系统有着非常大的影响,因为哪怕初始值只有很微小的不同,在足够长的时间以后系统的演化方向都会完全不一样。在自然界中就存在着混沌现象,比如说蝴蝶效应与天气的变化。

非线性动力学领域里有一个让大家津津乐道的问题,就是同步的相变问题。在一个生物群落中会有集体行为,而集体行为中一个有趣的现象就是同步。在非线性的系统中,存在着各种各样的同步的表现形式[12] [13] [14]。当受到外界刺激时,神经元系统的放电行为会非常丰富,比如会出现倍周期簇放电模式、周期性尖峰放电模式等,神经元的放电行为本身就表现出了高度的非线性。我们上面提到的混沌与分岔的概念在神经元系统中非常普遍。神经元之间有着不同的耦合方式,一些生理疾病的产生就是由耦合神经元之间的同步所引起的,比如一部分老年人患的帕金森,所以现在有很多学者在尝试用非线性动力学的办法来消除能导致疾病的同步,也有学者用非线性动力学的手段在探究耦合神经元的放电模式等问题[15] [16] [17]。

本文利用数学当中的微分方程这个工具来探究神经元系统的非线性动力学行为,包括耦合神经元的放电模式和相位同步。我们先是从理论上推导了耦合神经元系统的同步流形,然后分别探究了耦合神经元的放电模式、相位同步,二者之间的关系是:如果两个耦合神经元之间放电模式完全一样,即它们的放电振荡状况完全一样,那么这两个耦合神经元是相位同步的;否则就存在一定程度的相位异步。

2. 模型建立及理论推导

2.1. 两个耦合神经元的动力模型方程

在大多数生物和物理的模型系统中,都能观察到时间延迟的现象,比如在两端距离较远的信号传输的过程中,就有着时间长度或长或短的延迟。在神经网络系统中,可能有着多个连接通路和同一个结点相关联,但每个连接通路拥有的时延不一样。神经元信号沿着这些不同的通路到达同一目的地,因为存在时延,在到达时间上会有先后。这里在高斯色噪声的背景下,我们研究了耦合神经元系统中单个或多个时延对放电模式和相位同步的影响[18] [19] [20] [21]。

下面列出的是具有高斯色噪声和时延的两个耦合神经元的动力模型方程:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(x_i - a)(1 - x_i) - y_i + \sum_{k=1}^L M_k (x_j^{(\tau_k)} - x_i) + \lambda(t), \quad (1)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = bx_i - cy_i + \sum_{k=1}^L M_k (y_j^{(\tau_k)} - y_i), \quad (2)$$

在式(1)和(2)中, $i, j \in \{1, 2\}$, 且 $i \neq j$ 。 x_i 和 y_i 分别表示的是神经元膜电位的快速变量和恢复变量, 其中, $x_j^{(\tau_k)} = x_j(t - \tau_k)$, $y_j^{(\tau_k)} = y_j(t - \tau_k)$ 。上面两个式子中参数 a 、 b 、 c 都是固定值, 分别为 $a = -0.025, b = 0.00652, c = 0.02$ 。 M_k 和 τ_k 分别表示耦合强度和延迟时间, 这两个参数的作用是用来反应

每一个延迟耦合的特征。参数 L 表示两个神经元相互连接的延迟耦合的个数。式(1)中的 $\lambda(t)$ 是高斯色噪声，满足下面的条件： $\langle \lambda(t) = 0 \rangle, \langle \lambda(t)\lambda(t_1) \rangle = \frac{Q}{\tau} \exp\left(-\frac{1}{\tau}|t-t_1|\right)$ ，其中， Q 表示高斯色噪声的噪声强度。

2.2. 单时延的耦合神经元系统的同步流形理论推导

在耦合神经元只拥有一个时间延迟的情况下，将式(1)中表示延迟耦合的个数的参数 L 指定为 1，延迟时间 τ_1 和耦合强度 M_1 可以用来描述延迟耦合的特点：

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(x_i - a)(1 - x_i) - y_i + M_1(x_j^{(\tau_1)} - x_i) + \lambda(t), \tag{3}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = bx_i - cy_i + M_1(y_j^{(\tau_1)} - y_i), \tag{4}$$

在式(2)和式(4)中， $i, j \in \{1, 2\}$ ，且 $i \neq j$ 。

接下来，我们先研究神经元通过单时间延迟来耦合的情况。当两个神经元振荡完全同步时，参数 x_i 和 y_i 满足下式：

$$\delta x = x_1 - x_2 = 0, \delta y = y_1 - y_2 = 0 \tag{5}$$

同步流形上的动力学模型方程表示如下：

$$\dot{x} = x(x-1)(a-x) - y + M_1(x^{(\tau_1)} - x), \tag{6}$$

$$\dot{y} = bx - cy + M_1(y^{(\tau_1)} - y), \tag{7}$$

$$x = x_1 = x_2, y = y_1 = y_2 \tag{8}$$

因为同步流形的横向振动与整体振动相比较可以忽略不计，所以它可以被描述为无穷小的变化： $\delta x \sim o(x)$ ， $\delta y \sim o(y)$ 。

$$\delta \dot{x} = -(a + M_1)\delta x + (a + 1)2x\delta x - 3x^2\delta x - \delta y + M_1[x_2(t - \tau_1) - x_1(t - \tau_1)], \tag{9}$$

$$\delta \dot{y} = b\delta x - (c + M_1)\delta y + M_1[y_2(t - \tau_1) - y_1(t - \tau_1)], \tag{10}$$

在上式的推导过程中，运用了数学分析中无穷小量的等价代换知识： $x_1^2 - x_2^2 \sim 2x\delta x$ ， $x_1^3 - x_2^3 \sim 3x^2\delta x$ 。

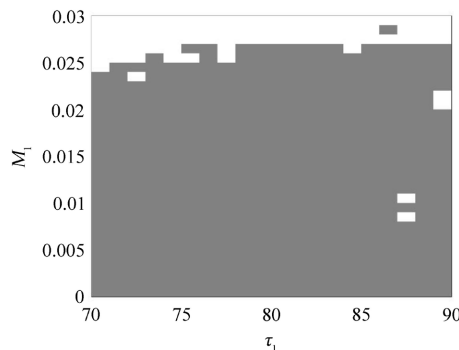


Figure 1. The schematic diagram of the synchronization state of the coupled neurons in a two-dimensional plane composed of the time delay τ_1 (unit: ms) and the coupling strength M_1 . The gray-black portion of the diagram shows the asynchronous state; white indicates synchronization status

图 1. 延迟时间 τ_1 (单位: ms)和耦合强度 M_1 构成的二维平面内，耦合神经元的同步状态示意图。图中灰黑色部分表示异步状态；白色部分表示同步状态

分析图 1, 我们能从中得出, 时延是决定耦合神经元同步程度的主要因素。固定住耦合强度, 且时延较小时, 耦合神经元系统处于同步状态; 慢慢增大 τ_1 , 当其到达某一个阈值时, 可以观察到两个耦合神经元的状态变成了异步的, 不再是同步; 将 τ_1 继续增大, 两个神经元之间又变回了先前的同步状态。

在时间推移的过程中, 可以观察到有些振荡的振幅大, 有些振荡的振幅小。这里我们把“大振幅振荡”定义为膜电位的振幅大于 0.5 mV 的振荡, 达不到这个振动幅度的就称之为“小振幅振荡”。图 1 的灰色部分表示的是异步状态; 左侧的白色部分表示的是尖峰同步状态; 右边白色部分表示的是大幅振荡与小振幅振荡相交替的同步状态。

2.3. 多时延的耦合神经元系统的同步流形理论推导

在这一小节, 我们来研究拥有两个时延的耦合神经元。在式(1)中, 把表示延迟耦合的个数的参数 L 指定为 2, 则延迟时间 τ_1 、 τ_2 及耦合强度 M_1 、 M_2 可以分别用来描述不同的延迟耦合的特点[22] [23] [24]:

$$\dot{x}_i = x_i(x_i - 1)(a - x_i) - y_i + M_1(x_j^{(\tau_1)} - x_i) + M_2(x_j^{(\tau_2)} - x_i) + \lambda(t), \quad (11)$$

$$\dot{y}_i = bx_i - cy_j + M_1(y_j^{(\tau_1)} - y_i) + M_2(y_j^{(\tau_2)} - y_i), \quad (12)$$

在式(11)和式(12)中, $i, j \in \{1, 2\}$, 且 $i \neq j$ 。

把两个时间延迟分别指定为 $\tau_1 = 80$ ms 以及 $\tau_2 = 70$ ms。如果要让两个神经元完全处于同步状态, 那么参数 x_i 以及 y_i 一定要满足下式:

$$\delta x = x_1 - x_2 = 0, \quad \delta y = y_1 - y_2 = 0 \quad (13)$$

用数值计算的手段可以研究系统的同步稳定性。同步流形上的动力学模型方程表示如下:

$$\dot{x} = x(x-1)(a-x) - y + M_1(x^{(\tau_1)} - x) + M_2(x^{(\tau_2)} - x), \quad (14)$$

$$\dot{y} = bx - cy + M_1(y^{(\tau_1)} - y) + M_2(y^{(\tau_2)} - y), \quad (15)$$

$$x = x_1 = x_2, \quad y = y_1 = y_2 \quad (16)$$

因为同步流形的横向振动与整体振动相比较可以忽略不计, 所以它可以被描述为无穷小的变化: $\delta x \sim o(x)$, $\delta y \sim o(y)$ 。

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} = & -(a + M_1 + M_2)\delta x + (a+1)2x\delta x - 3x^2\delta x - \delta y \\ & + M_1[x_2(t-\tau_1) - x_1(t-\tau_1)] + M_2[x_2(t-\tau_2) - x_1(t-\tau_2)], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{y} = & b\delta x - (c + M_1 + M_2)\delta y + M_1[y_2(t-\tau_1) - y_1(t-\tau_1)] \\ & + M_2[y_2(t-\tau_2) - y_1(t-\tau_2)] \end{aligned}, \quad (18)$$

在上式的推导过程中, 运用了数学分析中无穷小量的等价代换知识: $x_1^2 - x_2^2 \sim 2x\delta x$, $x_1^3 - x_2^3 \sim 3x^2\delta x$ 。

图 2 表示的是在耦合强度不一样的情况下, 相互耦合的神经元之间的同步或者异步的状态。当延迟时间 $\tau_1 = 80$ ms 并且 $\tau_2 = 70$ ms 的时候, 耦合强度 M_1 较大和 M_2 较小时, 耦合神经元处于同步的状态, 其他情况下则处于不同步的状态。

3. 实验结果

3.1. 高斯色噪声对耦合神经元的放电模式的影响

在本节中, 我们考虑在单时延的背景下, 高斯色噪声对耦合神经元放电模式的影响。我们将单时延 τ_1 固定为 80 ms, 分别研究参数 q 、 D 、 M_1 对结果的作用与影响。具体办法是固定两个参数, 渐次改变第三个

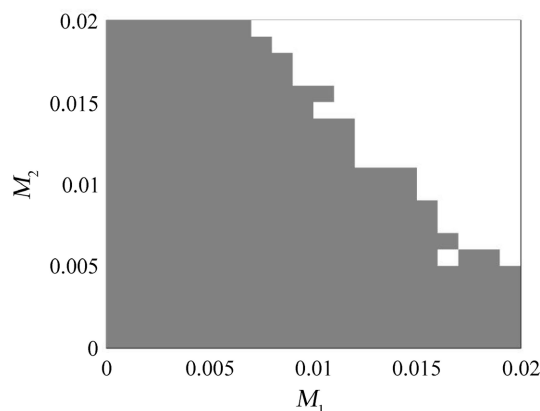


Figure 2. Schematic diagram of synchronization state of coupled neurons in the two-dimensional plane composed of coupling strength M_1 and M_2 . The gray and black sections of the diagram indicate asynchronous status; the white sections indicate synchronous status

图 2. 耦合强度 M_1 和 M_2 构成的二维平面内, 耦合神经元的同步状态示意图。图中灰黑色部分表示异步状态; 白色部分表示同步状态

参数, 观察图形的变化, 分析原因然后得出结论。参数 D 的含义是噪声强度; 参数 M_1 的含义是神经元之间的耦合强度; 参数 q 的含义是神经元之间的相互关联度[25] [26] [27] [28]。

3.1.1. 相互关联度 q 的作用与影响

我们首先来探究参数 q 的作用与影响。此时, 我们把噪声强度 D 设置为 0.0001, 把耦合强度 M_1 设置为 0.01, 变化 q 值, 观察规律。这里我们定义一个物理量 ISI , 它表示神经元放电时相邻峰之间的间隔。变化 q 值, ISI 的值也会相应变化, 峰之间间隔的变化意味着神经元的放电状态发生了转变。

当 q 值取得很小, 比如图 3(a)所示, $q = 10^{-6}$, 可以观察到此时单个神经元的放电行为非常有规律, 每一个小幅振荡区域之后是一个大幅振荡, 每个大幅振荡所形成的峰之间的间隔近乎相等, 也就是说, 每一个小幅振荡区域的时间周期几乎是一样的。从此图中可以得出结论: 很小的 q 值对神经元的正常放电几乎不会产生什么影响。

当 q 值逐渐增大, 如图 3(b)所示, 此时 $q = 10^{-4}$, 与图 3(a)相比, 神经元的放电情况就不是那么规律了。它的大幅振荡之间的峰峰间隔出现了不等的情况, 每一个小幅振荡区域的时间周期出现了细微的差别, 有的长一点, 有的短一点, 并且每个小幅振荡区域的最大振幅也略微有所不同。由此图可看出, 加大 q 值会对神经元的放电模式产生一定影响。

接下来继续将 q 值增大, 如图 3(c)所示, 将 q 值设为 0.01, 这个时候, 神经元的放电情况就明显不如前面所讨论的规律了。大幅振荡峰之间的间隔时大时小, 小幅振荡也开始变得混沌, 不再是像图 3(a)与图 3(b)所显示的那样振幅平滑地渐次增大, 而是在一个小幅振荡周期里, 振幅差不多, 但中间会穿插一些振幅明显偏大的振荡, 并且小幅振荡的周期时间长短也不一, 有的周期长, 有的周期很短。还可以从图中看出, 大幅振荡峰之间的间隔与小幅振荡的周期整体上要比 q 值取 10^{-6} 和 10^{-4} 时小一些。

将 q 值继续增大到 0.1, 如图 3(d)所示, 此时神经元的放电模式主要是大幅振荡, 峰峰间隔进一步减小。双峰之间的小幅振荡数已经明显减少。

图 3(e)中, 我们把 q 值设为 0.2, 可以看出, 在大约 $t = 2.23 \times 10^4$ ms 之前, 神经元振荡情况与 $q = 0.1$ 时一样; 但在 $t = 2.23 \times 10^4$ ms 之后, 我们在图中基本上只能看到大振幅振荡了, 小振幅振荡已经非常不明显, 有的两峰之间甚至看不出有小振幅振荡, 峰峰之间的间隔变得更加密集。

当 q 值继续增大到 1 时, 如图 3(f) 所示, 它所展示的神经元放电情况与图 3(e) 一样, 说明当 q 增大到某一数值, 继续增加 q 值不会再改变神经元的放电模式了。

综上所述, 我们可以得出参数 q 对神经元放电的影响是: 当 q 值很小时, 神经元的大幅振荡和小幅振荡都很有规律, 峰间距与振荡周期都近乎不变; 当逐渐增大 q 值, 其对神经元放电活动的作用就慢慢突显出来了。随着 q 值的增大, 神经元的放电行为变得有些混乱, 比如峰间距不再一致, 小幅振荡的振荡周期也不再相同, 并且小振幅振荡的振幅存在跳变。当 q 进一步增大, 小幅振荡慢慢减少甚至消失, 大幅振荡的峰峰间隔减小。当 q 值增大到大约 0.2 时, 继续增大 q 值, 神经元的放电情况就不再发生变化, 神经元的放电情况最终是两种模式共存: ① 峰峰间距大约是 0.3 s, 中间存在少量小幅振荡; ② 峰峰间距大约是 0.16 s, 中间几乎无小幅振荡。

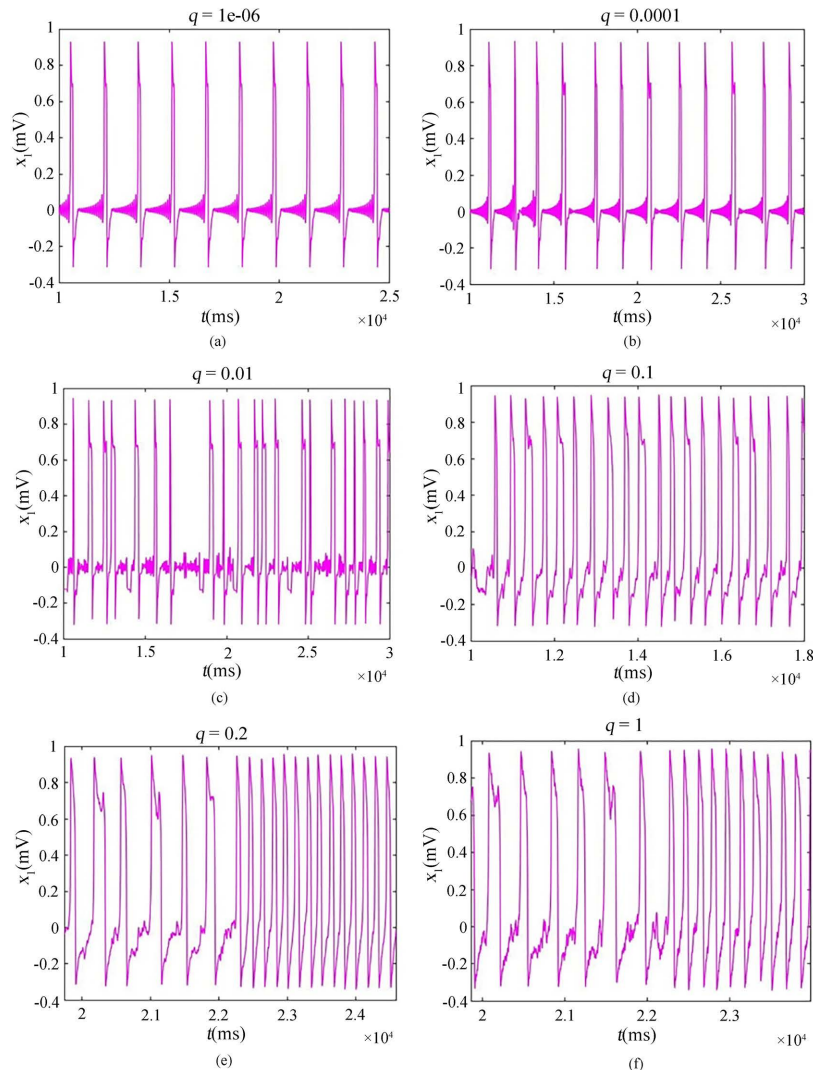


Figure 3. The effect of correlation rate q on the firing patterns of coupled neurons with a single time delay ($\tau_1 = 80$ ms). The correlation rate q is, in order: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$. The coupling strength M_1 is 0.01; the noise intensity D is 10^{-4} .

图 3. 相互关联度 q 对具有单时间延迟 ($\tau_1 = 80$ ms) 的耦合神经元的放电模式的影响。相互关联度 q 依次为: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$ 。耦合强度为 $M_1 = 0.01$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$ 。

图 4 准确地将上面我们得到的规律展现了出来。如图所示，其横坐标取的是 q 值以 10 为底的对数，这样处理使得画出来的图更直观；纵坐标是 ISI ，即相邻峰之间的间隔。从图中可看出，当逐渐增加 q 值，同一个 q 所对应的 ISI 值也越来越多，大概在 $q=10^{-3}$ 时， ISI 点在前半段的分布最为密集。也是在大概 $q=10^{-3}$ 时， ISI 值从整体上开始下降，图形进入了后半段。说明从 q 大约为 10^{-3} 开始，大幅振荡逐渐占主导地位，小幅振荡在消减。在 q 约为 0.1 处，图形又进入了另一个平稳阶段，此时峰峰间隔主要集中在两个值，即 0.3 s 和 0.16 s 附近，对应图中右下部分两块黑色的区域。

图 3 与图 4 用不同的图形样式得出了相同的结论。很好地说明了相互关联度 q 对神经元放电活动峰峰间隔的影响规律。

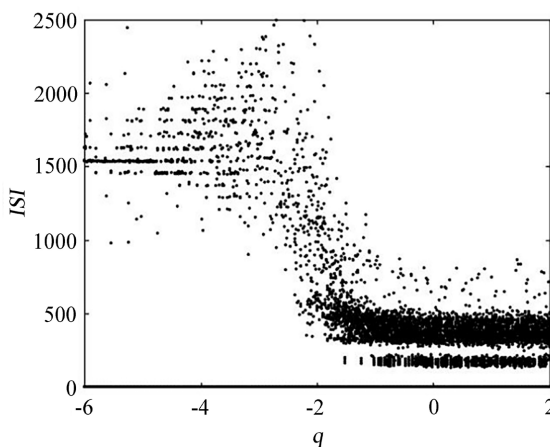


Figure 4. InterSpike Interval (unit: ms) for the discharge of a single neuron with a single time ($\tau_1 = 80$ ms) in the case of different correlation rate q . Coupling strength M_1 is 0.01; noise intensity D is 10^{-4}

图 4. 不同相互关联度 q 的情况下具有单时间延迟($\tau_1 = 80$ ms)的单个神经元放电的峰峰间隔 ISI (单位: ms)。耦合强度为 $M_1 = 0.01$ ；噪声强度为 $D = 10^{-4}$

3.1.2. 耦合强度 M_1 的作用与影响

其次我们来探究参数 M_1 ，也就是耦合强度对神经元放电的作用与影响。此时我们把噪声强度 D 设置为 10^{-8} ，把相互关联度 q 设置为 0.2。在将参数 D 、 q 固定为以上两值的基础上，我们把耦合强度 M_1 取了四个依次增大的数值，分别为 $M_1 = 0.005$ 、 $M_1 = 0.01$ 、 $M_1 = 0.03$ 、 $M_1 = 0.05$ ，作出了如图 5 的四幅小图：图 5(a)~(d)，依次按顺序对应上述 M_1 的四个值[30] [31] [32]。图 5 是描述单个神经元放电情况的图。之后我们将参数 M_1 作为横坐标，单个神经元放电的局部峰值 x_{\max} 作为纵坐标，画出了局部峰值 x_{\max} 随耦合强度 M_1 变化而变化的分岔图，如图 6(a)与图 6(b)。

我们先来看图 5。当 $M_1 = 0.005$ 时，我们看到在图 5(a)中，神经元的放电活动是很规则的，只有大幅振荡，无小幅振荡。从图中可直观地看出，神经元放电存在正、负两种峰值，所有正峰值大约都是 0.96 mV，所有负峰值大约都是 -0.34 mV，即当 M_1 取值比较小时，单个神经元的放电峰值相对比较集中。

将 M_1 值增大到 0.01，我们可以从图 5(b)中看出，此时神经元的放电活动中既有大幅振荡又有小幅振荡。最大的正峰值约为 0.95 mV，最大的负峰值约为 -0.34 mV，与图 5(a)差不多。小幅振荡在 0 mV 两侧呈对称分布。在图 5(b)中还可看出，从最大的正峰向最大的负峰过渡的过程中，有的放电周期里出现正的局部峰，其峰值大约为 0.68 mV；从最大的负峰向小幅振荡区域过渡的过程中，有的放电周期里会出现负的局部峰，其峰值大约为 -0.18 mV。

当 $M_1 = 0.03$ 时, 如图 5(c) 所示, 与图 5(b) 一样的是, 神经元放电大幅振荡与小幅振荡共存。但是此时我们可以明显地看出, 几个最大的正峰值不一样了, 主要有两种, 一种约为 0.96 mV ; 另一种约为 0.9 mV 。几个最大的负峰值几乎还是相同的, 约为 -0.3 mV 。小幅振荡在 0 mV 两侧不再呈对称分布, 在 0 mV 以上的分布要多于 0 mV 以下的分布, 这说明小幅振荡区域的放电正峰值的绝对值整体上要大于负峰值的绝对值。在图 5(c) 中还可看出, 在每一个放电周期内, 从最大的正峰向最大的负峰过渡过程中, 都会出现正的局部峰, 主要集中在大约 0.82 mV 和大约 0.71 mV 两个值; 从最大的负峰向小幅振荡区域过渡的过程中, 都会出现负的局部峰, 主要集中在大约 -0.24 mV 和大约 -0.18 mV 两个值。

当 $M_1 = 0.05$ 时, 如图 5(d) 所示, 与图 5(b)、图 5(c) 的共同点是神经元放电既有大幅振荡, 也有小幅振荡。它与图 5(c) 还有更多的共同点, 比如几个最大的正峰值不同, 跟图 5(c) 一样, 主要集中在大约 0.96 mV 和大约 0.9 mV 两个值; 图 5(d) 中几个最大的负峰值几乎也是相同的, 约为 -0.28 mV ; 图 5(d) 中小幅振荡在 0 mV 两侧也不是呈对称分布的, 其小幅振荡区域的放电正峰值的绝对值整体上要大于负峰值的绝对值。图 5(d) 与图 5(c) 的不同之处在于: 在一个放电周期内, 如果从最大的正峰向最大的负峰的过渡过程中, 出现了正局部峰, 那么在该放电周期内从最大的负峰向小幅振荡区域过渡的过程中, 最大负峰处在极短的时间间隔内又会出现一个最大负峰, 形成双最大负峰, 双最大负峰之间有一个局部负峰, 然后从第二个最大负峰处才开始平稳地向小幅振荡区域过渡; 在一个放电周期内, 如果从最大的正峰向最大的负峰过渡的过程中, 最大正峰处在极短的时间间隔内又出现了一个最大正峰, 形成双最大正峰, 双最大正峰之间有一个局部正峰, 然后从第二个最大正峰处才开始平稳地向最大负峰过渡, 那么在该放电周期内从最大负峰向小幅振荡区域过渡的过程中, 会出现负的局部峰。从图中我们可以看出, 双最大正峰之间的局部正峰与从最大正峰向最大负峰的过渡过程中出现的局部正峰的峰值相同, 都是大约为 0.8 mV ; 双最大负峰之间的局部负峰与从最大负峰向小幅振荡区域过渡的过程中出现的局部负峰的峰值相同, 都是大约为 -0.2 mV 。

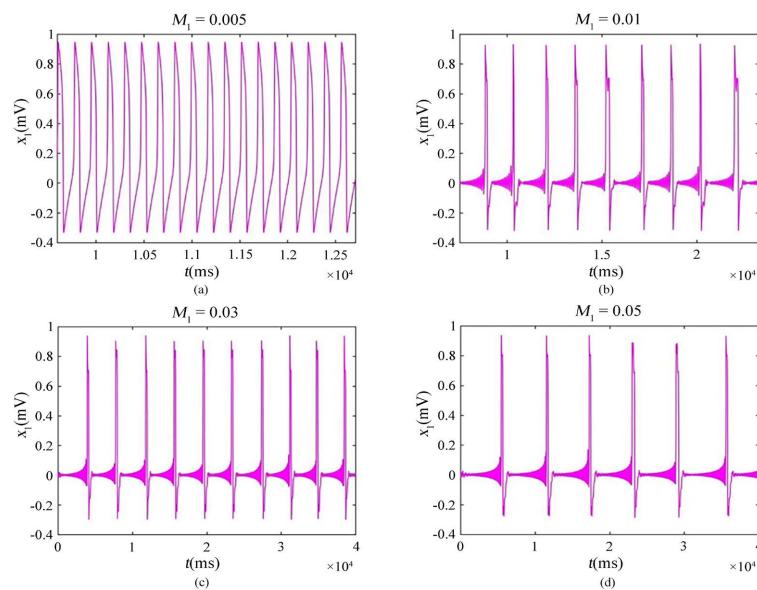


Figure 5. Effect of coupling strength M_1 on the firing pattern of coupled neurons with a single time delay ($\tau_1 = 80 \text{ ms}$). The coupling strength M_1 is, in order: (a) $M_1 = 0.005$; (b) $M_1 = 0.01$; (c) $M_1 = 0.03$; (d) $M_1 = 0.05$. The correlation rate q is 0.2 ; the noise intensity D is 10^{-8}

图 5. 耦合强度 M_1 对具有单时间延迟 ($\tau_1 = 80 \text{ ms}$) 的耦合神经元的放电模式的影响。耦合强度 M_1 依次为: (a) $M_1 = 0.005$; (b) $M_1 = 0.01$; (c) $M_1 = 0.03$; (d) $M_1 = 0.05$ 。相互关联度为 $q = 0.2$; 噪声强度为 $D = 10^{-8}$

接下来我们分析图 6, 图 5 只是选了具有代表性的四个 M_1 的值对神经元的放电情况进行分析。图 6(a) 中, M_1 在 $[0, 0.05]$ 的范围内连续取值, 从中我们可以更清楚地了解当 M_1 连续变化时, 神经元放电过程中峰值的变化情况。首先, 图 5 中 M_1 的四个取值下神经元放电峰值的情况都可以很好地与图 6(a) 中四个相应的部分对应。其次, 从这个分岔图中, 我们可以看出: 随着 M_1 的渐次增大, 神经元放电过程中会出现越来越多不同的峰值。

图 6(a) 中, 上面的线条状部分对应神经元放电过程中出现的正峰值; 中间的密集黑色部分对应小幅振荡区域当中的众多峰值; 密集黑色部分以下的线条代表神经元放电过程中出现的负峰值。图 6(b) 是图 6(a) 中放电峰值在 $-0.2 \text{ mV} \sim 0.2 \text{ mV}$ 这个范围之内的特写视图, 这样我们能更清晰地观察到小幅振荡区域和峰为负值时的神经元放电的峰值分布情况。

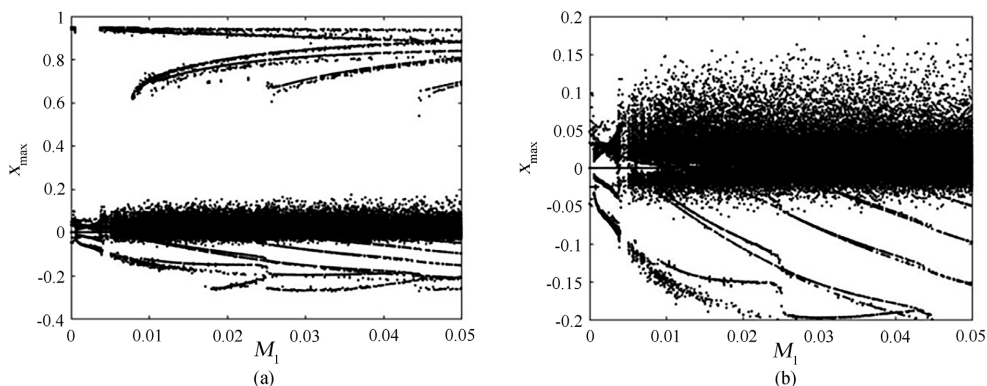


Figure 6. Bifurcation diagram of the local peak x_{\max} (unit: mV) of a single neuron discharge with a single time delay ($\tau_1 = 80 \text{ ms}$) for different coupling strength M_1 . (b) is a close-up view of the discharge peak in (a) in the range of -0.2 mV to 0.2 mV . The correlation rate q is 0.2; the noise intensity D is 10^{-8}

图 6. 不同耦合强度 M_1 的情况下具有单时间延迟 ($\tau_1 = 80 \text{ ms}$) 的单个神经元放电的局部峰值 x_{\max} (单位: mV) 的分岔图。(b) 是 (a) 中放电峰值在 $-0.2 \text{ mV} \sim 0.2 \text{ mV}$ 这个范围之内的特写视图。相互关联度为 $q = 0.2$; 噪声强度为 $D = 10^{-8}$

3.1.3. 噪声强度 D 的作用与影响

最后我们来探究噪声强度 D 对神经元放电的作用与影响。此时我们把耦合强度 M_1 设定为 0.01, 把相互关联度 q 设定为 0.2。在将参数 M_1 、 q 固定为以上两值的基础上, 我们取 D 的六个值依次来观察规律, 从小到大依次将 D 取为: $D = 10^{-9}$ 、 $D = 10^{-7}$ 、 $D = 10^{-6}$ 、 $D = 10^{-5}$ 、 $D = 10^{-4}$ 、 $D = 10^{-3}$, 分别对应图 7 的 (a)~(f)。图 7 是单个神经元的放电活动的时间序列图, 随着 D 值的渐次增大, 我们可以看出神经元的放电状态明显发生了变化。进一步观察可看到, 神经元放电模式的变化趋势与我们前面固定参数 D 、 M_1 , 渐次增大参数 q 时的神经元放电模式的变化趋势有些类似, 因此这里我们研究噪声强度 D 对神经元放电模式的影响就可以参考前面研究参数 q 时的思路与方法, 主要也是考察峰峰间隔 ISI 随着噪声强度 D 的增大而变化的情况。

当 $D = 10^{-9}$ 时, 如图 7(a) 所示, 此时神经元的放电很有规则, 每一个小幅振荡区域之后是一个大幅振荡, 每个大幅振荡所形成的峰之间的间隔近乎相等, 也就是说每个小幅振荡区域的时间周期几乎是一样的。

增大 D 值至 10^{-7} , 如图 7(b) 所示, 与图 7(a) 相比, 神经元的放电情况发生了些许变化。它的大幅振荡之间的峰峰间隔出现了不等的情况, 每一个小幅振荡区域的时间周期出现了细微的差别, 有的长一点, 有的短一点, 并且每个小幅振荡区域的最大振幅也略微不同。

接下来继续增大噪声强度至 $D = 10^{-6}$, 如图 7(c) 所示, 这个时候, 大幅振荡峰之间的间隔时大时小。每一个小幅振荡区域里, 振幅不再是平滑地渐次增大, 而是有振幅大一点的振荡, 也有振幅小一点的振

荡, 但这些振幅大小整体上差不多。从图中还可观察到, 在从有些最大正峰值尖峰处恢复至静息电位的过程中, 也会出现比较明显的小幅振荡, 这些小幅振荡的电位都为正值。同时我们可以看到, 大幅振荡峰之间的间隔整体上已经要比 D 值取 10^{-9} 和 10^{-7} 时小一些。

在图 7(d)中, D 值增大到了 10^{-5} , 此时神经元的放电模式主要是大幅振荡, 峰峰间隔进一步减小。0 mV 上下的小幅振荡数明显减少了; 在从有些最大正峰值尖峰处恢复至静息电位的过程中, 仍然存在电位为正的小幅振荡。

图 7(e)中, 我们把 D 值设为 10^{-4} 。可以看出, 主要存在两种峰峰间隔: 在 t 大约为 1.26×10^4 ms~ 1.36×10^4 ms 的时间范围内, 峰峰间隔约为 0.2 s, 此时峰与峰之间非常接近, 并且这一段神经元放电只有大幅振荡, 无明显的小幅振荡; 当 t 不在这个时间范围内, 峰峰间隔约为 0.4 s, 此时峰与峰之间也比较接近, 神经元放电以大幅振荡为主, 同时也存在小幅振荡, 但小幅振荡的数量和周期同 $D = 10^{-5}$ 时相比, 变得更少了。

最后我们把 D 值设为 10^{-3} , 如图 7(f)所示, 与图 7(e)一样, 该图中也是主要存在约为 0.2 s 和 0.4 s 两种峰峰间隔, 但当 $D = 10^{-3}$ 时, 在 $t \approx 1 \times 10^4$ ms ~ 1.6×10^4 ms 的时间范围内, 0.2 s 的峰峰间隔明显多于 0.4 s 的峰峰间隔——与图 7(e)相比, 0.2 s 的峰峰间隔明显增多, 0.4 s 的峰峰间隔明显减少。此时峰与峰之间的间隔已经达到了非常密集的程度, 这说明增大 D 值可以让神经元放电产生的峰与峰之间向靠近的方向发展。

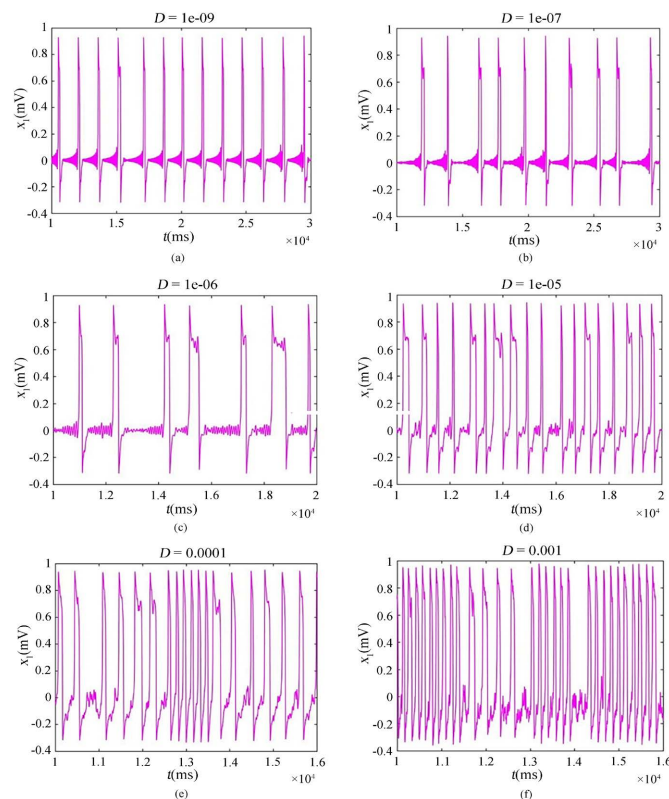


Figure 7. The effect of noise intensity D on the firing pattern of coupled neurons with a single time delay ($\tau_1 = 80$ ms). The noise intensity D is, in order: (a) $D = 10^{-9}$; (b) $D = 10^{-7}$; (c) $D = 10^{-6}$; (d) $D = 10^{-5}$; (e) $D = 10^{-4}$; (f) $D = 10^{-3}$. The correlation rate q is 0.2; the coupling strength M_1 is 0.01

图 7. 噪声强度 D 对具有单时间延迟 ($\tau_1 = 80$ ms) 的耦合神经元的放电模式的影响。噪声强度 D 依次为: (a) $D = 10^{-9}$; (b) $D = 10^{-7}$; (c) $D = 10^{-6}$; (d) $D = 10^{-5}$; (e) $D = 10^{-4}$; (f) $D = 10^{-3}$ 。相互关联度为 $q = 0.2$; 耦合强度为 $M_1 = 0.01$

综合我们上述讨论的结果，图 8 应运而生。该图反映了当噪声强度 D 从 10^{-9} 到 10^{-3} 连续变化时，峰峰间隔 ISI 的变化情况，其横坐标取的是 D 值以 10 为底的对数，这样处理使得画出来的图更直观。从图中可看出，当逐渐增加 D 值，同一个 D 所对应的 ISI 值也越来越多，大概在 $D=10^{-7}$ 时， ISI 点在前半段的分布最为密集。也是在大概 $D=10^{-7}$ 时， ISI 值从整体上开始下降，图形进入了后半段。说明从 D 大约为 10^{-7} 开始，大幅振荡逐渐占主导地位，小幅振荡在消减。在 D 约为 10^{-4} 处，图中出现了一个有趣的情况：有两块密集的黑色区域，位于下方的黑色区域对应的平均 ISI 值为 0.2 s，位于上方的黑色区域对应的平均 ISI 值为 0.4 s。但随着 D 值从 10^{-4} 到 10^{-3} 连续过渡，下方密集黑色区域的宽度逐渐变宽，上方密集黑色区域的宽度逐渐变窄，这个特征正好迎合了我们前面在总结图 7(e)和图 7(f)时得出的结论：当噪声强度 D 增大到一定值的时候，峰峰间隔 ISI 主要集中在两个值，当继续增大 D ，大的 ISI 值数量会减少，小的 ISI 值数量会增加，即增大噪声强度 D 可以让神经元放电产生的峰与峰之间向靠近的方向发展。

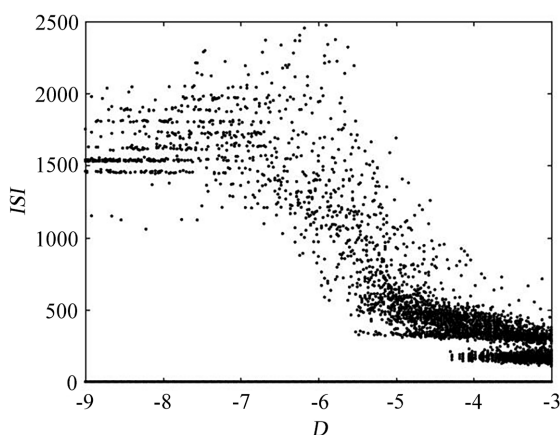


Figure 8. InterSpike Interval (unit: ms) of a single neuron firing with a single time delay ($\tau_1 = 80$ ms) under different noise intensity D . The correlation rate q is 0.2; the coupling strength M_1 is 0.01

图 8. 不同噪声强度 D 的情况下具有单时间延迟 ($\tau_1 = 80$ ms) 的单个神经元放电的峰峰间隔 ISI (单位: ms)。相互关联度为 $q = 0.2$ ；耦合强度为 $M_1 = 0.01$

3.2. 高斯色噪声对耦合神经元相位同步的影响

本节我们来研究神经元之间具有双时延和双耦合时，在相互关联度 q 和噪声强度 D 取值不同的情况下，高斯色噪声对耦合神经元相位同步的影响。双时延用 τ_1 、 τ_2 表示，双耦合强度用 M_1 、 M_2 表示。研究方法与上一节研究对放电模式的影响时的方法相同，即当要考察一个参量对相位同步的作用与影响时，固定其他参量的值，只改变要考察的参量，然后观察图形的特点与变化。由于这一节引进的是双时延和双耦合，我们除了继续探究参数 q 、 D 的影响与作用外，还要分别探究两个时延和两个耦合强度在不同差值的情况下对相位同步的影响与作用，我们采用分别改变 M_1 和 τ_1 ，固定 M_2 和 τ_2 的方法[29]。

3.2.1. 相互关联度 q 的作用与影响

我们首先来探究相互关联度 q 的作用与影响。此时我们把另外的五个参数分别固定为： $M_1 = 0.005$ ； $M_2 = 0.0053$ ； $\tau_1 = 80$ ms； $\tau_2 = 70$ ms； $D = 10^{-4}$ 。在其他五个参数固定为以上值的前提下，将 q 从小到大依次取六个值，分别为 $q = 10^{-6}$ 、 $q = 10^{-4}$ 、 $q = 10^{-2}$ 、 $q = 0.1$ 、 $q = 0.2$ 、 $q = 1$ ，分别作出六幅耦合神经元的相位同步状态图和相位差分布图，观察每个图的特点，相互比较，找出变化的规律。

当 $q = 10^{-6}$ 时，如图 9(a)所示，耦合神经元处于交替的同步与异步状态：大幅振荡的时候耦合神经元

处于异步状态；小幅振荡的时候耦合神经元有时处于异步状态，但绝大多数的小幅振荡都是相位同步的。如图 10(a)所示，大幅振荡对应的时刻相位差有着较大的波动；小幅振荡对应的时刻相位差的波动不大，大部分分布在零相位差附近，这对应于同步状态，最大相位差正弦值的绝对值也不超过 0.25，这说明小幅振荡的整体异步性很小。

当 $q = 10^{-4}$ 时，如图 9(b)所示，此时耦合神经元仍然处于同步和异步交替的状态，但跟 $q = 10^{-6}$ 时相比，异步状态明显有所增加。大幅振荡的时候耦合神经元还是处于异步状态；小幅振荡时耦合神经元整体处于同步状态，但从图中的细微之处可看出，小幅振荡不同步的时刻明显较 $q = 10^{-6}$ 时增多，也就是说小幅振荡的异步性明显增加。如图 10(b)所示，大幅振荡对应的时刻相位差有着较大的波动，对应异步状态；每个小幅振荡区域都有成块密集的点分布在零相位差附近，这对应于同步状态，但是跟大幅振荡一样，小幅振荡相位差的正弦值在 $[-1, 1]$ 的范围内都有分布，这说明小幅振荡是相位同步与异步共存，且异步程度相较于较小的 q 值有所加剧。

当 $q = 10^{-2}$ 时，如图 9(c)所示，耦合神经元的小幅振荡减弱，并且小幅振荡变得有些乱，不再像前面两幅图所显示的那样：振幅平滑地渐次增大。此时我们已看不出任何的相位同步状态，并且振荡的周期也大大变短了。如图 10(c)所示，大多数的相位差在零附近波动，这说明耦合神经元一直是异步的，没有同步的时候。

当 $q = 0.1$ 时，如图 9(d)所示，小振幅振荡已经消失，耦合神经元的大幅振荡产生的尖峰之间的相位差比较集中，从图 10(d)中可看出，尖峰之间相位差的正弦值主要在 0.5 和 -0.5 附近。除此之外，尖峰以外的部分振荡的相位差值在零附近以线条或点的形式波动，且在零相位差值处没有明显密集的地方，这说明耦合神经元一直处于异步状态，且异步得比较“均匀”，即相位差均匀地分布在零附近。

当 $q = 0.2$ 时，如图 9(e)所示，此时出现了一个比较有意思的现象，即此时耦合神经元处于相位漂移和反相位的交替状态。振荡周期小的对应的是反相位状态，振荡周期大的对应的是相位漂移。如图 10(e)所示，相位差呈现出交替变换：在 $t \approx 2.18 \times 10^4 \text{ ms} \sim 2.24 \times 10^4 \text{ ms}$ 区间范围内，相位差正弦值分布在 0.2 和 -0.2 附近，这对应于反相位状态；在其他时间范围内，相位差的数值在零附近波动，这对应着相位漂移状态，并且从图中我们能清楚地读到当耦合神经元处于相位漂移状态时，各尖峰处两个神经元之间相位差的数值。

当 $q = 1$ 时，如图 9(f)所示，此时的情况与图 9(e)很相似，耦合神经元也是处于相位漂移和反相位的交替状态。但与 $q = 0.2$ 时相比较，此时相位漂移的周期和处于反相位状态的振荡周期都减小了。如图 10(f)所示，相位差呈现出交替变换：在 $t \approx 1.35 \times 10^4 \text{ ms} \sim 1.42 \times 10^4 \text{ ms}$ 区间范围内，相位差正弦值分布在 0.25 和 -0.25 附近，这对应于反相位状态；在其他时间范围内，相位差的数值在零附近波动，这对应着相位漂移状态，并且从图中我们能清楚地读到当耦合神经元处于相位漂移状态时，各尖峰处两个神经元之间相位差的数值。图 10(f)与图 10(e)相比较，大体上是相似的，只是可以看出相位漂移的周期和反相位状态的振荡周期都减少了，这一点我们从图 9(f)中也读出来了。

从上面的分析中我们可得出如下结果：当相互关联度 q 从较小的值逐渐增大的过程中，耦合神经元的相位变化情况是：交替的同步和异步状态中，异步状态的程度逐渐增大，然后同步状态完全消失，只有异步状态存在；再之后就是相位漂移和反相位状态交替存在，当到了这种状态后，继续增加 q 值不会改变这种状态，只会使得相位漂移和反相位振荡的周期都减小。

3.2.2. 噪声强度 D 的作用与影响

当要探究噪声强度 D 对耦合神经元相位同步的影响时，我们把另外的五个参数分别固定为：

$M_1 = 0.005$ 、 $M_2 = 0.0053$ 、 $\tau_1 = 80 \text{ ms}$ 、 $\tau_2 = 70 \text{ ms}$ 、 $q = 0.2$ 。在其他五个参数固定为以上值的前提下，

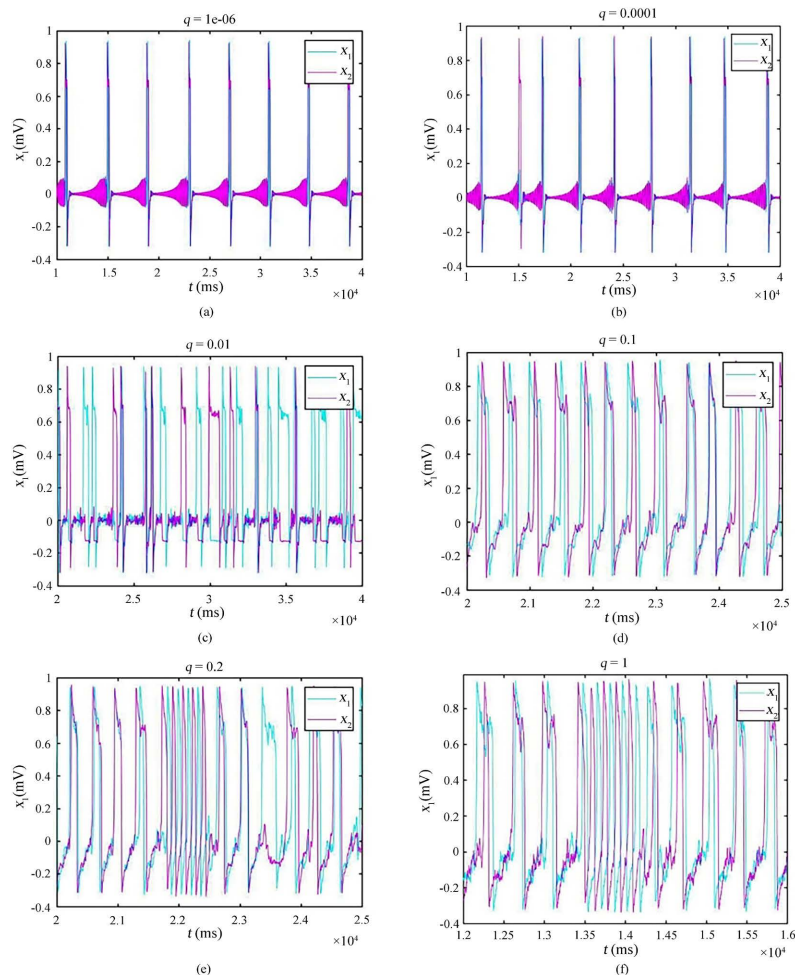


Figure 9. The effect of correlation rate q on spike synchronization due to the time delay at two delays $\tau_1 = 80 \text{ ms}$, $\tau_2 = 70 \text{ ms}$. The correlation rate q is, in order: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$. The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the noise intensity D is 10^{-4}

图 9. 相互关联度 q 对具有双时间延迟 ($\tau_1 = 80 \text{ ms}, \tau_2 = 70 \text{ ms}$) 的耦合神经元的相位同步的影响。相互关联度 q 依次为: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$ 。耦合强度为 $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.0053$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$

将 D 从小到大依次取四个值, 分别为 $D = 10^{-8}$ 、 $D = 10^{-6}$ 、 $D = 10^{-4}$ 、 $D = 10^{-3}$, 分别作出四幅耦合神经元的相位同步状态图和相位差分布图, 观察每个图的特点, 相互比较, 找出变化的规律。

当 $D = 10^{-8}$ 时, 如图 11(a) 所示, 此时耦合神经元处于同步和异步交替的状态。大幅振荡时耦合神经元处于异步状态, 小幅振荡时耦合神经元整体处于同步状态, 但从图中细微之处可看出, 耦合神经元小幅振荡有些时刻也存在着明显的相位不同步, 尤其是小幅振荡即将向大幅振荡过渡的时候。如图 12(a) 所示, 大幅振荡对应的时刻相位差有着较大的波动, 对应异步状态; 每个小幅振荡区域都有着密集的点分布在零相位差附近, 这对应于同步状态, 但是跟大幅振荡一样, 小幅振荡相位差的正弦值在 $[-1, 1]$ 的范围内都有分布, 这说明小幅振荡是相位同步与异步共存, 这与从图 11(a) 中读出的信息是一致的。

当 $D = 10^{-6}$ 时, 如图 11(b) 所示, 耦合神经元的放电还是明显地分为大幅振荡和小幅振荡, 但此时不管是大幅振荡还是小幅振荡都已看不出任何相位同步的状态了, 耦合神经元始终是相位异步的。并且在

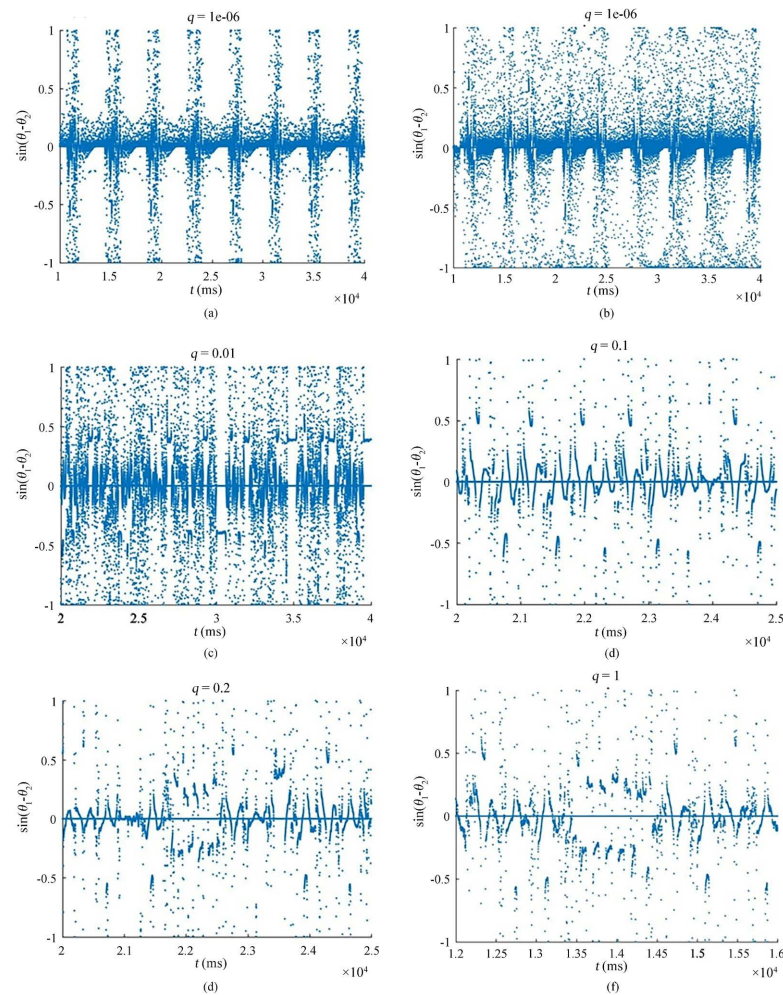


Figure 10. The phase difference of the coupled neurons in the case of double time delay ($\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms) with different correlation rate q . The correlation rate q is, in order: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$. The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the noise intensity D is 10^{-4}

图 10. 不同相互关联度 q 的情况下具有双时间延迟 ($\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms) 的耦合神经元的相位差。相互关联度 q 依次为: (a) $q = 10^{-6}$; (b) $q = 10^{-4}$; (c) $q = 10^{-2}$; (d) $q = 0.1$; (e) $q = 0.2$; (f) $q = 1$ 。耦合强度为 $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.0053$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$

每个振荡周期当中, 小幅振荡的振幅也不再是平滑地渐次增加, 而是变得没有那么规律了, 振幅忽大忽小。如图 12(b)所示, 大多数的相位差在零附近波动, 且在零相位差值处没有出现像 $D = 10^{-8}$ 时那样密集的地方, 这说明耦合神经元一直是相位异步的, 没有相位同步的时候。

当 $D = 10^{-4}$ 时, 如图 11(c)所示, 此时耦合神经元处于相位漂移和反相位共存的状态。振荡周期小的对应的是反相位状态, 振荡周期大的对应的是相位漂移状态。从图 12(c)中也可以看出相位漂移和反相位共存的情况: 在时刻 $t \approx 3.3 \times 10^4$ ms 之前, 相位差的数值在零附近波动, 这对应着相位漂移状态, 并且从图中我们能清楚地读到当耦合神经元处于相位漂移状态时, 各尖峰处两个神经元之间相位差的数值; 在时刻 $t \approx 3.3 \times 10^4$ ms 之后, 相位差正弦值在零相位差两侧呈对称态分布, 主要集中在 0.25 和 -0.25 附近, 这对应于反相位状态。

当 $D = 10^{-3}$ 时, 如图 11(d)所示, 此时耦合神经元依然处于相位漂移和反相位共存的状态, 但与

$D = 10^{-4}$ 时相比较, 此时相位漂移的振荡周期减小了, 反相位状态的振荡周期变化不大。从图 12(d) 中也可以看出相位漂移和反相位共存的情况: 在 $t \approx 1.68 \times 10^4 \text{ ms} \sim 1.75 \times 10^4 \text{ ms}$ 时间范围内, 相位差正弦值在零相位差两侧呈对称态分布, 这对应于反相位状态; 在其他时间范围内, 相位差的数值在零附近波动, 对应于相位漂移状态, 并且从图中我们能清楚地读到当耦合神经元处于相位漂移状态时, 各尖峰处两个神经元之间相位差的数值。从图 12(d) 中, 我们也可以读出图 11(d) 里所反映出的信息: 当噪声强度 D 值从 10^{-4} 增至 10^{-3} 时, 相位漂移的振荡周期减小了, 反相位状态的振荡周期变化不大。

从上面的分析中我们可得出如下结果: 当噪声强度 D 从较小的值逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况是: 交替的同步和异步状态 \rightarrow 异步状态 \rightarrow 相位漂移和反相位状态的共存, 或者说交替。当 D 值增大到了耦合神经元相位漂移与反相位共存的时候, 再增加 D 值依然是共存的情况, 但是更大的噪声强度 D 会使相位漂移态的振荡周期变小。

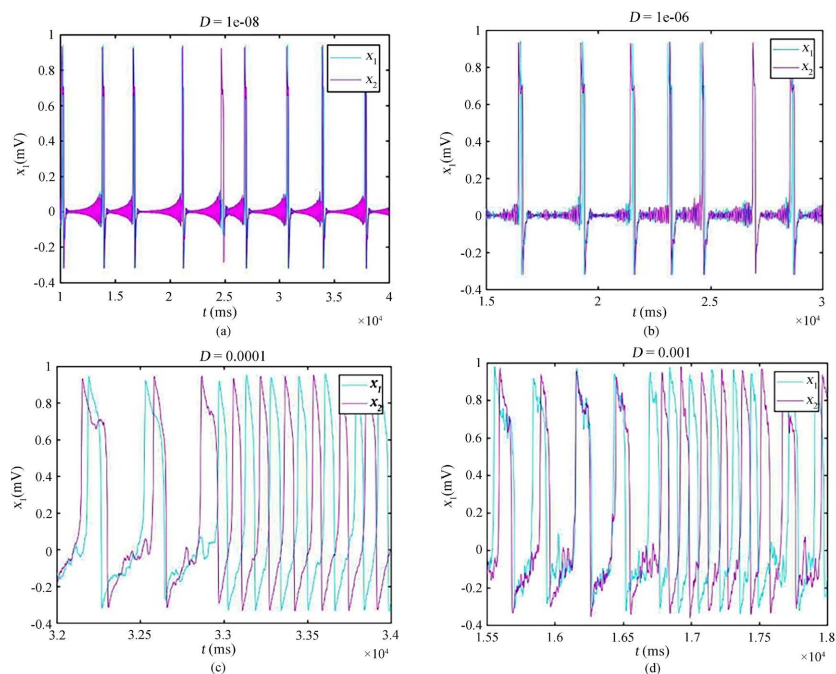


Figure 11. The effect of noise intensity D on spike synchronization due to the time delay $\tau_1 = 80 \text{ ms}, \tau_2 = 70 \text{ ms}$. The noise intensity D is, in order: (a) $D = 10^{-8}$; (b) $D = 10^{-6}$; (c) $D = 10^{-4}$; (d) $D = 10^{-3}$. The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the correlation rate q is 0.2

图 11. 噪声强度 D 对具有双时间延迟 ($\tau_1 = 80 \text{ ms}, \tau_2 = 70 \text{ ms}$) 的耦合神经元的相位同步的影响。噪声强度 D 依次为: (a) $D = 10^{-8}$; (b) $D = 10^{-6}$; (c) $D = 10^{-4}$; (d) $D = 10^{-3}$ 。耦合强度为 $M_1 = 0.005, M_2 = 0.0053$; 相互关联度为 $q = 0.2$

3.2.3. 双时延之间不同差值的作用与影响

当要探究双时延之间不同差值对耦合神经元相位同步的影响时, 我们将参数 M_1 固定为 0.005, 将参数 M_2 固定为 0.0053, 将参数 q 固定为 0.2, 将参数 D 固定为 10^{-4} 。为了改变双时延之间的差值, 我们将时延 τ_2 固定在 70 ms, 只改变时延 τ_1 , 将 τ_1 依次取为 70 ms、75 ms、80 ms、85 ms、90 ms 五个值, 则 $\tau_1 - \tau_2$ 的值依次为 0 ms、5 ms、10 ms、15 ms、20 ms。分别作出这五种情况下耦合神经元的相位同步状态图和相位差分布图, 观察每个图的特点, 相互比较, 总结出变化规律。

当 $\tau_1 = 70 \text{ ms}$ 时, 此时 τ_1 与 τ_2 差值为零, 效果就相当于单延迟作用于耦合神经元。如图 13(a) 所示, 此时耦合神经元无小幅振荡, 大幅振荡完全是异步的, 看不出任何的相位同步状态。从图 14(a) 中也能

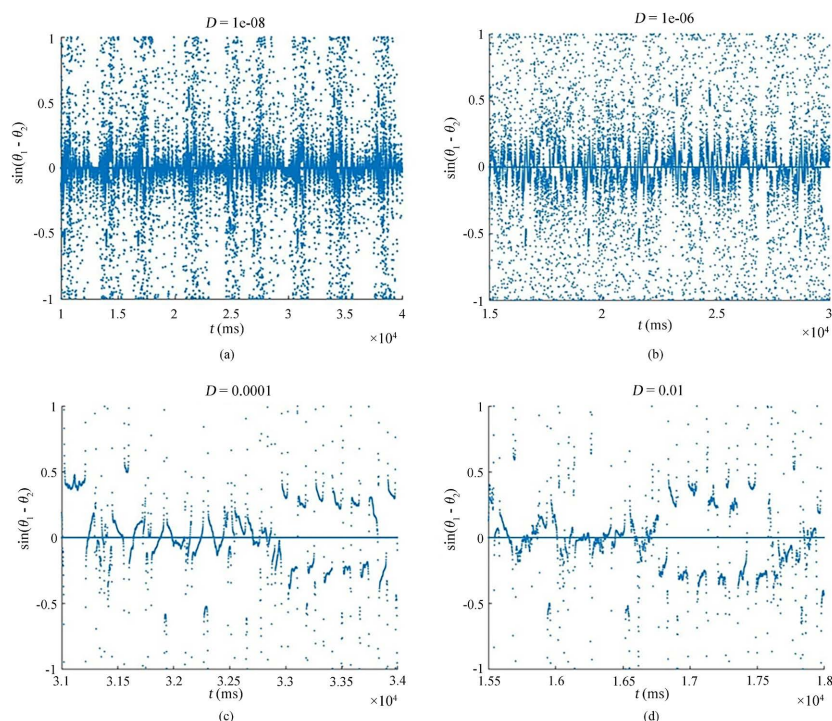


Figure 12. The phase difference of the coupled neurons in the case of double time delay ($\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms) with different noise intensity D . The noise intensity D is, in order: (a) $D = 10^{-8}$; (b) $D = 10^{-6}$; (c) $D = 10^{-4}$; (d) $D = 10^{-3}$. The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the correlation rate q is 0.2

图 12. 不同噪声强度 D 的情况下具有双时间延迟 ($\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms) 的耦合神经元的相位差。噪声强度 D 依次为: (a) $D = 10^{-8}$; (b) $D = 10^{-6}$; (c) $D = 10^{-4}$; (d) $D = 10^{-3}$ 。耦合强度为 $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.0053$; 相互关联度为 $q = 0.2$

看出这一点, 如图 14(a)所示, 大多数的相位差在零附近以线条或点的形式波动, 且在零相位差值附近没有出现成块密集的点, 这就能说明耦合神经元一直是相位异步的。

当 $\tau_1 = 75$ ms、80 ms、85 ms 时, τ_1 与 τ_2 的差值分别为 5 ms、10 ms、15 ms, 这三个时延差值分别对应图 13(b)~(d)。在这三个图中, 耦合神经元都是处于相位漂移和反相位共存或交替的状态, 振荡周期小的对应的是反相位状态, 振荡周期大的对应的是相位漂移状态。在与之对应的图 14(b)~(d)当中, 都有相位差正弦值在零相位差两侧呈对称分布, 并主要集中在绝对值相同的正、负两值附近的情况, 这对应于反相位状态; 也都有相位差的数值在零附近波动的情况, 这对应于相位漂移的状态。综合这些图的特点, 我们还能看出: 当双时延的差值从 5 ms 到 10 ms 再到 15 ms, 耦合神经元相位漂移状态的振荡周期和反相位状态的振荡周期都没有什么变化。

当 $\tau_1 = 90$ ms 时, 此时 τ_1 与 τ_2 的差值增大到了 20 ms。如图 13(e)所示, 耦合神经元此时完全处于相位漂移状态, 且振荡周期和之前相位漂移及反相位共存时候的相位漂移状态的振荡周期相同。从图 14(e)中也能看出当双时延差值为 20 ms 时, 耦合神经元完全处于相位漂移状态, 因为大多数的相位差在零附近以线条或点的形式波动, 在零相位差值附近没有出现成块密集的点; 并且与图 14(a)相比, 没有在负相位差区域出现横向的小幅波动线条, 这就和相位异步区别开了, 这里是相位漂移状态。

从上面的分析中我们可得出以下结果: 当双时延的差值从零逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况是: 异步状态 \rightarrow 相位漂移和反相位状态共存或交替 \rightarrow 相位漂移状态, 并且增加时延差相位漂移的振荡周期和反相位状态的振荡周期都不会改变。

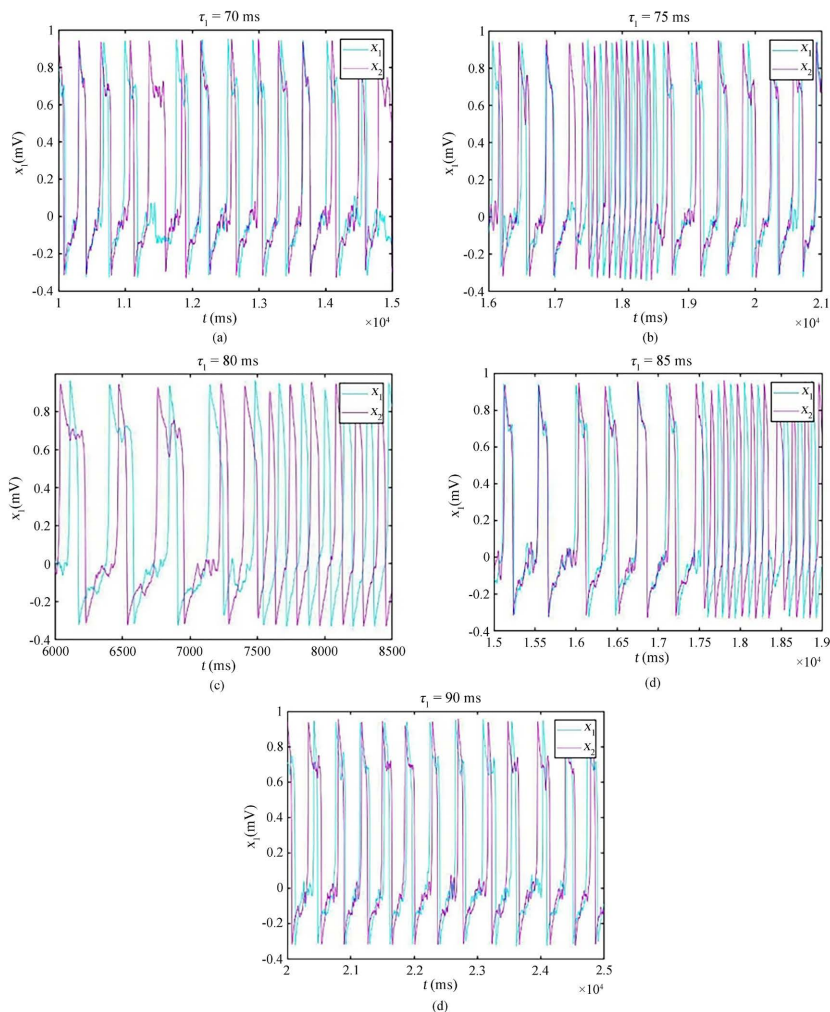


Figure 13. The effect of the difference between two time delays (τ_1 is in a varying state, $\tau_2 = 70$ ms) on phase synchronization of the coupled neurons. The time delay τ_1 is, in order: (a) $\tau_1 = 70$ ms ; (b) $\tau_1 = 75$ ms ; (c) $\tau_1 = 80$ ms ; (d) $\tau_1 = 85$ ms ; (e) $\tau_1 = 90$ ms . The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the correlation rate q is 0.2; the noise intensity D is 10^{-4}

图 13. 双时间延迟之间的差值(τ_1 处于变化状态, $\tau_2 = 70$ ms)对耦合神经元的相位同步的影响。时间延迟 τ_1 依次为: (a) $\tau_1 = 70$ ms ; (b) $\tau_1 = 75$ ms ; (c) $\tau_1 = 80$ ms ; (d) $\tau_1 = 85$ ms ; (e) $\tau_1 = 90$ ms 。耦合强度为 $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.0053$; 相互关联度为 $q = 0.2$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$

3.2.4. 双耦合强度之间不同差值的作用与影响

当要探究双耦合强度之间不同差值对耦合神经元相位同步的影响时, 我们将参数 τ_1 固定为 80 ms, 将参数 τ_2 固定为 70 ms, 将参数 q 固定为 0.2, 将参数 D 固定为 10^{-4} 。为了改变双耦合强度之间的差值, 我们将耦合强度 M_2 固定在 0.0053, 只改变耦合强度 M_1 , 将 M_1 依次取为 0.005、0.01、0.04 三个值, 则双耦合强度之差依次为 0.0003、0.0047、0.0347。分别作出这三种情况下耦合神经元的相位同步状态图和相位差分布图, 观察每个图的特点, 相互比较, 总结出变化规律。

当 $M_1 = 0.005$ 时, 此时 M_1 与 M_2 差值为 0.0003, 属于非常小的差值。如图 15(a)所示, 在图中的时间范围内, 耦合神经元处于相位漂移的状态。在图 16(a)中, 相位差在零附近以线条或点的形式波动, 这也能说明耦合神经元处于相位漂移的状态。

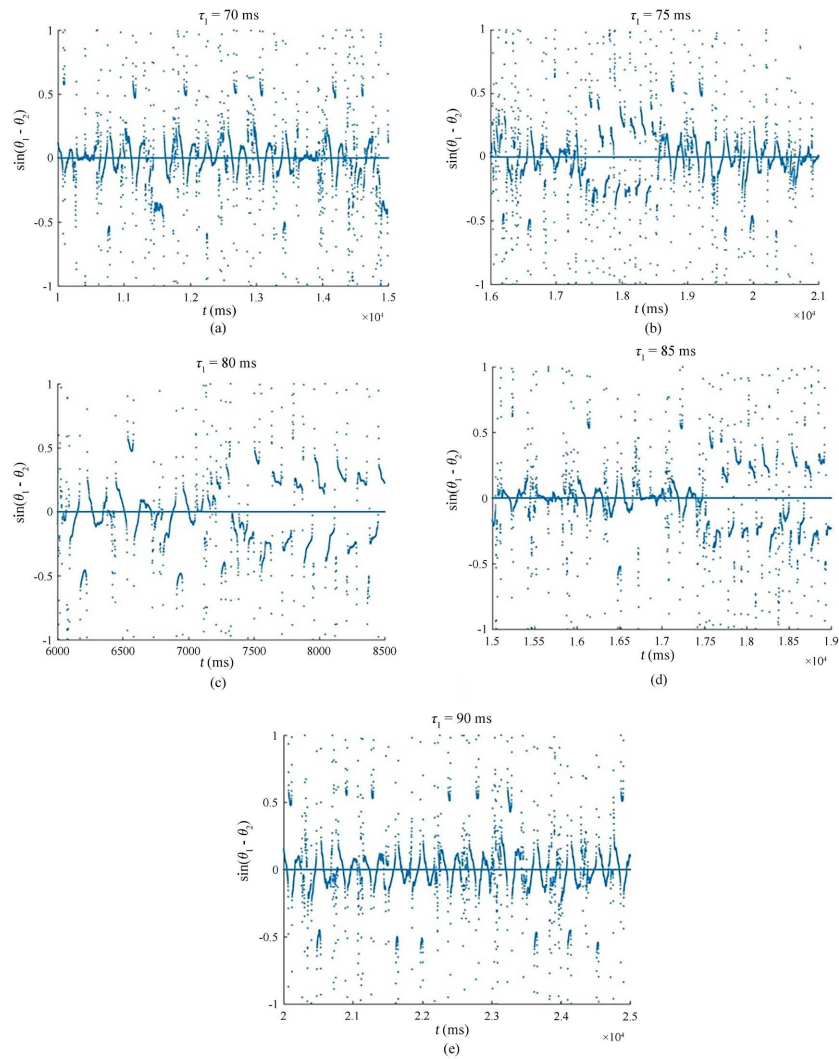


Figure 14. The phase difference of the coupled neurons in the case of different differences between two time delays (τ_1 is in a varying state, $\tau_2 = 70$ ms). The time delay τ_1 is, in order: (a) $\tau_1 = 70$ ms ; (b) $\tau_1 = 75$ ms ; (c) $\tau_1 = 80$ ms ; (d) $\tau_1 = 85$ ms ; (e) $\tau_1 = 90$ ms . The coupling strength M_1 is 0.005, M_2 is 0.0053; the correlation rate q is 0.2; the noise intensity D is 10^{-4}

图 14. 双时间延迟之间差值不同(τ_1 处于变化状态, $\tau_2 = 70$ ms)的情况下耦合神经元的相位差。时间延迟 τ_1 依次为: (a) $\tau_1 = 70$ ms ;(b) $\tau_1 = 75$ ms ;(c) $\tau_1 = 80$ ms ;(d) $\tau_1 = 85$ ms ;(e) $\tau_1 = 90$ ms 。耦合强度为 $M_1 = 0.005$, $M_2 = 0.0053$; 相互关联度为 $q = 0.2$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$

当 $M_1 = 0.01$ 时, 此时 M_1 与 M_2 之间的差值增大到了 0.0047。如图 15(b)所示, 耦合神经元还是处于相位漂移的状态, 但是与 M_1 、 M_2 的差值只有 0.0003 时相比, 神经元的振荡周期变大了一些, 并且在每个放电尖峰处, 神经元 x_1 与 x_2 的尖峰挨得更近了, 也就是说耦合神经元增加了相位同步性。这反映在图 16(b)中就是: 相位差在零附近以线条或点的形式波动, 但零相位差值附近的点和线条较图 16(a)明显地增多了。

当 $M_1 = 0.04$ 时, 此时 M_1 与 M_2 差值为 0.0347。较前面两种情况, 两个耦合强度之间的差值显著提升, 这种情况下, 在两个耦合强度中, M_1 占主导地位。如图 15(c)所示, 耦合神经元依然处于相位漂移状态, 但是与前面我们讨论过的两种情况相比, 出现了一个新状况: 在每个振荡周期内, 耦合神经元放电会产

生双尖峰。此时，耦合神经元的振荡周期变得更长，约为 M_1 、 M_2 差值是 0.0047 时的振荡周期的两倍，并且耦合神经元之间的整体相位同步性较 M_1 、 M_2 差值小时有着进一步提高。这反映在图 16(c)中就是：相位差在零附近以线条或点的形式波动，零相位差值附近的点和波浪曲线较图 16(b)分布得更为密集。

从上面的分析中我们可得出以下结果：在双耦合强度的差值从较小值逐渐增大到其中一个耦合强度占主导地位的过程中，耦合神经元始终处于相位漂移状态，但是增大双耦合强度的差值会使得相位漂移状态的振荡周期变大，并且耦合神经元之间的整体相位同步性也会增强。

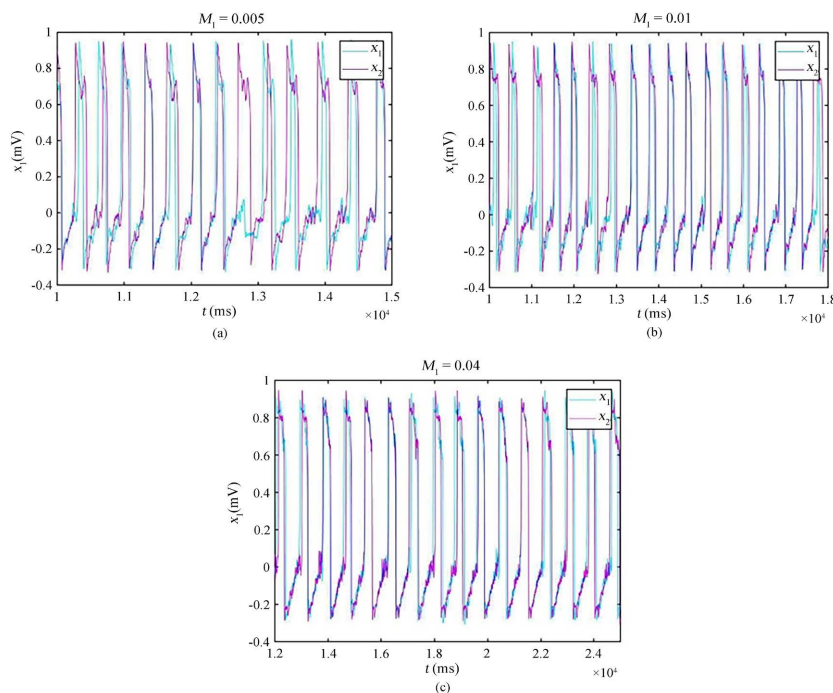


Figure 15. The effect of the difference between two coupling strengths on phase synchronization of the coupled neurons due to the time delay at two delays $\tau_1 = 80 \text{ ms}, \tau_2 = 70 \text{ ms}$. The coupling strength M_2 is set as 0.0053, and the coupling strength M_1 is, in order: (a) $M_1 = 0.005$; (b) $M_1 = 0.01$; (c) $M_1 = 0.04$. The correlation rate q is 0.2; the noise intensity D is 10^{-4}

图 15. 双耦合强度之间的差值对具有双时间延迟($\tau_1 = 80 \text{ ms}, \tau_2 = 70 \text{ ms}$)的耦合神经元的相位同步的影响。固定耦合强度 $M_2 = 0.0053$ ，耦合强度 M_1 依次为：(a) $M_1 = 0.005$ ；(b) $M_1 = 0.01$ ；(c) $M_1 = 0.04$ 。相互关联度为 $q = 0.2$ ；噪声强度为 $D = 10^{-4}$

4. 总结

在很多种生物系统和物理系统中都会有高斯色噪声[12] [30] [31] [32]。高斯色噪声有很多参数在神经网络系统中都是必要的特征，比如噪声强度 D 、耦合神经元之间的相互关联度 q 、耦合强度 M 、时间延迟 τ ，根据实际需要，耦合强度分为单耦合强度和多耦合强度，时间延迟分为单时间延迟和多时间延迟。在本节中，我们通过分析单个神经元放电的局部峰值和产生的峰峰间隔研究了耦合神经元系统中由单时延引起的放电模式变化；通过分析两个神经元的相位差研究了耦合神经元系统中由双时延引起的相位同步变化。与高斯色噪声有关的这些参数对耦合神经元的放电模式和相位同步有着很大影响。

我们首先研究了在单时延 $\tau_1 = 80 \text{ ms}$ 的背景下，高斯色噪声对耦合神经元放电模式的影响，具体涉及到三个参数：噪声强度 D 、耦合强度 M_1 和相互关联度 q 。用控制变量的方法分别探究了这三个与高斯色噪声有关的参数对神经元放电的作用与影响，经过探究我们得知：噪声强度 D 和相互关联度 q 都是

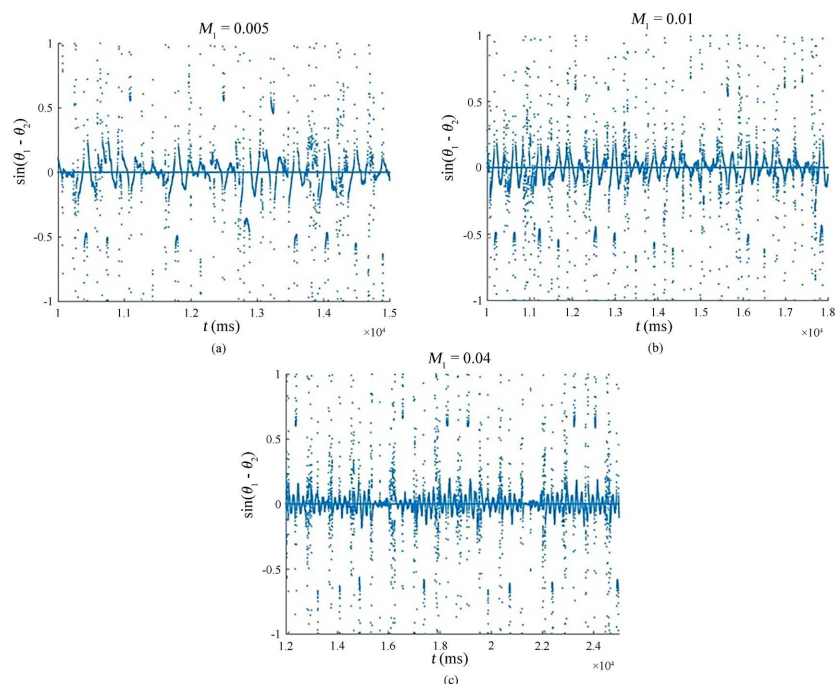


Figure 16. The phase difference of the coupled neurons in the case of different differences between two coupling strengths due to the time delay at two delays $\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms. The coupling strength M_2 is set as 0.0053, and the coupling strength M_1 is, in order: (a) $M_1 = 0.005$; (b) $M_1 = 0.01$; (c) $M_1 = 0.04$. The correlation rate q is 0.2; the noise intensity D is 10^{-4} .

图 16. 双耦合强度之间差值不同的情况下具有双时间延迟($\tau_1 = 80$ ms, $\tau_2 = 70$ ms)的耦合神经元的相位差。固定耦合强度 $M_2 = 0.0053$, 耦合强度 M_1 依次为: (a) $M_1 = 0.005$; (b) $M_1 = 0.01$; (c) $M_1 = 0.04$ 。相互关联度为 $q = 0.2$; 噪声强度为 $D = 10^{-4}$ 。

通过改变神经元放电所产生的峰之间的间隔来影响神经元的放电模式的, 这两个参数对峰峰间隔的影响相似: 都是当参数渐次连续增大时, ISI 值会变多; 在参数增大的过程中, 都会出现 ISI 值整体上明显下降的情况, 然后继续增大参数到某值, ISI 就会主要集中在两个值附近。从总体上来说, 连续增大噪声强度 D 和相互关联度 q 会使峰峰间距呈相似规律地减小。耦合强度 M_1 是通过改变神经元放电过程中的局部峰值来影响神经元的放电模式的, M_1 值越大, 则神经元放电过程中出现的不同局部峰值越多。

进一步我们研究了在双时延和双耦合的背景下, 相互关联度 q 和噪声强度 D 对耦合神经元相位同步的影响, 还研究了双时延的差值以及双耦合强度的差值对相位同步的作用与影响。探究每一种因素的作用与影响时, 我们采用了控制变量的方法, 即固定住其他参数的值, 只改变当下要研究的参量的值。通过探究我们得知: 相互关联度 q 和噪声强度 D 都从较小值逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况相同, 即都是交替的同步和异步状态 \rightarrow 异步状态 \rightarrow 相位漂移和反相位状态的共存或交替; 双时延的差值从零逐渐增大的过程中, 耦合神经元的相位变化情况是: 异步状态 \rightarrow 相位漂移和反相位状态共存或交替 \rightarrow 相位漂移状态; 双耦合强度的差值从较小值逐渐增大的过程中, 耦合神经元始终处于相位漂移状态, 但是其整体的相位同步性会增强。

参考文献

- [1] 赵小燕, 宋绍丽, 魏春玲, 等. 神经放电节律加周期分岔序列中的簇放电到峰放电的转迁[J]. 生物物理学报, 2010, 26(1): 61-72.

- [2] 程元芬, 刘深泉. 哺乳动物皮层神经元模型的放电模式研究[J]. 中国医学物理学杂志, 2019, 36(7): 846-852.
- [3] 雷锦志. 系统生物学: 建模, 分析, 模拟[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2010.
- [4] 胡守仁, 余少波, 戴葵. 神经网络导论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
- [5] 汪小京. 计算神经科学与类脑人工智能[N]. 科学时报, 2015-8-15(008).
- [6] 沈政, 方方, 杨炯炯. 认知神经科学导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010: 55-72.
- [7] 汪小京. 21 世纪中国计算神经科学展望[N]. 科学时报, 2010-8-25(003).
- [8] 鹿露露. 神经元及其网络系统的非线性随机动力学研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2021.
- [9] 王青云, 石霞, 陆启韶. 神经元耦合系统的同步动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [10] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [11] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [12] 邬开俊, 王春丽, 单亚洲, 等. 噪声作用下的化学突触耦合神经元系统的同步[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017, 47(5): 231-237.
- [13] 范德军, 洪灵. 具有时滞的突触耦合的 FHN 神经元模型的 Hopf 分岔分析[C]//中国力学学会. 第十三届全国非线性振动暨第十届全国非线性动力学和运动稳定性学术会议摘要集. 2011: 564-574.
- [14] Wang, H.X., Wang, Q.Y. and Lu, Q.S. (2013) Equilibrium Analysis and Phase Synchronization of Two Coupled HR Neurons with Gap Junction. *Cognitive Neurodynamics*, **7**, 121-131. <https://doi.org/10.1007/s11571-012-9222-0>
- [15] 杨雨潼, 刘深泉. FHN-ML 电耦合神经元的发放模式和分岔分析[J]. 中国医学物理学杂志, 2017, 34(3): 306-313.
- [16] 林楚衍. 两类神经元模型的动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2015.
- [17] 汪净. 神经元模型的放电特性与相位同步现象[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2017.
- [18] 王海侠, 陆启韶. 神经元耦合系统同步条件的几点注记[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(3): 320-323.
- [19] Wu, K.J., Wang, T.J., et al. (2018) Study on Electrical Synapse Coupling Synchronization of Hindmarsh-Rose Neurons under Gaussian White Noise. *Neural Computing and Applications*, **30**, 551-561. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2681-1>
- [20] 王朝庆, 徐伟, 张娜敏, 等. 色噪声激励下的 FHN 神经元系统[J]. 物理学报, 2016, 57(2): 749-755.
- [21] 张静静, 靳艳飞. 非高斯噪声激励下 FitzHugh-Nagumo 神经元系统的随机共振[J]. 物理学报, 2012, 61(13): 36-42.
- [22] Guo, Y.F., Xi, B., Wei, F., et al. (2018) The Mean First-Passage Time in Simplified FitzHugh-Nagumo Neural Model Driven by Correlated Non-Gaussian Noise and Gaussian Noise. *Modern Physics Letters B*, **32**, Article ID: 1850339. <https://doi.org/10.1142/S0217984918503396>
- [23] Honeycutt, R.L. (1992) Stochastic Runge-Kutta Algorithms. II. Colored Noise. *Physical Review A*, **45**, 604-610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.604>
- [24] Zhao, Y., Xu, W. and Zou, S.C. (2009) The Steady State Probability Distribution and Mean First Passage Time of FHN Neural System Driven by Non-Gaussian Noise. *Acta Physica Sinica*, **58**, 1396-1402. <https://doi.org/10.7498/aps.58.1396>
- [25] Wu, D. and Zhu, S.Q. (2007) Stochastic Resonance in a Bistable System with Time-Delayed Feedback and Non-Gaussian Noise. *Physics Letters A*, **363**, 202-212. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.11.006>
- [26] Fuentes, M.A., Toral, R. and Wio, H.S. (2001) Enhancement of Stochastic Resonance: The Role of Non-Gaussian Noises. *Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications*, **295**, 114-122. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00062-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00062-0)
- [27] Luo, X. and Zhu, S. (2003) Stochastic Resonance Driven by Two Different Kinds of Colored Noise in a Bistable System. *Physical Review E: Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, **67**, Article ID: 021104. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.021104>
- [28] 吴福彪. 静息电位、动作电位的产生机制及影响其大小的主要因素[J]. 生物学教学, 2009, 34(7): 62-63.
- [29] Izhikevich, E.M. (2007) *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA. <https://doi.org/10.7551/mitpress/2526.001.0001>
- [30] Hirsch, M.W., Smale, S. and Devaney, R.L. (2004) *Differential Equations Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, Cambridge, MA.
- [31] Strogatz, S.H. (2000) Nonlinear Dynamics and Chaos. *Journal of Statistical Physics*, **78**, 163-178.
- [32] Sun, X.J. and Lu, S.J. (2014) Non-Gaussian Colored Noise Optimized Spatial Coherence of a Hodgkin-Huxley Neuronal Network. *Chinese Physics Letters*, **31**, 13-15. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/31/2/020502>