Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 1558-1566
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114170

Hans汉斯

Chordal Ring图$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$的交叉数

刘新瑶

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年3月12日；录用日期：2022年4月5日；发布日期：2022年4月14日

摘 要

图的交叉数是图论中重要的一个分支，国内外诸多学者对图的交叉数这一问题进行广泛的关注和深入的研究。Garey和Johnson证明了确定图的交叉数问题是NP-完全问题，因此图的交叉数目问题仍然值得研究。但是由于探究和证明难度比较大，国内外对图的交叉数目问题的研究进展比较缓慢。至今为止，图的交叉数的研究成果集中在典型图类上，只得到了较少图族交叉数的精确值。本文主要采用数学归纳法和反证法研究了Chordal Ring图$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$的交叉数。对于Chordal Ring图$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$，给出一个交叉数为$2k$的好的画法，从而确定Chordal Ring图$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$的上界。采用数学归纳法，以$k=2$时，$cr\left(CR_{16}\left(1,3,9\right)\right)=4$为基础，假设$k-1$时，不等式$cr\left(CR_{8k}\left(1,3,9\right)\right)\ge 2\left(k-1\right)$成立。采用反证法，将$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$的边集分为不相交的$2k$组，讨论所有可能情形，证明了Chordal Ring图$CR_{8k}\left(1,3,9\right)$的下界。因此证明了：$cr\left(CR_{8k}\left(1,3,9\right)\right)=2k\left(k\ge 2\right)$。

关键词

交叉数，图，画法

The Crossing Number of Chordal Ring Graphs $CR_{8k}\left(1,3,9\right)$

Xinyao Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 12th, 2022; accepted: Apr. 5th, 2022; published: Apr. 14th, 2022

Abstract

The crossing number of graphs is an important branch of graph theory. Many scholars at home

文章引用: 刘新瑶. Chordal Ring 图 $CR_{8k}\left(1,3,9\right)$ 的交叉数[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 1558-1566.
DOI: 10.12677/aam.2022.114170

and abroad have paid extensive attention to and studied the crossing number of graphs. Garey and Johnson proved that the problem of determining the number of intersects of graphs is NP-complete, so the problem of the number of intersects of graphs is still worth studying. However, due to the difficulty of exploration and proof, the research on the crossing number of graphs is slow at home and abroad. So far, the research results of graph crossing number focus on typical graph class, and only get the exact crossing numbers of very few families graphs. In this paper, a crossing number of chordal ring graphs $CR_{8k}(1,3,9)$ are studied by mathematical induction and reduction. The upper bound of chordal ring graph $CR_{8k}(1,3,9)$ is determined. By mathematical induction, on the basis of $k=2$, $cr(CR_{16}(1,3,9))=4$, and assuming $k-1$, the inequality is valid for $cr(CR_{8(k-1)}(1,3,9))\geq 2(k-1)$. In this paper, the edge set of $CR_{8k}(1,3,9)$ is divided into $2k$ groups with no intersection by the method of inverse proof, all possible cases are discussed, and the lower bound of $CR_{8k}(1,3,9)$ of chordal ring graph is proved. It is thus proved that: $cr(CR_{8k}(1,3,9))=2k(k\geq 2)$.

Keywords

Crossing Number, Graph, Drawing

1. 交叉数的研究进展

1.1. 六边形图

王晶等人[1]证明了六边形图的 $H_{3,n}$ 的交叉数，并给出了关于 $H_{m,n}$ 交叉数的猜想：

$$cr(H_{m,n})=(m-2)n.$$

历莹[2]的论文里证明了：

$$cr(H_{4,2})=2n(n\geq 2).$$

1.2. Knödal 图 $W_{3,n}$

邓成瑞[3]证明了 Knödal 图 $W_{3,n}$ 的交叉数为：

$$\begin{cases} cr(W_{3,8})=0; cr(W_{3,10})=1; \\ cr(W_{3,n})=\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor+\dfrac{n \bmod 6}{2}, n\geq 12. \end{cases}$$

1.3. Chordal Ring 图 $CR_n(x,y,z)$

Javaid 等人[4]证明了 $CR_n(1,3,5)$ 的交叉数：

$$\begin{cases} cr\left(CR_n(1,3,5)\right)=0, n\equiv 0(\bmod 4); \\ cr\left(CR_n(1,3,5)\right)=1, n\equiv 2(\bmod 4). \end{cases}$$

郑文萍等人[5]证明了 $cr\left(CR_{10}(1,3,7)\right)=1$，$cr\left(CR_n(1,3,7)\right)=\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor+(n\bmod 6)/2$ （$n\geq 12$ 且 n 为偶数）。

Muhammad Imran 等人[6]提出 $CR_n(1,3,9)$ 的上界($n\geq 12$ 且 n 为偶数)：

$$cr\left(CR_n(1,3,9)\right)\leq \begin{cases} \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+(n\bmod 4), n\equiv 0,6(\bmod 8); \\ \frac{n}{3}+3, n\equiv 4(\bmod 8); \\ \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil+(n\bmod 4), n\equiv 2(\bmod 8). \end{cases}$$

同时 Muhammad Imran 等人证明了 $cr\left(CR_{10}(1,3,9)\right)=1$，$cr\left(CR_{12}(1,3,9)\right)=2$，$cr\left(CR_{14}(1,3,9)\right)=1$，$CR_{16}(1,3,9)=4$，$cr\left(CR_{18}(1,3,9)\right)=4$，$cr\left(CR_{20}(1,3,9)\right)=4$，$cr\left(CR_{22}(1,3,9)\right)=5$，给出了 $CR_{8k}(1,3,9)$ 的好的画法，确定了其交叉数的下界，$cr\left(CR_{8k}(1,3,9)\right)\leq 2k$；证明了 $cr\left(CR_{8k}(1,3,9)\right)=2k\,(k\geq 2)$。但是我们发现文献里 $CR_{8k}(1,3,9)$ 的证明过程中少讨论一些情形，存在几处漏洞。因此本文证明 $cr\left(CR_{8k}(1,3,9)\right)=2k\,(k\geq 2)$。

2. Chordal Ring 图 $CR_{8k}(1,3,9)$ 的交叉数

2.1. Chordal Ring 图 $CR_{8k}(1,3,9)$

为了便于书写，下文将 Chordal Ring 图 $CR_{8k}(1,3,9)$ 记为 G_k，G_k 的顶点集和边集为：$V(G_k)=V\cup U$，其中 $V=\left\{v_{i/2}:i\in\mathbb{Z}_{8k}\text{且}i\text{是偶数}\right\}$，$U=\left\{v_{(i-1)/2}:i\in\mathbb{Z}_{8k}\text{且}i\text{是奇数}\right\}$，

$$E(G_k)=\bigcup_{i=0}^{4k-1}\{v_iu_i,v_iu_{i+1},v_iu_{i+4}\}.$$

将 G_k 的边集合分成 $4k$ 个互不相交的子集，对于 $0\leq i\leq 4k-1$，令 $E_i=\{v_iu_i,v_iu_{i+1},v_iu_{i+4}\}$。如果本文不特别指出，每个顶点的下标模 $8k$。对于 $0\leq i\leq 4k-1$，每个 E_i 都是 $E(G_k)$ 的一部分，那么可以得到 $E(G_k)=\bigcup_{i=0}^{4k-1}E_i$，$E_i\cap E_j=\varnothing$，其中 $0\leq i\neq j\leq 4k-1$。令 D 是 G_k 的一个好的画法，用 $f_D(E_i)$ ($0\leq i\leq 4k-1$)表示计算在画法 D 下与 E_i 相关的交叉点数目的函数，

$$f_D(E_i)=cr\left(E_i,E(G_k)-E_i\right)/2$$

$$cr(D)=\sum_{i=0}^{4k-1}f_D(E_i).$$

对于 G_k 的一个好的画法 D，记 l_i^D 是满足 $\sum_{j=0}^{l_i-1}f_D\left(E_{i+j}\right)\geq 0.5l_i$ 的最小正整数，其中 $0\leq i\leq 4k-1$。当 $i\leq j$ 时，$H_{i,j}=\bigcup_{k=1}^{j}E_k$，$0\leq i\leq 4k-1$。

令 $C_i=v_iu_{i+1}v_{i+1}u_{i+2}v_{i+2}u_{i+3}v_{i+3}u_{i+4}v_i$，$0\leq i\leq 4k-1$。令 $B_i=\bigcup_{k=i}^{i+3}\{v_ku_{k+1}\}$。$Q_i=u_iv_iu_{i+1}$，设 C_i 将平面分为 $intC_i$ 和 $extC_i$ 两个等价区域。

2.2. G_k 交叉数的上界

引理 2.1 对于 $k\geq 2$，$cr(G_k)\leq 2k$。

证明：如图 1 所示，给出了 G_k 的一个只有 $2k$ 个交叉数的好画法。

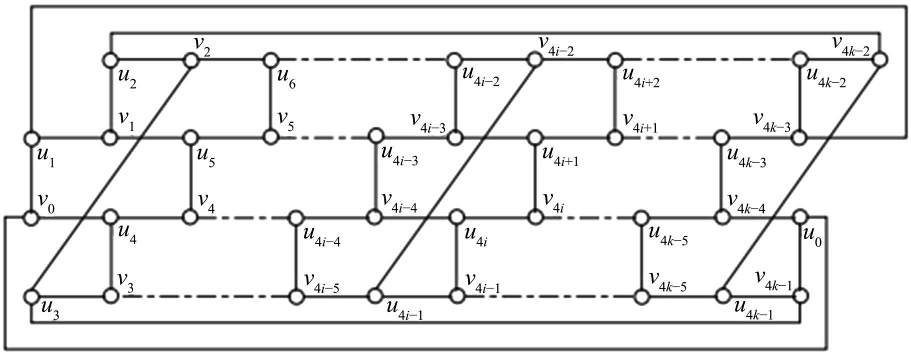

Figure 1. A good drawing of G_k
图 1. G_k 的一个好的画法

2.3. G_k 交叉数的下界

2.3.1. G_2 交叉数

引理 2.2 $cr(G_2)=4$。

证明：图 G_2 与图 $H_{4,2}$ 同构，如图 2 和图 3 所示，定义映射 f 如下，$f(v_4)=a_0$，$f(u_4)=a_1$，$f(v_0)=a_2$，$f(u_0)=a_3$，$f(u_5)=b_0$，$f(v_1)=b_1$，$f(u_1)=b_2$，$f(v_5)=b_3$，$f(v_6)=c_0$，$f(u_2)=c_1$，$f(v_2)=c_2$，$f(u_6)=c_3$，$f(u_7)=d_0$，$f(v_3)=d_1$，$f(u_3)=d_2$，$f(v_7)=d_3$。在历莹[2]的文章中，证明了 $cr(H_{4,2})=4$，因此 $cr(G_2)=4$。

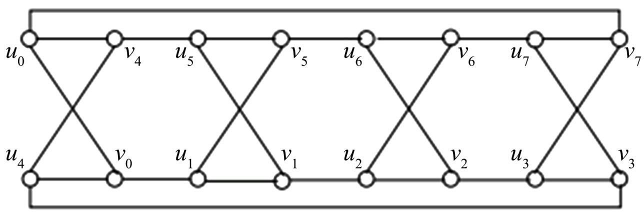

Figure 2. A good drawing of G_2
图 2. G_2 的一个好的画法

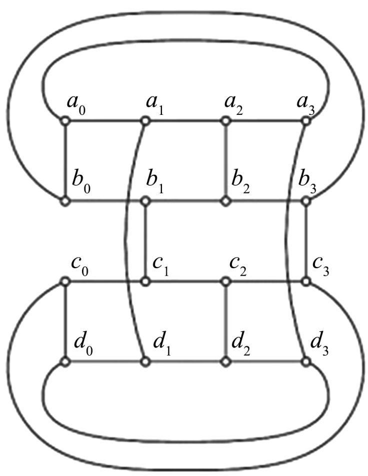

Figure 3. A good drawing of $H_{4,2}$
图 3. $H_{4,2}$ 的一个好的画法

2.3.2. G_k 交叉数的下界证明

引理 2.3 设 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D)<2k$，$k\ge 3$。则

$$cr_D(B_i)+cr_D(B_i,E(G_k)-B_i)\le 1,\quad 0\le i\le 4k-1。$$

证明：反证法。不失一般性，令 $cr_D(B_0)+cr_D(B_0,E(G_k)-B_0)\ge 2$，设在画法 D 中删掉 B_i 得到画法 D^*，则 $cr(D^*)\le cr(D)-2$。由于 D^* 是 G_{k-1} 的一个细分图的好的画法，由 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$ 得 $cr(D^*)\ge 2(k-1)$，所以有 $cr(D)\ge cr(D^*)+2\ge 2k$，产生矛盾。因此 $cr_D(B_i)+cr_D(B_i,E(G_k)-B_i)\le 1$ 得证。

引理 2.4 设 C 和 C' 是图 G_k 中的两个圈，P_t 是图 G_k 中的一条以 v_1 和 v_t 为端点的路径，D 是 G_k 的一个好的画法，且 $V(C)\cap V(C')=\varnothing$，$V(C)\cap V(P_t)=\varnothing$。若 C 和 C' 相交，则 $cr_D(E(C),E(C'))=2k$，$k\ge 1$。在画法 D 下，若 P_t 与 C 相交，如果 v_1 和 v_t 位于 $D(C)$ 的同一区域，则 $cr_D(E(C),E(P_t))=2k$，$k\ge 1$；如果 v_1 和 v_t 位于 $D(C)$ 的不同区域，则 $cr_D(E(C),E(P_t))\ge 1$。

引理 2.5 设 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D)<2k$，$k\ge 3$。若 $f_D(E_i)=0$，$cr_D(H_{i,i+3})=1$ 且 $u_i,u_{i+5},u_{i+6},u_{i+7}$ 在 $D(H_{i,i+3})$ 的不同区域中，则 $l_i^D\le 4$，$0\le i\le 4k-1$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0)=0$，$cr_D(H_{0,3})=1$，u_0,u_5,u_6,u_7 在 $D(H_{0,3})$ 的不同区域，令 $Q=v_4u_5v_5u_6v_6u_7\cup P_3(u_7,v_{4k-1})\cup v_{4k-1}u_0\cup P_4(v_4,u_0)$。$V(Q)\cap V(H_{0,3})=\{u_0,u_5,u_6,u_7\}$，$E(Q)\cap E(H_{0,3})=\varnothing$，由引理 2.4 知，$cr_D(E(Q),E(H_{0,3}))\ge 2$，且 $cr_D(H_{0,3})=1$，因此 $l_0^D\le 4$。

引理 2.6 设 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D)<2k$，$k\ge 3$。若 $f_D(E_i)=0$，$cr_D(E_{i+1},E_{i+2})=1$，则 $l_i^D\le 5$，$0\le i\le 4k-1$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0)=0$，$cr_D(E_1,E_2)=1$，$l_0^D>5$。由引理 2.5 知，同构意义下 $D(H_{0,3})$ 只存在八种可能的画法，如图 4 所示。

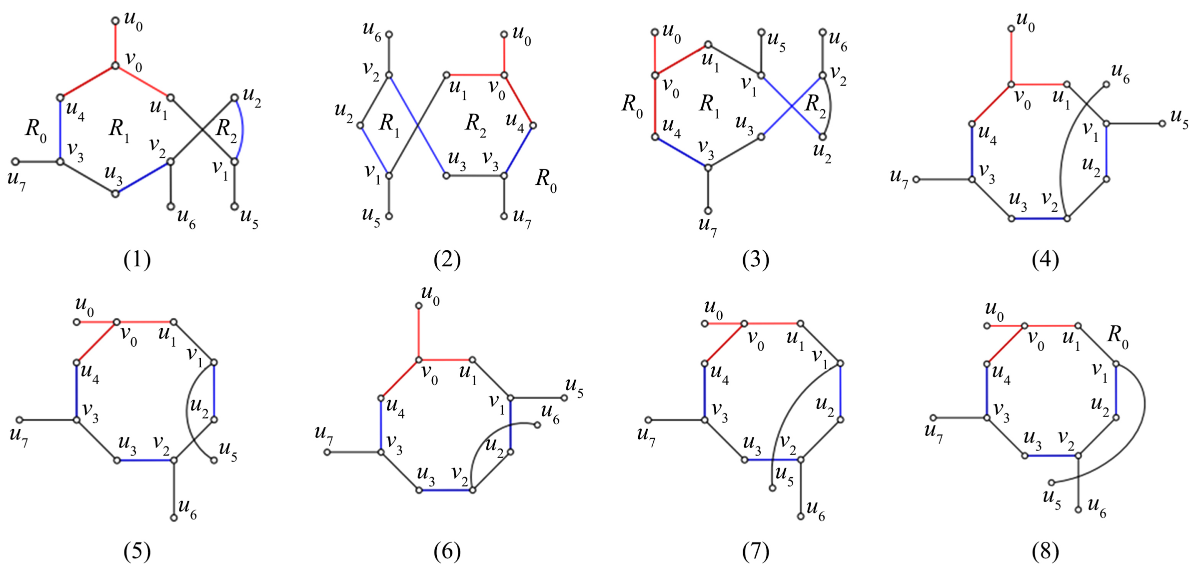

Figure 4. $cr_D(E_1,E_2)=1$

图 4. $cr_D(E_1,E_2)=1$

引理 2.7 设 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D)<2k$，$k\ge 3$。若 $f_D(E_i)=0$，$cr_D(E_{i+2},E_{i+3})=1$，则 $l_i^D\le 8$，$0\le i\le 4k-1$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0)=0$，$cr_D(E_2,E_3)=1$，$l_0^D>8$。由引理 2.5 知，同构意义下 $D(H_{0,3})$ 只存在八种可能的画法，如图 5 所示。

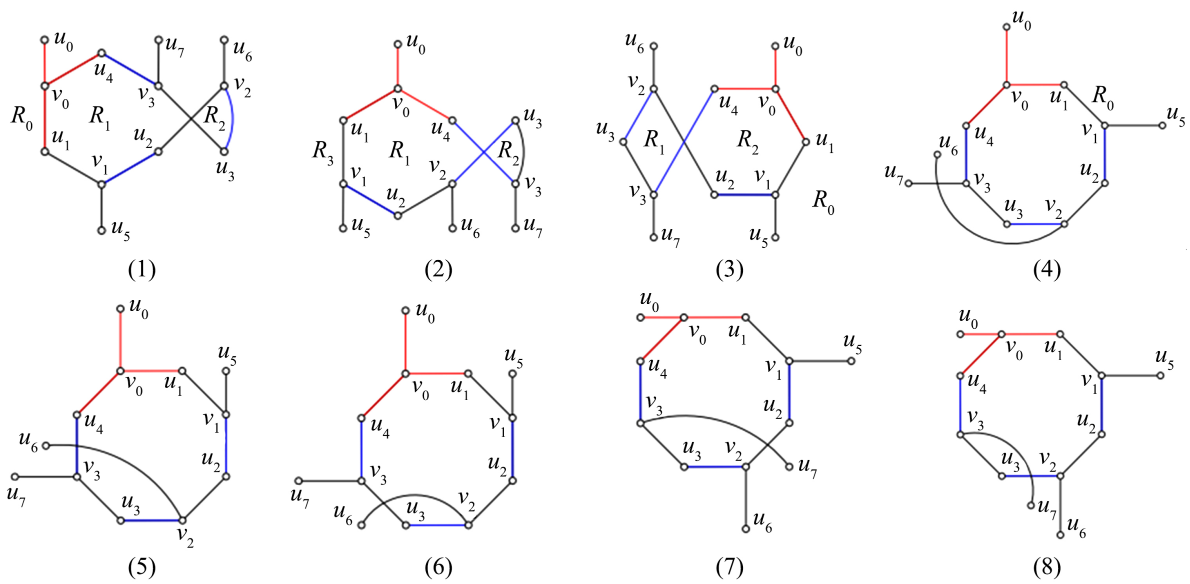

Figure 5. $cr_D(E_2,E_3)=1$

图 5. $cr_D(E_2,E_3)=1$

引理 2.8 设 $cr(G_{k-1})\ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D)<2k$，$k\ge 3$。若 $f_D(E_i)=0$，$cr_D(E_{i+1},E_{i+3})=1$，则 $l_i^D\le 12$，$0\le i\le 4k-1$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0)=0$，$cr_D(E_1,E_3)=1$，$l_0^D>12$。由引理 2.5 知，同构意义下 $D(H_{0,3})$ 只存在八种可能的画法，如图 6 所示。

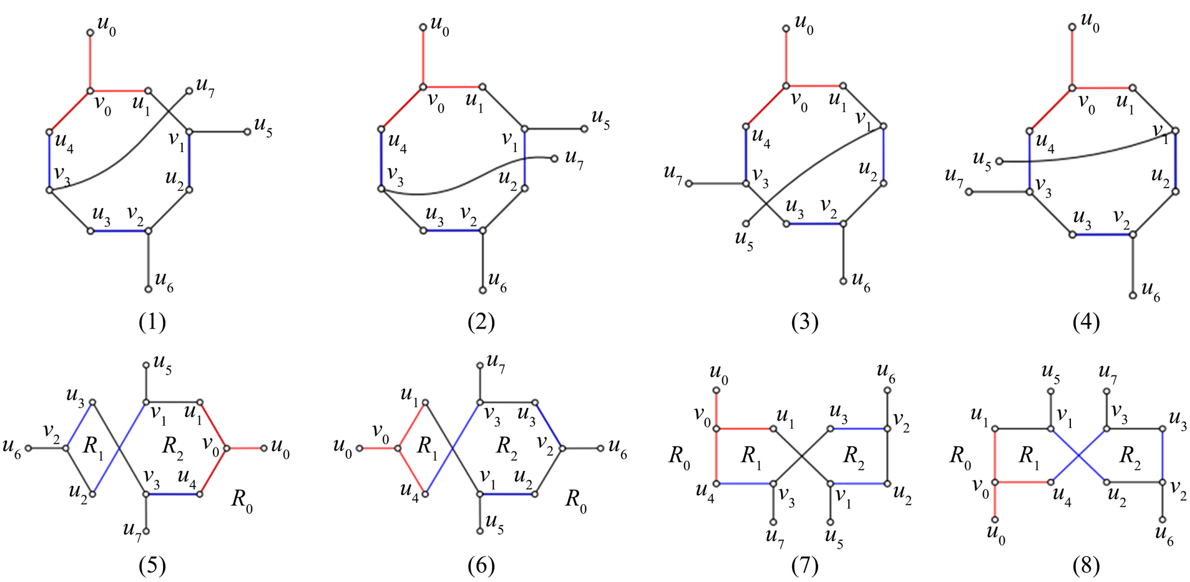

Figure 6. $cr_D(E_1,E_3)=1$

图 6. $cr_D(E_1,E_3)=1$

DOI: 10.12677/aam.2022.114170

引理 2.9 设 $cr(G_{k-1}) \ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D) < 2k$，$k \ge 3$。若 $f_D(E_i) = 0$，$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 两点在 $intC_i$，两点在 $extC_i$，则 $l_i^D \le 5$，$0 \le i \le 4k-1$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0) = 0$，$cr_D(H_{0,3}) = 0$，$l_0^D > 5$。且 u_0, u_5, u_6, u_7 两点在 $intC_0$，两点在 $extC_0$，同构意义下 $D(H_{0,3})$ 只存在三种可能的画法，如图 7 所示。

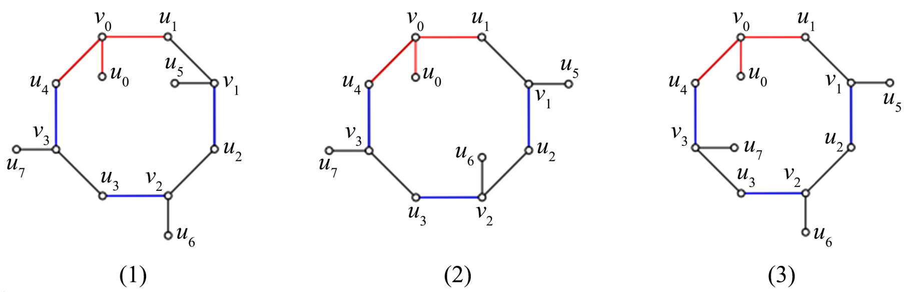

Figure 7. u_0, u_5, u_6, u_7 two vertices $intC_0$ two vertices $extC_0$

图 7. u_0, u_5, u_6, u_7 两点在 $intC_0$ 两点在 $extC_0$

引理 2.10 设 $cr(G_{k-1}) \ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D) < 2k$，$k \ge 3$，若 $f_D(E_i) = 0$，$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 一点在 $intC_i$，三点在 $extC_i$，则 $l_i^D \le 12$。

证明：反证法。不失一般性，假设 $f_D(E_0) = 0$，$cr_D(H_{0,3}) = 0$，$l_0^D > 12$。且 u_0, u_5, u_6, u_7 一点在 $intC_0$，三点在 $extC_0$，同构意义下 $D(H_{0,3})$ 只存在四种可能的画法，如图 8 所示。

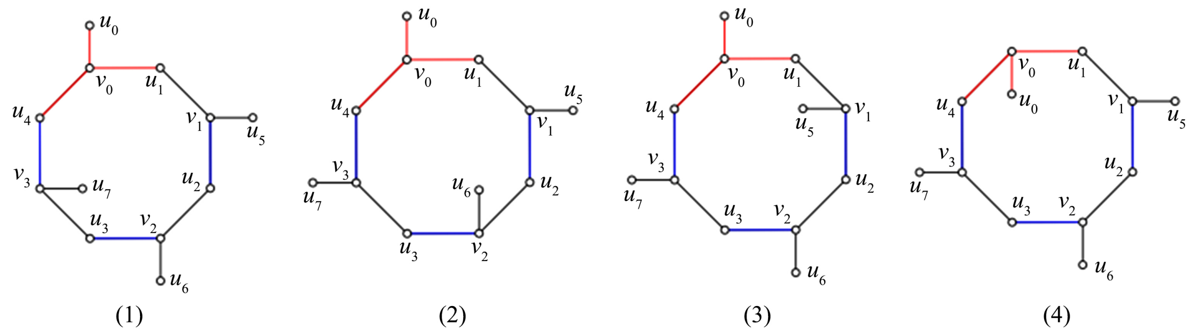

Figure 8. u_0, u_5, u_6, u_7 one vertice $intC_0$ three vertices $extC_0$

图 8. u_0, u_5, u_6, u_7 一点在 $intC_0$ 三点在 $extC_0$

引理 2.11 设 $cr(G_{k-1}) \ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D) < 2k$，$k \ge 3$，若 $f_D(E_i) = 0$，$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 在 $extC_i$，则 $l_i^D \le 12$。

引理 2.12 假设对于有序数对 (i, j)，$0 \le i \ne j \le 4k-1$，存在图 G_k 的一个自同构映射 $\varnothing_{i,j}$ 满足 $\varnothing_{i,j}(E_{i+m}) = E_{j+m}$，$0 \le m \le 4k-1$。令 D 是图 G_k 的一个好的画法，c 是一个正常量。若对于 $0 \le i \le 4k-1$，$f_D(E_i) < c$，则存在一个正整数 $l\,(2 \le l \le 4k)$，$\sum_{j=0}^{l-1} f_D(E_{i+j}) \ge lc$，则 $cr(D) \ge 4ck$。

证明：若对于任意的 $i\,(0 \le i \le 4k-1)$，有 $f_D(E_i) \ge c$，则 $cr(D) \ge 4ck$ 得证；

若存在 $i\,(0 \le i \le 4k-1)$，使得 $f_D(E_i) < c$，设 n_i 是满足 $\sum_{j=0}^{l-1} f_D(E_{i+j}) \ge lc$ 中最小的 l。令 n_{i_0} 是所有 n_i 中最大的数，若 n_{i_0} 不唯一，则任选它们其中一个，不失一般性，假设 $i_0 = 0$。按以下的规则将 $E_i\,(0 \le i \le 4k-1)$ 从 E_0 开始升序排列：

1) 设 $E_0, E_1, \cdots, E_{n_0-1}$ 为第一组；

2) 令 $n_0 = i$，则 i 是未分组子集 E_j 中下标最小的数。若 $f_D(E_i) < c$，则 $E_i, E_{i+1}, \cdots, E_{i+n_i-1}$ 为第二组。否则令 E_i 自己为第二组；

3) 对于剩余未分组的 E_j，按照方法 2)继续分组。当分组结束后，每个 E_i 仅属于一个分组里。设 M 是 $f_D(E_j) < c$ 中最大的 $j(0 \le j \le 4k-1)$ 且 g_M 为包含 E_M 的分组。由 n_{i_0} 的定义可知，E_0 不在 g_M 中(否则由规则 2)得到 $n_M \ge n_{i_0}$，与 n_{i_0} 的定义发生矛盾)。所以，每个 E_i 仅属于一个分组。

通过上面的方式进行分组，每一组 E_i 的平均交叉数至少是 c，并且每个 E_i 仅属于一个分组，因此 $cr(D) \ge 4ck$ 得证。

定理 2.13 设 $cr(G_{k-1}) \ge 2(k-1)$，D 是 G_k 的一个好的画法，$cr(D) < 2k$，$k \ge 3$。对任意一个 $i(0 \le i < j \le 4k-1)$，若 $f_D(E_i) < 0.5$，一定有以下四个结论之一：

a) $l_i^D \le 4$；

b) $l_i^D \le 5$；

c) $l_i^D \le 8$；

d) $l_i^D \le 12$。

证明：当 $f_D(E_i) < 0.5$ 时，若 $cr_D(H_{i,i+3}) = 1$，由引理 2.5，结论 a 成立；

若 $cr_D(E_{i+1}, E_{i+2}) = 1$，$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 两点在 $intC_i$，两点在 $extC_i$，由引理 2.6 和 2.9，结论 b 成立；

若 $cr_D(E_{i+2}, E_{i+3}) = 1$，由引理 2.7，结论 c 成立；

若 $cr_D(E_{i+1}, E_{i+3}) = 1$、$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 一点在 $intC_i$，三点在 $extC_i$、$cr_D(H_{i,i+3}) = 0$ 且 $u_i, u_{i+5}, u_{i+6}, u_{i+7}$ 在 $extC_i$，由引理 2.8，引理 2.10，引理 2.11，可得结论 d 成立。

所以定理 2.13 得证。

定理 2.14 $k \ge 2$ 时，$cr(G_k) \ge 2k$。

证明：通过对 k 的归纳证明 G_k 交叉数的下界。

当 $k = 2$ 时，由文献[2]知，G_2 的交叉数是 2；

假设 $k-1(k \ge 3)$ 时，不等式 $cr(G_{k-1}) \ge 2(k-1)$ 成立，下证 $cr(G_k) \ge 2k$。

假设 $cr(G_k) < 2k$，G_k 中的边集分为互不相交的 $4k$ 组 E_i，对于任意序数对 (i, j)，$0 \le i < j \le 4k-1$，存在图 G_k 的一个自同构映射 $\varnothing_{i,j}$，满足 $\varnothing_{i,j}(E_{i+m}) = E_{j+m}$，这里 $0 \le m \le 4k-1$。

情形 1：若任意 $i(0 \le i < j \le 4k-1)$，$f_D(E_i) \ge 0.5$，则 $cr(G_k) = \sum_{i=0}^{4k-1} f_D(E_i) \ge 2k$，与假设矛盾，因此假设不成立，$cr(G_k) \ge 2k$，定理得证。

情形 2：若存在 $i(0 \le i < j \le 4k-1)$，$f_D(E_i) < 0.5$，可得定理 2.13，再根据引理 2.12，c 取 0.5，可得 $cr(G_k) \ge 2k$，与假设矛盾，因此 $cr(G_k) \ge 2k$，定理得证。

3. 结论

本文通过分支限界法证明 Chordal Ring 图 $CR_{8k}(1,3,9)(k \ge 2)$ 的交叉数，给出相应图的好的画法，从而确定所研究图的上界。采用数学归纳法、反证法证明其交叉数的下界至少是 $2k$，与假设矛盾，因此可以确定 Chordal Ring 图 $CR_{8k}(1,3,9)(k \ge 2)$ 的交叉数是 $2k$。即 $cr(CR_{8k}(1,3,9)) = 2k(k \ge 2)$。

参考文献

[1] Wang, J., Ouyang, Z. and Huang, Y. (2019) The Crossing Number of the Hexagonal Graphs $H_{3,n}$. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **39**, 547-554. https://doi.org/10.7151/dmgt.2092

[2] 历莹. 一类无限图的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.

[3] 邓成瑞. $W_{3,n}$ 和 $K_m \square C_n$ 的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2006.

[4] Javaid, I., Ismail, A., Salman, M., Ahmad, A. and Slamin, S. (2013) Labeling of Chordal Rings. *Utilitas Mathematica*, **90**, 61-75.

[5] Zheng, W., Lin, X., Yang, Y. and Deng, C. (2008) The Crossing Number of Knödal Graph $W_{3,n}$. *Utilitas Mathematica*, **75**, 211-224.

[6] Imran, M., *et al.* (2015) The Crossing Number of Chordal Ring Networks. *Periodica Mathematica Hungarica*, **71**, 193-209. https://doi.org/10.1007/s10998-015-0097-9