Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(5), 2703-2710**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115286

Hans汉斯

非局部两分量耦合复可积无色散方程的孤子解

付晨晨

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年4月20日；录用日期：2022年5月15日；发布日期：2022年5月23日

摘　要

本文提出了一种非局部两分量耦合复可积无色散方程。利用达布变换方法得到了零种子解和非零种子解两种情况下，非局部两分量耦合复可积无色散方程的孤子解。

关键词

非局部两分量耦合复可积无色散方程，达布变换，孤子解

Soliton Solutions of Nonlocal Two-Component Coupled Complex Integrable Dispersionless Equations

Chenchen Fu

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 20th, 2022; accepted: May 15th, 2022; published: May 23rd, 2022

Abstract

In this paper, a nonlocal two-component complex coupled integrable dispersionless equation is proposed. The soliton solutions of nonlocal two-component coupled complex integrable dispersionless equations are obtained by using darboux transformation method under two cases of zero seed solution and non-zero seed solution.

文章引用: 付晨晨. 非局部两分量耦合复可积无色散方程的孤子解[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 2703-2710.
DOI: 10.12677/aam.2022.115286

Keywords

The Nonlocal Two-Component Complex Coupled Integrable Dispersionless Equations, Darboux Transformation, Soliton Solutions

1. 引言

耦合可积无色散(CID)系统

$$q_{xt} = \rho q\text{，}\quad \rho_t + qq_x = 0 \tag{1}$$

是由 Konno 和 Oono 提出的[1]。因为它是一个优质的可积系统[2]，所以引起了人们对该系统的研究热情。并且它在物理应用方面有很多应用[3]，例如，它可以描述三维欧几里德空间中电流与外部磁场的相互作用。接着 Hirota、Tsujimoto [4]、Ishimori [5]成功地将 CID 系统转化为 Sin-Gordon 方程。并且在[6]中证明了复的 CID 系统

$$q_{xt} = \rho q\text{，}\quad \rho_t + \frac{\left(|q|^2\right)_x}{2} = 0 \tag{2}$$

等效于 Pohlmeyer-Lund-Regge 模型的规范。在[7]中，用 IST 方法研究了其柯西问题。实际上，实的 CID 系统(1)和复的 CID 系统(2)都是一般 CID 系统

$$q_{xt} = \rho q\text{，}\quad p_{xt} = \rho p\text{，}\quad \rho_t + \frac{(pq)_x}{2} = 0 \tag{3}$$

在 $p = q$ 和 $p = q^*$ 的特殊情况。一般 CID 系统在群里论点[8]中被提出，它的孤子解也应用 IST 方法被求出。随着一些非线性方程的怪波解的出现[9] [10] [11] [12] [13]，复 CID 系统(2)的怪波解也被求出。实际上，实 CID 系统(1)和复 CID 系统(2)都可以转化为实短脉冲方程和复短脉冲方程[14] [15] [16]，该方程可以描述超短脉冲在光纤中的传播。利用相应的速矢图变换，还可以从复 CID 系统的解中得到复短脉冲方程的一些孤子解[17] [18]。值得一提的是，多分量的复 CID 系统可以转化成

$$\begin{gathered} q_{j,xt} = \rho q_j, j = 1,2,\cdots,n \\ \rho_t + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j \left|q_j\right|^2\right)_x = 0\text{，} \end{gathered} \tag{4}$$

可以转化成多分量的短脉冲方程。

关于两分量复的 CID 系统

$$\begin{gathered} q_{1,xt} = \rho q_1\text{，}\quad q_{2,xt} = \rho q_2 \\ \rho_t + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 |q_1|^2 + \varepsilon_2 |q_2|^2\right)_x = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

的研究，也有了一些新的孤子解。例如，在背景解消失时的多峰孤子波解，这种解是局域波解，其振幅在传播过程中呈现周期性变化，同时它的呼吸 II-型解、共振解、半有理性确定性奇异波解也相应被求出。

近年来，非局部可积方程引起了人们的广泛关注。非局部 CID 系统的对称性得到了证明，同时逆时空非局部 CID 系统的保对称不稳定孤子解以及经典 CID 系统的稳定孤子解都已经被求出。文献[19]构造了非局部 Sine-Gordon 方程的 N-次 Darboux 变换，得到了该方程的多孤子解。并且文献[19]中还提到了非局部复的耦合无色散(CCD)方程。本文主要研究的是两分量复的 CID 系统(5)在 $q_1^* = q_1^*(-x,-t)$，$q_2^* = q_2^*(-x,-t)$ 时得到的非局部两分量复 CID 系统：

$$q_{1,xt} = \rho q_1$$

$$q_{2,xt} = \rho q_2$$

$$\rho_t + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 q_1 q_1^*(-x,-t) + \varepsilon_2 q_2 q_2^*(-x,-t)\right)_x = 0 \tag{6}$$

在第二节中，构造非局部两分量复 CID 系统的达布变换(DT)，它是构造可积系统解的一种有效方法。在第三节中，利用 1-次 DT，得到了在非局部两分量复 CID 系统(6)中的孤子解。

2. 非局部两分量复 CID 系统的 Darboux 变换

在本节中，我们将构造非局部两分量复 CID 系统的达布变换(DT)。

令

$$R = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -\varepsilon_2 q_2^*(-x,-t) & \varepsilon_1 q_1^*(-x,-t) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 q_1^*(-x,-t) & -q_2 \\ \varepsilon_2 q_2^*(-x,-t) & q_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

I_2 是二阶单位矩阵(*表示复共轭)。方程(6)的 Lax 对表示为：

$$\Phi_x = U\Phi, \quad U = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -i\rho I_2 & -R_x \\ Q_x & i\rho I_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad V = \frac{i\lambda}{4}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & R \\ Q & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 λ 为光谱参数，$\Phi = \Phi(x,t;\lambda) = (\phi_1,\cdots,\phi_4)^{\mathrm{T}}$ (T 表示矩阵转置)。

如果 $\Phi(x,t;\lambda_i)$ 是 $\lambda = \lambda_i$ 处 Lax 对(8)的列向量特征函数，此时很容易验证

$$\Psi(-x,-t;\lambda_i) = \begin{pmatrix} \phi_2^*(-x,-t;\lambda_i) \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_1^*(-x,-t;\lambda_i) \\ \varepsilon_1\phi_4^*(-x,-t;\lambda_i) \\ -\varepsilon_2\phi_3^*(-x,-t;\lambda_i) \end{pmatrix}$$
是 $\lambda = -\lambda_i^*$ 的 Lax 对(8)的列向量特征函数。为了方便起见，我们用 $\Phi(\lambda_i)$，$\Psi(\lambda_i)$，$\phi_l(\lambda_i)$ 分别表示 $\Phi(x,t;\lambda_i)$，$\Psi(-x,-t;\lambda_i)$，$\phi_l(x,t;\lambda_i)$。

方程 Lax 对(8)的伴随问题是

$$\theta_x = -\theta U(-\lambda) = \theta M\left[U(\lambda^*)\right]^\dagger M$$

$$\theta_t = -\theta V(-\lambda) = \theta M\left[V(\lambda^*)\right]^\dagger M \tag{9}$$

其中 $M = diag(1,\varepsilon_1\varepsilon_2,-\varepsilon_1,-\varepsilon_2)$，(†表示矩阵的复共轭转置)，同时能够证明 $\theta(x,t;\lambda_i^*) = \Phi(\lambda_i)^\dagger M$ 是 $\lambda = \lambda_i^*$ 时(9)的解。

根据构造 Darboux 变换(DT)的过程，我们得到了 lax 对的一阶 Darboux 变换

$$\Phi[1] = T\Phi = \Phi - \eta W^{-1}\Omega(\eta,\Phi) = \left(I + \eta W^{-1}\eta^\dagger M\right)\Phi \tag{10}$$

其中

$$\eta=\left(\Phi(\lambda_1),\Psi(\lambda_1)\right),\ W=\Omega(\eta_1,\eta_1),\ \Omega(\eta,\Phi)=\Omega(\eta_1,\Phi)$$

$$\Omega(\eta_i,\eta_j)=\begin{pmatrix}\dfrac{\Phi(\lambda_i)^\dagger M\Phi(\lambda_j)}{\lambda_i^*-\lambda_j} & \dfrac{\Phi(\lambda_i)^\dagger M\Psi(\lambda_j)}{\lambda_i^*+\lambda_j^*}\\ \dfrac{\Psi(\lambda_i)^\dagger M\Phi(\lambda_j)}{-\lambda_i-\lambda_j} & \dfrac{\Psi(\lambda_i)^\dagger M\Phi(\lambda_j)}{-\lambda_i+\lambda_j^*}\end{pmatrix},\ \Omega(\eta_i,\Phi)=\begin{pmatrix}\dfrac{\Phi(\lambda_i)^\dagger M\Phi(\lambda)}{\lambda_i^*-\lambda}\\ \dfrac{\Psi(\lambda_i)^\dagger M\Phi(\lambda)}{-\lambda_i-\lambda}\end{pmatrix}$$

变换(10)是非局部两分量复 CID 系统及其 Lax 对(8)的 Darboux 变换，变换后的谱问题和时间演化方程为

$$\Phi[1]_x=U[1]\Phi[1],\ U[1]=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}-i\rho[1]I_2 & -R[1]_x\\ Q[1]_x & i\rho[1]I_2\end{pmatrix}$$

$$\Phi[1]_t=V[1]\Phi[1],\ V[1]=\frac{i\lambda}{4}\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix}+\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & R[1]\\ Q[1] & 0\end{pmatrix}\tag{11}$$

其中

$$\begin{pmatrix}0 & R[1]\\ Q[1] & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & R\\ Q & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left[\eta W^{-1}\eta^\dagger M,\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\right]\tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}-i\rho[1]I_2 & -R[1]_x\\ Q[1]_x & i\rho[1]I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\rho I_2 & -R_x\\ Q_x & i\rho I_2\end{pmatrix}+\left(\eta W^{-1}\eta^\dagger M\right)_x\tag{13}$$

$q_1[1]$，$q_2[1]$，$\rho[1]$和q_1，q_2，ρ之间的关系是

$$q_1[1]=q_1-\frac{\varepsilon_1\left(\lambda_1^*-\lambda_1\right)a_1}{\phi_1\phi_1^*(-x,-t)+\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\phi_2^*(-x,-t)-\varepsilon_1\phi_3\phi_3^*(-x,-t)-\varepsilon_2\phi_4\phi_4^*(-x,-t)}$$

$$q_2[1]=q_2-\frac{\varepsilon_2\left(\lambda_1^*-\lambda_1\right)a_2}{\phi_1\phi_1^*(-x,-t)+\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\phi_2^*(-x,-t)-\varepsilon_1\phi_3\phi_3^*(-x,-t)-\varepsilon_2\phi_4\phi_4^*(-x,-t)}$$

$$\rho[1]=\rho+i\left(\lambda_1^*-\lambda_1\right)\left(\frac{a_3}{\phi_1\phi_1^*(-x,-t)+\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\phi_2^*(-x,-t)-\varepsilon_1\phi_3\phi_3^*(-x,-t)-\varepsilon_2\phi_4\phi_4^*(-x,-t)}\right)_x\tag{14}$$

其中：

$$a_1=-\varepsilon_2\phi_4\phi_2^*(-x,-t)-\phi_1\phi_3^*(-x,-t),\ \ a_2=\varepsilon_1\phi_3\phi_2^*(-x,-t)-\phi_1\phi_4^*(-x,-t),$$
$$a_3=\phi_1\phi_1^*(-x,-t)+\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\phi_2^*(-x,-t)。$$

3. 非局部两分量复 CID 系统的孤子解

本节利用达布变换得到了不同条件下非局部两分量复 CID 系统的孤子解，并分析它们的渐进行为。

3.1. 种子解为零时非局部两分量复 CID 系统的解

为了得出孤子解的显示表达式，我们取种子解解$q_1=0$，$q_2=0$和$\rho=\rho_0$，(ρ_0是常数)将该解代入Lax对(8)可得出

$$\phi_1 = c_1 \mathrm{e}^{\bar{w}_1}, \quad \phi_2 = c_2 \mathrm{e}^{\bar{w}_1}, \quad \phi_3 = c_3 \mathrm{e}^{-\bar{w}_1}, \quad \phi_4 = c_4 \mathrm{e}^{-\bar{w}_1} \tag{15}$$

其中：$\bar{w}_1 = -i\frac{\rho_0}{\lambda_1}x + \frac{i\lambda_1}{4}t$，$\bar{w}_1^* = i\frac{\rho_0}{\lambda_1}x - \frac{i\lambda_1}{4}$。

令 $a_1 = -\varepsilon_2 c_4 c_2^* \mathrm{e}^{\bar{w}_1^* - \bar{w}_1} - c_1 c_3^* \mathrm{e}^{\bar{w}_1 - \bar{w}_1^*}$，$a_2 = \varepsilon_1 c_3 c_2^* \mathrm{e}^{\bar{w}_1^* - \bar{w}_1} - c_1 c_4^* \mathrm{e}^{\bar{w}_1 - \bar{w}_1^*}$，$a_3 = \left(|c_1|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 |c_2|^2\right)\mathrm{e}^{\bar{w}_1^* + \bar{w}_1}$。

将其代入(14)可得出孤子解为：

$$q_1[1] = 2i\lambda_{1I} \frac{\varepsilon_1 a_1}{\left(|c_1|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2|c_2|^2\right)\mathrm{e}^{\bar{w}_1^* + \bar{w}_1} + \left(\varepsilon_1|c_3|^2 + \varepsilon_2|c_4|^2\right)\mathrm{e}^{-\left(\bar{w}_1^* + \bar{w}_1\right)}}$$

$$q_2[1] = 2i\lambda_{1I} \frac{\varepsilon_2 a_2}{\left(|c_1|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2|c_2|^2\right)\mathrm{e}^{\bar{w}_1^* + \bar{w}_1} + \left(\varepsilon_1|c_3|^2 + \varepsilon_2|c_4|^2\right)\mathrm{e}^{-\left(\bar{w}_1^* + \bar{w}_1\right)}}$$

$$\rho[1] = \rho_0 + 2i\lambda_{1I}\left(\frac{a_3}{\left(|c_1|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2|c_2|^2\right)\mathrm{e}^{\bar{w}_1^* + \bar{w}_1} + \left(\varepsilon_1|c_3|^2 + \varepsilon_2|c_4|^2\right)\mathrm{e}^{-\left(\bar{w}_1^* + \bar{w}_1\right)}}\right)_x \tag{16}$$

当 $\left(|c_1|^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2|c_2|^2\right)\left(\varepsilon_1|c_3|^2 + \varepsilon_2|c_4|^2\right) > 0$ 时这些解是非奇异的。当 c_j 全不为 0 时，式(16)中的分量 q_1 和 q_2 都是沿 $\theta_{1R} = 0$ 传播的局域波，具有周期性现象，可称为多峰孤子波。

3.2. 种子解不为零时非局部两分量复 CID 系统的解

容易验证非局部的两分量 CID 系统有平面波解 $\rho = \rho_0$、$q_1 = r_1\mathrm{e}^{(k_1x - w_1t)}$、$q_2 = r_2\mathrm{e}^{(k_2x - w_2t)}$，其中 $\rho_0 = -k_i w_i$，r_1, r_2，ρ_0 都是常数，在这个种子解下，为了求解线性微分方程(1.7)，对 Φ 作变换

$$\tilde{\Phi} = Q\Phi$$

$$Q = diag\left(1, \mathrm{e}^{(k_1x - w_1t) + (k_1x - w_1t)}, \mathrm{e}^{(k_1x - w_1t)}, \mathrm{e}^{(k_2x - w_2t)}\right) \tag{17}$$

则 $\tilde{\Phi}$ 满足，如下常系数的微分方程

$$\tilde{\Phi}_x = \tilde{U}\tilde{\Phi}$$

$$\tilde{\Phi}_t = \tilde{V}\tilde{\Phi} \tag{18}$$

其中

$$\tilde{U} = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -i\rho_0 & 0 & -k_1r_1 & -k_2r_2 \\ 0 & -i\rho_0 + \lambda(k_1 + k_2) & k_2r_2\varepsilon_2 & -k_1r_1\varepsilon_1 \\ k_1r_1\varepsilon_1 & -k_2r_2 & i\rho_0 + \lambda k_1 & 0 \\ k_2r_2\varepsilon_2 & k_1r_1 & 0 & i\rho_0 + \lambda k_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{i\lambda}{4} & 0 & \frac{ir_1}{2} & \frac{ir_2}{2} \\ 0 & \frac{i\lambda}{4} - w_1 - w_2 & -\frac{i}{2}r_2\varepsilon_2 & \frac{i}{2}r_1\varepsilon_1 \\ \frac{i}{2}r_1\varepsilon_1 & -\frac{ir_2}{2} & \frac{i\lambda}{4} - w_1 & 0 \\ \frac{i}{2}r_2\varepsilon_2 & \frac{ir_1}{2} & 0 & \frac{i\lambda}{4} - w_2 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\tilde{V}$ 的特征方程是

$$Det\left[\tau I_4-\tilde{V}\right]=0 \tag{19}$$

其中四个特征根是 $\tau_j, j=1,2,3,4$ 。

当 $k_1=k_2$， $w_1=w_2$时，则特征方程(21)为

$$\frac{b_1b_2}{256}=0 \tag{20}$$

其中

$$b_1=\left(\lambda_1+4i\tau\right)\left(\lambda_1-4i\tau-4iw\right)+4\left(r_1^2\varepsilon_1+r_2^2\varepsilon_2\right)$$

$$b_2=\left(\lambda_1+4i\tau+8iw_1\right)\left(\lambda_1-4i\tau-4iw\right)+4\left(r_1^2\varepsilon_1+r_2^2\varepsilon_2\right) \tag{21}$$

当 $b_1=0$ 时我们能得出方程的特征根是 $\tau_j=\dfrac{-2w_1\pm\sqrt{\left(2w_1+i\lambda_1\right)^2-4\left(r_1^2\varepsilon_1+r_2^2\varepsilon_2\right)}}{4}, j=1,2$ 它对应的特征向量是 $v_j=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{2r_1\varepsilon_1}{\lambda_1-4i\tau_j-4iw_1} & \dfrac{2r_2\varepsilon_2}{\lambda_1-4i\tau_j-4iw_1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 。当 $b_2=0$ 时我们能得出方程的特征根是 $\tau_l=\dfrac{-6w_1\pm\sqrt{\left(2w_1-i\lambda_1\right)^2-4\left(r_1^2\varepsilon_1+r_2^2\varepsilon_2\right)}}{4}, l=3,4$， 它对应的特征向量是 $v_j=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dfrac{-2r_2}{\lambda_1-4i\tau_j-4iw_1} & \dfrac{2r_1}{\lambda_1-4i\tau_j-4iw_1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

令 $v=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{pmatrix}$，则可以得出 λ_1 对应的线性问题(8)的通解是

$$\Phi\left(\lambda_1\right)=Q^{-1}vC \tag{22}$$

其中：

$$C=\begin{pmatrix}c_1\mathrm{e}^{\theta_1} & c_2\mathrm{e}^{\theta_2} & c_3\mathrm{e}^{\theta_3} & c_4\mathrm{e}^{\theta_4}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \theta_j=m_jx+\tau_jt,\quad m_k=\frac{\lambda_1k_1-2i\left(\rho_0-2i\tau_k\right)}{2\lambda_1}, k=1,2$$

$$m_l=\frac{3\lambda_1k_1-2i\left(4kw+\rho_0+2k\tau_k\right)}{2\lambda_1}, l=3,4$$

则可以的得出特征函数是

$$\Phi=\begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{\theta_1}+c_2\mathrm{e}^{\theta_2} \\ \mathrm{e}^{-2xk_1+2tw_1}\left(c_3\mathrm{e}^{\theta_3}+c_4\mathrm{e}^{\theta_4}\right) \\ \dfrac{c_1\mathrm{e}^{\theta_1}r_1\varepsilon_1}{l_1}+\dfrac{c_2\mathrm{e}^{\theta_2}r_1\varepsilon_1}{l_2}+r_2\left(-\dfrac{c_3\mathrm{e}^{\theta_3}}{l_3}-\dfrac{c_4\mathrm{e}^{\theta_4}}{l_4}\right) \\ \dfrac{c_1\mathrm{e}^{\theta_1}r_2\varepsilon_2}{l_1}+\dfrac{c_2\mathrm{e}^{\theta_2}r_2\varepsilon_2}{l_2}+r_1\left(-\dfrac{c_3\mathrm{e}^{\theta_3}}{l_3}-\dfrac{c_4\mathrm{e}^{\theta_4}}{l_4}\right)\end{pmatrix} \tag{23}$$

其中 $l_j=\lambda-4iw_1-4i\tau_j, j=1,2,3,4$ 。

将其代入(14)可得出孤子解为

$$p[1]=\mathrm{e}^{k_1x-tw_1}-\frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_4\bar{g}_2-\varepsilon_1\phi_1\bar{g}_3}{d}$$

$$q[1]=\mathrm{e}^{k_1x-tw_1}-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_3\bar{g}_2-\varepsilon_1\phi_1\bar{g}_4}{d}$$

$$\rho[1]=\rho_0+I\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\bar{g}_2+\phi_1\bar{g}_1}{d}\right)_x \tag{24}$$

其中 $d=-\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\phi_2\bar{g}_2+\phi_1\bar{g}_1+\varepsilon_1\phi_3\bar{g}_3+\varepsilon_2\phi_4\bar{g}_4\right)/2i\lambda_I$ 。当 $d\neq 0$ 时这些解是非奇异的。当 c_j 不全为 0 时，式(24)中的分量 q_1 和 q_2 也都是孤子波。

4. 结论

本文研究的是非局部两分量复 CID 系统。我们给出了该方程的 Lax 对，并构造了其达布变换，利用 Darboux 的方法考虑零和非零种子解两种情况，得出非局部两分量复 CID 方程的孤子解。

参考文献

[1] Konno, K. and Oono, H. (1994) New Coupled Integrable Dispersionless Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, **63**, 377-378. https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.377

[2] Alagesan, T. and Porsezian, K. (1996) Painleve Analysis and the Integrability Properties of Coupled Integrable Dispersionless Equations. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **7**, 1209-1212. https://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00108-5

[3] Kakuhata, H. and Konno, K. (1999) Loop Soliton Solutions of String Interacting with External Field. *Journal of the Physical Society of Japan*, **68**, 757-762. https://doi.org/10.1143/JPSJ.68.757

[4] Hirota, R. and Tsujimoto, S. (1994) Note on New Coupled Integrable Dispersionless Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, **63**, 3533. https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.3533

[5] Konno, K. and Oono, H. (1994) Reply to Note on New Coupled Integrable Dispersionless Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, **63**, 3534. https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.3534

[6] Kotlyarov, V.P. (1994) On Equations Gauge Equivalent to the Sine-Gordon and Pohlmeyer-Lund-Regge Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, **63**, 3535-3537. https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.3535

[7] Konno, K. (1995) Integrable Coupled Dispersionless Equations. *Applicable Analysis*, **57**, 209-220. https://doi.org/10.1080/00036819508840347

[8] Kakuhata, H. and Konno, K. (1996) A Generalization of Coupled Integrable Dispersionless System. *Journal of the Physical Society of Japan*, **65**, 340-341. https://doi.org/10.1143/JPSJ.65.340

[9] Peregrine, D.H. (1983) Water Waves, Nonlinear Schrödinger Equations and Their Solutions. *The ANZIAM Journal*, **25**, 16-43. https://doi.org/10.1017/S0334270000003891

[10] Akhmediev, N., Ankiewicz, A. and Soto-Crespo, J.M. (2009) Rogue Waves and Rational Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation. *Physical Review E*, **80**, Article ID: 026601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.026601

[11] Akhmediev, N., Ankiewicz, A. and Taki, M. (2009) Waves That Appear from Nowhere and Disappear without a Trace. *Physics Letters A*, **373**, 675-678. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.12.036

[12] Ankiewicz, A., Kedziora, D.J. and Akhmediev, N. (2011) Rogue Wave Triplets. *Physics Letters A*, **375**, 2782-2785. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.05.047

[13] Yan, Z.Y. (2010) Financial Rogue Waves. *Communications in Theoretical Physics*, **54**, 947-949. https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/5/31

[14] Yoshimasa, M. (2007) Multiloop Soliton and Multibreather Solutions of the Short Pulse Model Equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, **76**, Article ID: 084003. https://doi.org/10.1143/JPSJ.76.084003

[15] Feng, B.F. (2015) Complex Short Pulse and Coupled Complex Short Pulse Equations. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **297**, 62-75. https://doi.org/10.1016/j.physd.2014.12.002

[16] Shen, S.F., Feng, B.F. and Ohta, Y. (2016) From the Real and Complex Coupled Dispersionless Equations to the Real and Complexshort Pulse Equations. *Studies in Applied Mathematics*, **136**, 64-88. https://doi.org/10.1111/sapm.12092

[17] Ling, L., Feng, B.F. and Zhu, Z.N. (2016) Multi-Soliton, Multi-Breather and Higher Order Rogue Wave Solutions to the Complex Short Pulse Equation. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **327**, 62-75. https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.03.012

[18] Feng, B.F., Ling, L. and Zhu, Z.N. (2016) Defocusing Complex Short-Pulse Equation and Its Multi-Dark-Soliton Solution. *Physical Review E*, **93**, Article ID: 052227. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.052227

[19] Ji, J.L., Huang, Z.L. and Zhu, Z.N. (2017) Reverse Space and Time Nonlocal Coupled Dispersionless Equation and Its Solutions. *Annals of Mathematical Sciences and Applications*, **2**, 409-429. https://doi.org/10.4310/AMSA.2017.v2.n2.a8