Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(5), 3175-3184
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115336

Hans汉斯

一类非散度型退化抛物方程源项反演问题

依力哈木江·依木马

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年4月27日；录用日期：2022年5月21日；发布日期：2022年5月31日

摘　要

利用终端观测值，研究了非散度型退化抛物方程中重构源项的反问题。基于最优控制理论，将反问题转换为了最优控制问题。建立了控制泛函极小元的存在性和必要条件，并由必要条件得到了最优问题的局部唯一性和稳定性。

关键词

反问题，非散度型退化抛物型方程，最优控制，存在性，唯一性，稳定性

Inversion Problem of Source Term for a Class of Degenerate Parabolic Equations with Non-Divergent Form

Yilihamujiang·Yimamu

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 27th, 2022; accepted: May 21st, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

Using terminal observations, the inverse problem of reconstructing source terms in non-divergent degenerate parabolic equations is studied. Based on optimal control theory, the inverse problem is transformed into an optimal control problem. The existence and necessary conditions of control

文章引用: 依力哈木江·依木马. 一类非散度型退化抛物方程源项反演问题[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 3175-3184.
DOI: 10.12677/aam.2022.115336

functional are established. The local uniqueness and stability of the optimal problem are obtained from the necessary conditions.

Keywords

Inverse Problem, Non-Divergent Degenerate Parabolic Equation, Optimal Control, Existence, Uniqueness, Stability

1. 引言

偏微分方程[1]是描述和刻画物理过程、系统状态、社会与生物现象的有力工具。由给定的方程、定解区域以及相应的初、边值条件确定方程的解，即偏微分方程正问题，偏微分方程的反问题[2] [3]是指已知或部分已知方程的解反求方程中的未知量。正问题与反问题是相互依存、相互决定的。与前者相比，大多数反问题都是不适定[4] [5]的。近年来，反问题在应用数学领域迅速发展，并在医疗、物理、信号探测、金融衍生品定价等方面都有重要的应用。

许多学者用不同的方法研究了经典抛物方程系数识别问题。相比之下，研究非散度型退化抛物方程系数反演问题的文献却甚少。这类方程在实际工业以及金融数学上有着重要的作用。与经典抛物方程相比，退化抛物方程的主要困难在于主系数的退化性，即使初始值和系数是足够光滑的函数，也可能导致相应解没有足够的正则性。在文献[6]，作者研究了在以下退化抛物方程中确定源项 g 的反问题

$$u_t-\left(a\left(x\right)u_x\right)_x=g\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in Q=\left(0,1\right)\times\left(0,T\right]$$

解的唯一性和 Lipschitz 稳定性由全局 Carleman 估计得到。在[7]中，类似的方法被应用于气候演化领域中出现的非线性反系数问题，其中假设扩散系数在区域的两端都消失。基础模型退化的最重要的反问题可能是 Black-Scholes 方程中局部波动率的重构。在[8] [9] [10] [11]中，作者已经仔细考虑了从当前期权市场价格中识别隐含波动率的逆问题，基于最优控制框架，得到了反问题的存在性、唯一性和适定算法。在文献[12]，作者致力于在电磁理论的框架内研究具有缺陷的磁致弹性层的正向和反向散射问题。根据缺陷轮廓上的位移场，针对透磁和不透磁缺陷，建立了边界积分方程的耦合系统，为了识别缺陷的位置和大小，利用拟牛顿迭代法开发了一种有效的数值算法。在文献[13]，作者通过考虑一些额外的数据在一维抛物线方程中识别退化扩散系数的反问题，通过能量方法证明了在某个时刻已知内部数据来识别扩散系数的唯一性和 Lipschitz 稳定性。对于退化抛物方程，文献[14]研究了一个从最终温度分布信息恢复源温度的反问题，首先通过积分变换和刘维尔定理(复分析)来确定该反问题的唯一性。借助积分恒等式，进一步构造了反问题的 Lipschitz 稳定性。最后，给出了几个数值实验证明算法的准确性和高效性。在文献[15]，作者考虑了分数阶扩散方程的初始条件的识别问题。基于特征函数展开，证明了有界时空域上强解的唯一存在性，根据观察算子的紧致性解释了反问题的不适定性。采用拉普拉斯变换技术和解析延拓法证明反问题的唯一性。鉴于反问题的不适定性，作者转而考虑 Tikhonov 型优化问题，并借助变分伴随技术，采用共轭梯度法求解优化问题。在这篇文章中，主要讨论了一类非散度型退化抛物方程源项识别问题。该源项系数在实际应用中扮演着重要的角色。这个问题可以用以下形式表述：

问题 P：考虑如下非散度型退化抛物方程：

$$\begin{cases} u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = \lambda(x,t)g(x), \ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \ x \in \Omega = [0,1], \end{cases} \tag{1}$$

其中 $g(x)$ 是未知源项， $a(x)$， $b(x)$， $c(x)$， $\lambda(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 是给定的光滑函数，并且满足：

$$a(0) = a(1) = 0, \ a > 0, x \in (0,1),$$

$$\left[b(x) - \frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x} \right] \Bigg|_{x=0,x=1} = 0, \ c(x) > 0, \ \lambda(x,t) > 0, \ f(x,t) = \lambda(x,t)g(x)$$

假设已知附加条件：

$$u(x,T) = \kappa(x). \tag{2}$$

接下来将根据(1)和(2)来确定 u 和 g。

2. 最优控制问题

一般地，唯一性在反问题中占有举足轻重的地位，它决定了额外条件是否足以识别未知信息。推导唯一性的工具有很多，如能量估计、积分方程、Carleman 估计等。值得一提的是，Carleman 估计是推导反问题的唯一性和 Lipschitz 稳定性的有效工具。但不幸的是，它无法处理反问题 P 等终端控制问题。故本文将考虑问题 P 的正则化。在此之前，先对正问题加以讨论并给出一些基本定义、引理和估计。

定义 1. $\mathcal{B}$ 是 $C_0^\infty(Q)$ 关于下列范数的闭包：

$$\|u\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_0^T \int_0^1 a(x)\left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \ u \in \mathcal{B}.$$

定义 2. 函数 $u(x,t)$ 是方程(1)的弱解，如果 $u \in C\left([0,T]; L^2(0,1) \cap \mathcal{B}\right)$，并且对任意 $\psi \in L^\infty\left((0,T); L^2(0,1) \cap \mathcal{B}\right)$， $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(Q)$， $\psi(\cdot,T) = 0$，有以下等式成立：

$$\int_0^T \int_0^1 \left[-u\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x(a\psi)_x - u(b\psi)_x + cu\psi \right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(x)\psi(\cdot,0)\mathrm{d}x = \int_0^T \int_0^1 f\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3}$$

定理 1. 对于任意给定的 $f \in L^\infty(Q)$， $\varphi \in L^\infty(0,1)$，存在(1)的唯一弱解且满足以下估计：

$$\max_{0 \le t \le T} \int_0^1 u^2 \mathrm{d}x + \int_0^t \int_0^1 a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\left(\int_0^1 \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^t \int_0^1 f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right).$$

证明 首先证明存在性。对于任意 $0 < \varepsilon < 1$，考虑以下正则化问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a_\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + c(x)u_\varepsilon = f(x,t), \ (x,t) \in Q, \\ u_\varepsilon(0,t) = u_\varepsilon(1,t) = 0, \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$a_\varepsilon(x) = a(x) + \varepsilon, \ x \in [0,1].$$

根据退化抛物方程理论，方程(4)存在唯一弱解 $u_\varepsilon(x,t)$。

接着对 $u_\varepsilon(x,t)$ 给出一些先验估计。不失一般性，不妨假设 $u_\varepsilon(x,t)$ 是(4)的经典解。否则，可以光滑

化(4)的系数，然后考虑近似问题的解决方案。

在(4)式的两边同乘 u_ε，并在 $Q_t=[0,1]\times(0,t)$ 上积分，有

$$\int_0^t\int_0^1\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^1 a_\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^1 b(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^1 c(x)u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^1 fu_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

通过分部积分，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 u_\varepsilon^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1 a_\varepsilon'\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^1 a_\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\int_0^t\int_0^1 b\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^1 cu_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^1 fu_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{5}$$

注意到

$$\int_0^t\int_0^1 cu_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1 u_\varepsilon^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1(a_\varepsilon'+b)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^1 a_\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1\varphi^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{6}$$

对上式不等式的左端第二项进行分部积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^1(a_\varepsilon'+b)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\left[(a_\varepsilon'+b)u_\varepsilon^2\right]\Big|_0^1\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^1\left[(a_\varepsilon'+b)u_\varepsilon\right]_x u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_0^t\int_0^1(a_\varepsilon'+b)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^1\left[(a_\varepsilon'+b)\right]_x u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\left[(a_\varepsilon'+b)\right]_x u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le -M\int_0^t\int_0^1 u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这里根据 a 和 b 的光滑性，定义 $M\ge\frac{1}{2}\left[(a_\varepsilon'+b)\right]_x$。

令 $\varepsilon\to 0$，由 Gronwall 不等式，显然有

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^1 u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1 a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\left(\int_0^1\varphi^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1 f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right).$$

这意味着弱解存在性成立。

接下来证明弱解的唯一性，假设 u_1,u_2 是方程(1)的两个解，并且令

$$U(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t),\ (x,t)\in Q.$$

显然 $U\in C\left([0,T];L^2(0,1)\right)\cap\mathcal{B}$，并且对于任意 $\psi\in L^\infty\left((0,T);L^2(0,1)\right)\cap\mathcal{B}$，$\frac{\partial\psi}{\partial t}\in L^2(Q)$，$\psi(\cdot,T)=0$，有以下积分等式成立

$$\int_0^t\int_0^1\left(-U\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_xU_x\psi+aU_x\psi_x+bU_x\psi+cU\psi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{7}$$

对于任意给定的$\kappa \in C_0^\infty(Q)$，由上面得到的存在性可知对以下方程存在一个弱解$v \in C\left([0,T];L^2(0,1)\right)\cap \mathcal{B}$，且$\dfrac{\partial v}{\partial \tau} \in L^2(Q)$

$$-v_t - a(x)v_{xx} + b(x)v_x + cv = \kappa(x,t),\ (x,t)\in Q,$$

$$v(x,T) = 0,\ x\in(0,1).$$

在(7)式令$\psi = v$，得

$$\int_0^t \int_0^1 U\kappa \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

注意到κ的任意性，有

$$U(x,t) = 0,\ a.e.(x,t)\in Q,$$

即

$$u_1(x,t) = u_2(x,t),\ a.e.(x,t)\in Q.$$

定理 1 得证。

注 1 上面定义的弱解是在整个域Q上。若只考虑空间相关的情况，可以将定义 1 修改为：

定义 1'. 将$H_a^1(0,1)$定义为$C_0^\infty(Q)$在以下范数下的闭包：

$$\|u\|_{H_a^1(0,1)}^2 = \int_0^1 a(x)\left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x,\ u\in H_a^1(0,1).$$

定义 2 也可以改写为：

定义 2'. 函数$u \in H^1\left((0,T);L^2(0,1)\right)\cap L^2\left((0,T);H_a^1(0,1)\right)$称为方程(1)的弱解，如果$u$满足

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x\in(0,1),$$

并且以下积分等式几乎处处对$t\in(0,T]$成立

$$\int_0^1 u_t\psi\mathrm{d}x + \int_0^1 au_x\psi_x\mathrm{d}x + \int_0^1 a_x u_x\psi\mathrm{d}x + \int_0^1 bu_x\psi\mathrm{d}x + \int_0^1 cu\psi\mathrm{d}x = \int_0^1 f\psi\mathrm{d}x,$$

通过类推论证，可以证明这种弱解的存在性、唯一性和正则性，类似于定理 1。

由于反问题 P 是不适定的，即其解不稳定地依赖于数据，我们转而考虑以下最优控制问题 P1：

问题 P1： 寻找$\bar{g}(x)\in\mathcal{A}$使得：

$$J(\bar{g}) = \min_{g\in\mathcal{A}} J(g), \tag{8}$$

其中

$$J(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u(x,T;g) - \kappa(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_0^1 |\nabla g|^2 \mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ g(x) \mid 0<\alpha\le g\le\beta, \|g\|_{H_a^1} < \infty \right\}, \tag{10}$$

$u(x,t;g)$是方程(1)对应于给定系数$g(x)\in\mathcal{A}$的解，N是正则化参数，α,β是两个给定的正常数。

对于附加条件(2)，假设

$$\kappa(x)\in L^\infty(0,1). \tag{11}$$

根据(11)和定理 1，易知对任意$g\in\mathcal{A}$控制泛函(9)是严格定义的。

现在要证明问题(8)的极小元是存在的。首先，我们声明在以下意义上泛函$J(g)$在$\mathcal{A}$中具有某种连

续性质。

引理 1. 对于任意序列$\{g_n\}\in\mathcal{A}$。当$n\to\infty$，$\|g_n-g\|_{L^\infty(0,1)}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|u(g_n)(x,T)-\kappa(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left|u(g)(x,T)-\kappa(x)\right|^2\mathrm{d}x. \tag{12}$$

由于引理 1 的证明类似于文献[11]，所以在这就不再详细证明。

定理 2. 存在$J(g)$的极小元$\bar{g}\in\mathcal{A}$，即

$$J(\bar{g})=\min_{g\in\mathcal{A}}J(g).$$

证明 容易看出$J(g)$是非负的并且有下确界$\inf_{g\in\mathcal{A}}J(g)$。设$\{g_n\}$是一个极小化序列，即

$$\inf_{g\in\mathcal{A}}J(g)\le J(g_n)\le\inf_{g\in\mathcal{A}}J(g)+\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots$$

注意到$J(g_n)\le C$，可以推断

$$\|\nabla g_n\|_{L^2(0,1)}\le C, \tag{13}$$

其中C与n无关。

根据$\{g_n\}$的有界性，同样可得

$$\|g_n\|_{H^1(0,1)}\le C. \tag{14}$$

因此，选取一个子序列，同样表示为$\{g_n\}$，则

$$g_n(x)\rightharpoonup\bar{g}(x)\in H^1(0,1)\ \text{as}\ n\to\infty. \tag{15}$$

利用 Sobolev 嵌入定理，得

$$\|g_n(x)-\bar{g}(x)\|_{L^1(0,1)}\to 0\ \text{as}\ n\to\infty. \tag{16}$$

容易看出$\{g_n(x)\}\in\mathcal{A}$。因此当$n\to\infty$时，在$L^1(0,1)$

$$g_n(x)\to\bar{g}(x)\in\mathcal{A} \tag{17}$$

此外，根据式(15)，有

$$\int_0^1|\nabla\bar{g}|^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\nabla g_n\cdot\nabla\bar{g}\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_0^1|\nabla g_n|^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1|\nabla\bar{g}|^2\mathrm{d}x}. \tag{18}$$

根据引理 1 和$\{g_n\}$的收敛性，存在一个$\{g_n\}$的子序列，仍记为$\{g_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|u(g_n)(x,T)-\kappa(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left|u(\bar{g})(x,T)-\kappa(x)\right|^2\mathrm{d}x. \tag{19}$$

由式(17)~(19)，有

$$J(\bar{g})=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|u(g_n)(x,T)-\kappa(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_0^1|\nabla\bar{g}|^2\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}J(g_n)=\inf_{g\in\mathcal{A}}J(g). \tag{20}$$

因此，$J(\bar{g})=\min_{g\in\mathcal{A}}J(g)$。

定理得证。

3. 必要条件

定理 3. 设g为最优控制问题(8)的解，对于任意$h\in\mathcal{A}$，存在一个三元函数$(u,\xi;g)$满足以下系统：

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + bu_x + cu = \lambda(x,t)g, & (x,t) \in Q = (0,1)\times(0,T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \xi_t - a\xi_{xx} + b\xi_x + c\xi = \lambda(x,t)(h-g), & (x,t) \in Q = (0,1)\times(0,T], \\ \xi|_{t=0} = 0, & x \in (0,1), \end{cases} \tag{22}$$

以及

$$\int_0^1 \left[u(x,T;g) - \kappa(x)\right]\xi(x,T)\,\mathrm{d}x + N\int_0^1 \nabla g\cdot\nabla(h-g)\,\mathrm{d}x \ge 0 \tag{23}$$

证明：对任意的 $h \in \mathcal{A}$， $0 \le \delta \le 1$，有

$$g_\delta \equiv (1-\delta)g + h\delta \in \mathcal{A}.$$

并且

$$J_\delta \equiv J(g_\delta) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|u(x,T;g_\delta) - \kappa(x)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_0^1 \left|\nabla g_\delta\right|^2 \mathrm{d}x. \tag{24}$$

令 u_δ 为方程(1)中 $g = g_\delta$ 时的解，因为 g 是一个最优解，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_\delta}{\mathrm{d}\delta}\right|_{\delta=0} = \int_0^1 \left[u(x,T;g) - \kappa(x)\right]\left.\frac{\partial u_\delta}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} \mathrm{d}x + N\int_0^1 \nabla g\cdot\nabla(h-g)\,\mathrm{d}x \ge 0. \tag{25}$$

设 $\widetilde{u_\delta} \equiv \dfrac{\partial u_\delta}{\partial\delta}$，直接计算可得到方程：

$$\begin{cases} \left(\widetilde{u_\delta}\right)_t - a\left(\widetilde{u_\delta}\right)_{xx} + b\left(\widetilde{u_\delta}\right)_x + c\left(\widetilde{u_\delta}\right) = \lambda(x,t)(h-g), \\ \left.\left(\widetilde{u_\delta}\right)\right|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

令 $\xi = \left.\widetilde{u_\delta}\right|_{\delta=0}$，则 ξ 满足

$$\begin{cases} \xi_t - a\xi_{xx} + b\xi_x + c\xi = \lambda(x,t)(h-g), \\ \xi|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

根据式(25)，有

$$\int_0^1 \left[u(x,T;g) - \kappa(x)\right]\xi(x,T)\,\mathrm{d}x + N\int_0^1 \nabla g\cdot\nabla(h-g)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

定理得证。

4. 唯一性和稳定性

由于最优控制问题 P1 是非凸的。所以，一般来说，人们可能不会期望一个独特的解决方案。事实上，优化技术作为众所周知的一种经典工具，可以为没有唯一解的反问题得到“通用解”。然而，如果终端时间 T 相对较小，则可以证明代价泛函的最小值是局部唯一且稳定的。

定理 4. 设 $g_1(x), g_2(x)$ 分别为对应于 $\kappa_1(x), \kappa_2(x)$ 的最优控制问题 P1 的极小元。如果存在一点 $x_0 \in (0,1)$，使得

$$g_1(x_0) = g_2(x_0),$$

则对于相对较小的 T，有以下估计

$$\max_{x\in(0,1)}|g_1-g_2|\le C\|\kappa_1-\kappa_2\|_{L^2(0,1)},$$

其中常数 C 仅和 N 有关。

证明：在式(23)中，当 $g=g_1$ 时，取 $h=g_2$；当 $g=g_2$ 时，取 $h=g_1$，有

$$\int_0^1\left[u_1(\cdot,T)-\kappa_1\right]\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x+N\int_0^1\nabla g_1\cdot\nabla(g_2-g_1)\,\mathrm{d}x\ge 0, \tag{27}$$

$$\int_0^1\left[u_2(\cdot,T)-\kappa_2\right]\xi_2(\cdot,T)\,\mathrm{d}x+N\int_0^1\nabla g_2\cdot\nabla(g_1-g_2)\,\mathrm{d}x\ge 0, \tag{28}$$

其中 $\{u_i,\xi_i\}(i=1,2)$ 分别是当 $g=g_i(i=1,2)$ 时系统(27)/(28)的解。

设

$$\Xi=u_1-u_2,\ \Upsilon=\xi_1+\xi_2,$$

则 Ξ 和 Υ 满足以下方程

$$\begin{cases}\Xi_t-a\Xi_{xx}+b\Xi_x+c\Xi=\lambda(x,t)g_1-\lambda(x,t)g_2,\\ \Xi|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases}\Upsilon_t-a\Upsilon_{xx}+b\Upsilon_x+c\Upsilon=0,\\ \Upsilon|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{30}$$

根据弱极值原理，我们知道式(30)只有零解，因此

$$\xi_1(x,t)=-\xi_2(x,t), \tag{31}$$

并且 ξ_1 满足以下式子

$$\begin{cases}\xi_{1t}-a\xi_{1xx}+b\xi_{1x}+c\xi_1=\lambda(x,t)g_2-\lambda(x,t)g_1,\\ \xi_1|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{32}$$

注意到式(29)和(32)，有

$$\Xi(x,t)=-\xi_1(x,t). \tag{33}$$

根据式(27)，(28)，(31)和(33)，我们得

$$\begin{aligned}N\int_0^1|\nabla(g_1-g_2)|^2\,\mathrm{d}x&\le\int_0^1\left[u_1(\cdot,T)-\kappa_1\right]\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\left[u_2(\cdot,T)-\kappa_2\right]\xi_2(\cdot,T)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[u_1(\cdot,T)-\kappa_1\right]\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\left[\kappa_2-u_2(\cdot,T)\right]\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\Xi(\cdot,T)\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x+\int_0^1[\kappa_2-\kappa_1]\xi_1(\cdot,T)\,\mathrm{d}x\\&\le-\frac{1}{2}\int_0^1|\xi_1(\cdot,T)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1|\kappa_1-\kappa_2|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{34}$$

对 $0<x<1$，根据定理 4 的假设，以及 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}|(g_1-g_2)(x)|&=\left|\int_{x_0}^x(g_1-g_2)'\,\mathrm{d}x+\left[g_1(x_0)-g_2(x_0)\right]\right|\\&\le\left|\left[g_1(x_0)-g_2(x_0)\right]\right|+\left|\int_{x_0}^x(g_1-g_2)'\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^1|\nabla(g_1-g_2)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(\int_0^1|\nabla(g_1-g_2)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{35}$$

从而得出

$$\max_{x\in(0,1)}\left|g_1-g_2\right|\le\left\|\nabla\left(g_1-g_2\right)\right\|_{L^2(0,1)}, \tag{36}$$

联立式(34)和(36)，得到

$$\max_{x\in(0,1)}\left|g_1-g_2\right|\le\sqrt{\frac{1}{2N}}\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{L^2(0,1)}\le C\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{L^2(0,1)}.$$

定理得证。

注 2 值得一提的是，正则化参数在不适定问题的数值模拟中起着重要作用。从定理 4 可以得到，如果存在一个常数 δ，使得

$$\left\|\kappa_1-\kappa_2\right\|_{L^2(0,1)}<\delta,\ \frac{\delta^2}{N}\to 0,$$

那么

$$\left\|g_1-g_2\right\|_{C^1(0,1)}\to 0,$$

则重构的最优解是唯一且稳定的，这与已有结果一致。由于参数 N 通常被认为非常小，特别是在数值计算中，定理 4 确实满足最优解的局部适定性。一般来说，对于不适定问题，正则化参数适当依赖于数据误差趋近零时，可以得到收敛结果。此外，在一些额外的源条件下，也可以推导出收敛速度。

5. 总结

近年来，经典抛物方程参数反演问题已经被许多学者所研究，然而研究非散度型退化抛物方程参数反演的文献则相对较少。在这篇文章中，我们研究了如下非散度型退化抛物方程源项反演问题：

$$u_t-a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u=\lambda(x,t)g(x),\ (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T].$$

与其他经典抛物方程参数识别的反问题不同的是，我们所研究的数学模型在边界存在退化，这也导致边界条件可能会缺失。通过最优控制框架，我们将原问题转换成了最优控制问题，证明了最优控制问题极小元的存在性，并且建立了极小元存在的必要条件。通过得到的必要条件证明了控制泛函极小元的局部唯一性和稳定性。由于本文研究的是在一维空间下的反问题，在未来的工作中，我们将会研究在多维空间内非散度型退化抛物方程的参数反演问题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11461039, 61663018)；兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”；甘肃省自然科学基金资助项目(18JR3RA122)。

参考文献

[1] 周蜀林. 偏微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.

[2] 韩波, 李莉. 非线性不适定问题的求解方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[3] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 等. 数学物理方程讲义[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[4] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] 冯立新. 反问题的计算方法及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011.

[6] Tort, J. (2010) Determination of Source Terms in a Degenerate Parabolic Equation. *Inverse Problems*, **26**, Article ID: 105003. https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/10/105003

[7] Tort, J. and Vancostenoble, J. (2012) Determination of the Insolation Function in the Nonlinear Sellers Climate Model. *Annales De Linstitut Henri Poincaré*, **29**, 683-713. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.03.003

[8] Bouchouev, I. and Isakov, V. (1999) Uniqueness, Stability and Numerical Methods for the Inverse Problem That Arises in Financial Markets. *Inverse Problems*, **15**, R95. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/3/201

[9] Egger, H. and Engl, H.W. (2005) Tikhonov Regularization Applied to the Inverse Problem of Option Pricing: Convergence Analysis and Rates. *Inverse Problems*, **21**, 1027. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/014

[10] Isakov, V. (1997) The Inverse Problem of Option Pricing. *Inverse Problems*, **13**, 109-114. https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/5/001

[11] Deng, Z.-C., Yu, J.-N. and Yang, L. (2008) An Inverse Problem of Determining the Implied Volatility in Option Pricing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **340**, 16-31. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.075

[12] Elmorabie, K.M. and Yahya, R. (2021) Inverse Scattering Problem for Detecting a Defect in a Magnetoelastic Layer. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29**, 1864-1894. https://doi.org/10.1080/17415977.2021.1884246

[13] Cannarsa, P., Doubova, A. and Yamamoto, M. (2021) Inverse Problem of Reconstruction of Degenerate Diffusion Coefficient in a Parabolic Equation. *Inverse Problems*, **37**, Article ID: 125002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac274b

[14] Li, R. and Li, Z. (2020) Identifying Unknown Source in Degenerate Parabolic Equation from Final Observation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29**, 1-20.

[15] Ruan, Z. and Wang, Z. (2020) A Backward Problem for Distributed Order Diffusion Equation: Uniqueness and Numerical Solution. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29**, 1-22.