Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 3955-3964**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116424

一类具有植化相克的捕食模型的最优收获

袁雅静

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月27日；录用日期：2022年6月19日；发布日期：2022年6月28日

摘　要

通过引入捕食者-食饵模型中的非线性捕获函数，研究了一类具有植化相克的捕食模型，得到了该模型平衡点的存在性和局部稳定性的条件，通过构造 Lyapunov 函数来判断正平衡点周围的全局稳定性。确定了非线性收获下的生态经济平衡点，使用 Pontryagin 极大值原理得到了最优收获策略，从而揭示了在保证浮游生物种群不灭绝的情况下，对渔业资源进行利用和开发的同时，不仅给渔民提供了最大的经济利润，而且维持了海洋生态系统的平衡。

关键词

浮游生物，捕食者-食饵模型，植化相克，稳定性，最优收获策略

Optimal Harvest of a Predation Model with Allelopathy

Yajing Yuan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 27^{th}, 2022; accepted: Jun. 19^{th}, 2022; published: Jun. 28^{th}, 2022

文章引用: 袁雅静. 一类具有植化相克的捕食模型的最优收获[J]. 应用数学进展, 2022, 11(6): 3955-3964.
DOI: 10.12677/aam.2022.116424

Abstract

By introducing the nonlinear capture function in the predator-prey model, a kind of predator-prey model with planting phase is studied. The conditions for the existence and local stability of the equilibrium point of the model are obtained. The global stability around the positive equilibrium point is judged by constructing Lyapunov function, the ecological and economic equilibrium point under nonlinear harvesting is determined, and the optimal harvesting strategy is obtained by using Pontryagin maximum principle, which reveals that while ensuring the non extinction of plankton population, the utilization and development of fishery resources not only provides fishermen with the maximum economic profit, but also maintains the balance of marine ecosystem.

Keywords

Plankton, Prey-Predator Model, Allelopathy, Stability, Optimal Harvest Strategy

1. 引言

浮游生物是生活在海洋, 河流和湖泊中的漂流生物. 根据营养关系, 它分为浮游植物和浮游动物. 浮游植物是水生食物链中最基本的营养层, 是海洋环境中最基本的食物来源. 浮游动物是经济水产动物, 是中上层水域中鱼类和其他经济动物的重要饵料, 对渔业的发展具有重要意义. 随着动力学系统的发展, 许多生态工作者注意某些水生种群能产生一些化学物质, 这些化学物质对其他水生种群分别有刺激和抑制生长的作用 [1]. 人们通常把刺激生长的化学物质称为激素, 把抑制生长的化学物质称为毒素, 并且把一种物质产生毒素抑制其它物质生长的现象叫做植化相克 [2].

Maynard – Smith 首次提出了描述两个物种间植化相克作用的数学模型 [3]. 事实上, 一个物种数量的增加可能会通过产生植化相克作用或者刺激物的产生来影响另一个物种或其他几个物种的生长, 从而影响季节演替 [4]. 目前关于浮游生物植化相克的研究已经取得了一些重要成果 [5–8]. 结

合 Maynard – Smith [3] 的模型提出了以下浮游生物植化相克的捕食模型

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\frac{x}{k}) - \dfrac{\beta}{1+\alpha x}xy - \gamma x^2 y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\delta y + \frac{a\beta xy}{1+\alpha x}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x 表示浮游植物, 是食饵种群的密度, y 表示浮游动物, 是捕食者种群的密度. γ 表示浮游动物对浮游植物的毒素抑制率. γx^2 是 y 物种对 x 物种密度的一种功能反应. 它是通过浮游动物产生的一种有毒物质来阻止浮游植物使用共同资源. 参数 r 代表内禀增长率. $\phi(x) = \frac{\beta}{1+\alpha x}$ 是 HollingII 型功能反应函数 [9], 代表捕食者的捕食率. δ 为捕食者种群的自然死亡率. a 为转化率. k 为环境容纳量.

在收获效应下, 我们假设模型 (1.1) 中的浮游植物不具有商业重要性, 捕食者不断地被收获, 所以收获函数以最小的努力获得最大的经济利润. 目前广泛应用的收获函数, 主要有以下三种类型 [10] :

(i)常数收获函数, 对捕获对象以常数收获率进行捕捞, 称为固定限额捕捞策略;

(ii)比例收获函数, 称为固定努力量捕捞策略, 即假定单位时间内的收获量与捕捞努力量及种群大小的乘积成正比, 一般记为 $\mathrm{H}(\mathrm{y},\mathrm{E}) = q\mathrm{E}y$;

(iii)非线性收获函数, 即 $\mathrm{H}(y,\mathrm{E}) = \frac{q\mathrm{E}y}{d_1\mathrm{E}+d_2y}$, 其中 q 表示可捕获系数, E 表示对捕食者种群的收获努力, d_1, d_2 是正常数. 不难发现, 常数收获函数随机寻找猎物, 比例收获函数是对于固定 E, $\mathrm{H}(\mathrm{y},\mathrm{E})$ 会随 y 的无界线性增加. 而非线性收获函数消除了上述不现实的特征, 并且满足 $\lim\limits_{\mathrm{E}\to+\infty} \frac{q\mathrm{E}y}{d_1\mathrm{E}+d_2y} = \frac{q\mathrm{E}}{d_2}$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{q\mathrm{E}y}{d_1\mathrm{E}+d_2y} = \frac{qy}{d_1}$. 即非线性收获函数对收获的努力水平和种群丰度均表现出饱和效应, 从而表明非线性收获更现实. 因此, 在存在非线性收获函数的情况下, 模型 (1.1) 修改为:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-\frac{x}{k}) - \dfrac{\beta}{1+\alpha x}xy - \gamma x^2 y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\delta y + \dfrac{a\beta}{1+\alpha x}xy - \frac{q\mathrm{E}y}{d_1\mathrm{E}+d_2y}. \end{cases} \tag{1.2}$$

许多专家和学者研究了各种各样的种群动力系统的收获问题, 在渔业资源管理、病虫害控制等领域取得了大量成果. Lv 等 [11]研究了一个对食饵设有保护区的三种群模型, 对开放区的食饵和捕食者进行相同捕捞努力量捕获, 给出了基于最大经济收益的奇异最优控制. Manna 等 [12]研究了用相同捕获努力量同时收获两种群的最优收获策略. 李雅芝等 [13]应用 Pontryagin 极大值原理讨论了登革热传播模型的最优综合控制.

本文首先分析模型 (1.2) 平衡点存在性和稳定性, 然后讨论最优收获控制策略, 最后解释相应的结论.

2. 平衡点的稳定性

为了简单起见, 我们引入无量纲变量: $u = \frac{1}{k}x$, $v = \frac{\beta}{r}y$, $t = \frac{\tau}{\lambda}$, 无量纲参数为:

$$m = \alpha k,\ \eta = \frac{\gamma k}{\beta},\ s = \frac{\delta}{r},\ b = \frac{a\beta k}{r},\ h = \frac{q\mathrm{E}d_2}{\beta},\ d = \frac{\beta\mathrm{E}d_1}{d_2 r}.$$

再次用 t 表示 τ , 模型 (1.2) 变为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u(1-u) - \dfrac{uv}{1+mu} - \eta u^2 v, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - sv + \dfrac{buv}{1+mu} - \frac{hv}{d+v}, \end{cases} \tag{2.1}$$

由模型 (2.1) 得到的平衡点有平凡平衡点 $\mathrm{E}_0 = (0,0)$, 非平凡平衡点 $\mathrm{E}_1 = (1,0)$, 正平衡点 $\mathrm{E}_* = (u_*, v_*)$, $v_* = \frac{(1-u_*)(1+mu_*)}{1+mu_*+\eta u_*}$, 其中 u_* 满足一元三次方程

$$\mathrm{A}u_*^3 + \mathrm{B}u_*^2 + \mathrm{C}u_* + \mathrm{D} = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{A} = m(ms-b) > 0,\ \mathrm{B} = m(2s+b+bd-\eta ds-\eta h) - m^2(s+ds+h) + b(\eta d-1) > 0,$$

$$\mathrm{C} = bd+b+s-(4ms+2mh+\eta ds+\eta h) > 0,\ \mathrm{D} = -(s+sd+h) < 0.$$

在这里令 $f(u) = \mathrm{A}u^3 + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u + \mathrm{D}$. 因为 $f(0) = \mathrm{D} = -(s+sd+h) < 0$, 所以一元三次方程 (2.2) 式至少有一个正根. 再利用笛卡尔符号法则, 当 $(\mathbf{H_0}) : 3ms + 3m^2 s + hbd > m^2 + \eta hm + b$ 满足时, 它有唯一正根 $\mathrm{E}_* = (u_*, v_*)$.

2.1. 平衡点的局部稳定性

定理 1 模型 (2.1) 在每个平衡点周围的局部稳定性

(i)平凡平衡点 $\mathrm{E}_0 = (0,0)$ 总是不稳定的;

(ii)当 $\frac{b}{1+m} < s + \frac{hd}{d^2}$ 时, 非平凡平衡点 $\mathrm{E}_1 = (1,0)$ 是渐近稳定的;

(iii)当 $\frac{hv_*}{(d+v_*)^2} < \frac{b(d+v_*)^2}{h(1+mu_*)^2}(\frac{u_*}{1+mu_*} + \eta u_*^2)$ 时, 正平衡点 $\mathrm{E}_* = (u_*, v_*)$ 是渐近稳定的, 反之是不稳定的.

证明 模型 (2.1) 在任意点 (u,v) 的 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 - 2u - \frac{v}{(1+mu)^2} - 2\eta uv & -\frac{u}{1+mu} - \eta u^2 \\ \frac{bv}{(1+mu)^2} & -s + \frac{bu}{1+mu} - \frac{hd}{(d+v)^2} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

(i) 模型 (2.1) 在平凡平衡点 $\mathrm{E}_0 = (0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{E}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s - \frac{hd}{d^2} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

矩阵 (2.4) 的特征值为 1 和 $-(s+\frac{hd}{d^2})<0$, 因此平凡平衡点 E_0 总是不稳定的.

(ii) 模型 (2.1) 在非平凡平衡点 $E_1=(1,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{E_1}=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{m+1}-\eta \\ 0 & -s+\frac{b}{1+m}-\frac{hd}{d^2} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

矩阵 (2.5) 的特征值为 -1 和 $-s+\frac{b}{1+m}-\frac{hd}{d^2}$. 当 $\frac{b}{1+m}<s+\frac{hd}{d^2}$ 时, 非平凡平衡点 $E_1=(1,0)$ 是渐近稳定的.

(iii) 模型 (2.1) 在正平衡点 $E_*=(u_*,v_*)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{E_*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$a_{11}=1-2u_*-\frac{v_*}{(1+mu_*)^2}-2\eta u_*v_*, \qquad a_{12}=-\frac{u_*}{1+mu_*}-\eta u_*^2,$$
$$a_{21}=\frac{bv_*}{(1+mu_*)^2}, \qquad a_{22}=-s+\frac{bu_*}{1+mu_*}-\frac{hd}{(d+v_*)^2}.$$

矩阵 (2.6) 的特征方程为

$$\lambda^2-\Theta\lambda+\Lambda=0, \tag{2.7}$$

其中

$$\Theta=\mathrm{tr}[J(E_*)]=a_{11}+a_{22},$$

$$\Lambda=\det[J(E_*)]=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

从而, 正平衡点的稳定性由 Θ 和 Λ 的符号所决定. 因此, 当 $\frac{hv_*}{(d+v_*)^2}<\frac{b(d+v_*)^2}{h(1+mu_*)^2}(\frac{u_*}{1+mu_*}+\eta u_*^2)$, 模型 (2.1) 的正平衡点 E_* 是局部渐近稳定的. 反之, 正平衡点 E_* 是不稳定的.

2.2. 平衡点的全局稳定性

在这一小节中, 我们通过构造合适的 Lyapunov 函数来研究模型 (2.1) 正平衡点 E_* 的全局稳定性.

定理 2 假设 $(\mathbf{H_0})$ 成立, 当 $mv_*<1+mu_*$ 时, 模型 (2.1) 的正平衡点 E_* 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(u,v)=[(u-u_*)-u_*\ln\frac{u}{u_*}]-\varphi[(v-v_*)-v_*\ln\frac{v}{v_*}],$$

其中 φ 为待定的正常数. 沿着模型 (2.1) 的正解对 $\mathrm{V}(u,v)$ 求导有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dV}(u,v)}{\mathrm{d}t}=&\frac{u-u_*}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\varphi\frac{v-v_*}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\ =&(u-u_*)[1-u-\frac{v}{1+mu}-\eta uv]-\varphi(v-v_*)[-s+\frac{bu}{1+mu}-\frac{h}{d+v}].\end{aligned}\tag{2.8}$$

对于平衡点 $\mathrm{E}_*=(u_*,v_*)$, 我们有一组平衡方程

$$\begin{cases}1-u_*-\frac{v_*}{1+mu_*}-\eta u_*v_*=0,\\ -s+\frac{bu_*}{1+mu_*}-\frac{h}{d+v_*}=0,\end{cases}\tag{2.9}$$

我们将 (2.8) 式和 (2.9) 式结合在一起有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dV}(u,v)}{\mathrm{d}t}=&(u-u_*)[-u-\frac{v}{1+mu}-\eta uv+u_*+\frac{v_*}{1+mu_*}+\eta u_*v_*)]\\ &-\varphi(v-v_*)[\frac{bu}{1+mu}-\frac{h}{d+v}-\frac{bu_*}{1+mu_*}+\frac{h}{d+v_*}],\end{aligned}$$

取 $\varphi=\frac{(1+mu_*)(\eta u_*(1+mu)+1)}{b}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dV}(u,v)}{\mathrm{d}t}=&(u-u_*)^2[-1+\frac{mv_*}{(1+mu)(1+mu_*)}-\eta v]-\frac{(1+mu_*)(\eta u_*(1+mu)+1)}{b}(v-v_*)^2\\ =&-[(u-u_*)^2(1-\frac{mv_*}{(1+mu)(1+mu_*)}+\eta v)+\frac{(1+mu_*)(\eta u_*(1+mu)+1)}{b}(v-v_*)^2]\leq 0.\end{aligned}$$

因此, 根据 Lyapunov – Lasalle 不变原理 [14], 正平衡点 E_* 是全局渐近稳定的.

3. 生态经济平衡点的存在性

当通过出售捕获的捕食者和食饵获得的总收入和投入捕捞所用的成本基本持平时, 可以达到所谓的生物平衡. 在模型 (1.1) 中, 通过捕食者(即浮游动物)在商业上具有重要意义, 纳入了非线性的收获函数. 因此, 我们可以达到所谓的生物平衡, 这意味生态平衡和经济平衡, 而生物平衡由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ 给出. 在这里, 定义 c 为每单位捕捞强度的恒定成本, P 为每单位生物量的出售价格, 所以净收入是出售收获的生物量所获得的总收入减去收获的努力的总成本. 净收入为

$$\pi(x,y,\mathrm{E})=\frac{\mathrm{PE}qy}{d_1\mathrm{E}+d_2y}-c\mathrm{E}=(\frac{\mathrm{P}qy}{d_1\mathrm{E}+d_2y}-c)\mathrm{E},$$

那么生态平衡点 $A_\infty = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$, 由下列方程给出

$$\begin{cases} rx(1-\frac{x}{k}) - \frac{\beta xy}{1+\alpha x} - \gamma x^2 y = 0, \\ -\delta y + \frac{a\beta xy}{1+\alpha x} - \frac{qEy}{d_1E+d_2y} = 0, \\ (\frac{Pqy}{d_1E+d_2y} - c)E = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

为了保证 A_∞ 的存在, 必须保持 $\frac{Pqy}{d_1E+d_2y} > c$. 经计算方程 (3.1) 的生态平衡点 A_∞ 可以表示为如下形式:

$$\begin{aligned} x_\infty &= \frac{P(\delta d_1 - q) + cd_2}{P(a\beta d_1 - \delta\alpha d_2) + cd_2\alpha}, \\ y_\infty &= \frac{r(k-x_\infty)(1+\alpha x_\infty)}{\beta k + \gamma x_\infty k(1+\alpha x_\infty)}, \\ E_\infty &= \frac{d_2 y_\infty[\delta(1+\alpha x_\infty) - a\beta x_\infty]}{a\beta x_\infty d_1 - (1+\alpha x_\infty)(\delta d_1 + q)}. \end{aligned}$$

定理 3 当 $\frac{cd_2}{p} < q < \delta d_1, a\beta d_1 < \delta\alpha d_1 + \alpha q$ 时, 生态平衡点 $A_\infty = (x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ 存在.

注: 如果 $E > E_\infty$, 那么捕获猎物的总成本将超过从渔业获得的总收入, 一些渔民会遭受损失, 他们自然会退出渔业, 故 $E > E_\infty$ 不能无限维持. 反之, $E < E_\infty$, 则渔业更加有利可图, 因此, 在开放获取的渔业中, 它会吸引越来越多的渔民, 这将对收获工作产生越来越大的影响, 但相应的对环境和渔业资源的开发和利用就会有副作用, 所以, $E < E_\infty$ 也不能无限地保持.

4. 最优收获策略

为了确定一个最优的收获策略, 引入了一个连续的收入时间流 J 的当前值:

$$J(E) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\pi(x,y,E)dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}(\frac{Pqy}{d_1E+d_2y} - c)Edt,$$

其中, ε 为贴现率, $E(t)$ 为捕食者种群的捕获努力量, 满足控制域 $V = [0, E_{max}]$. E_{max} 是食饵和捕食者收获的可行上限, E_ε 表示最优控制, 所对应的状态为 x_ε, y_ε. 我们取 $A_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ 为最佳的平衡点. 我们的目标是在保证让系统种群可持续发展的前提下, 在控制域 V 上确定允许控制的 E(t), 使得模型 (1.2) 经过初值 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ 的解让连续的收入时间流 J 的当前值达到最大值. 即最优控制 E_ε 满足 $J(E_\varepsilon) = \max J(E)$.

现在定义最优控制的哈密顿函数

$$H = e^{-\varepsilon t}(\frac{PqEy}{d_1E+d_2y} - cE) + \lambda_1[rx(1-\frac{x}{k}) - \frac{\beta xy}{1+\alpha x} - \gamma x^2 y] + \lambda_2[-\delta y + \frac{a\beta xy}{1+\alpha x} - \frac{qEy}{d_1E+d_2y}],$$

其中 λ_1, λ_2 是伴随变量, 同时有 $\frac{\partial H}{\partial E} =: \sigma(t)$, 可见 $\sigma(t)$ 使 $E(t)$ 在 0 与 E_{max} 上来回切换, 称 $\sigma(t)$ 为切

换函数. 由于哈密顿函数 H 在控制变量中是线性的, 所以最优控制涉及到奇异控制和 bang – bang 控制(在它的上界或下界)的结合. 因此, 在这种情况下, 对应的最优策略如下:

$$\mathrm{E}(t)=\begin{cases}\mathrm{E}_{\max}, & \sigma(t)>0 \Leftrightarrow \lambda_2 e^{\varepsilon t}<\mathrm{P}-\frac{c(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}{qd_2y^2},\\ 0, & \sigma(t)<0 \Leftrightarrow \lambda_2 e^{\varepsilon t}>\mathrm{P}-\frac{c(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}{qd_2y^2}.\end{cases}$$

$\lambda_2 e^{\varepsilon t}$ 是假定价格, $\lambda_2 e^{\varepsilon t}<\mathrm{P}-\frac{c(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}{qd_2y^2}$ 是收获的捕食者的净收入. 从经济学的角度看, 第一个条件解释了当渔业捕捞收入大于假定价格时, 渔民正在获利的情况, 这将鼓励他们发挥更多的捕捞努力. 第二个条件解释了当渔业捕捞收入低于捕捞成本时, 渔民将会遇到损失, 导致渔业的捕捞活动停止. 而当 $\sigma(t)=0$ 时, 这意味着用户每单位努力收获的成本等于在稳态水平下该努力的未来边际利润的贴现值, 从而有

$$\lambda_2\frac{qd_2y^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}=e^{-\varepsilon t}(\frac{\mathrm{P}qd_2y^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}-c)=\frac{\partial\pi}{\partial\mathrm{E}}e^{-\varepsilon t}. \tag{4.1}$$

利用 Pontryagin 极大值原理 [15], 伴随变量必须满足所给出的伴随方程

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}=-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}=-[\lambda_1(r-\frac{2rx}{k}-\frac{\beta y}{(1+\alpha x)^2}-2\gamma xy)+\lambda_2\frac{a\beta y}{(1+\alpha x)^2}], \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}=-[e^{-\varepsilon t}\frac{\mathrm{P}qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}+\lambda_1(-\frac{\beta x}{1+\alpha x}-\gamma x^2)+\lambda_2(-\delta+\frac{a\beta x}{1+\alpha x}-\frac{qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2})]. \tag{4.3}$$

结合 (4.1) 和 (4.2) 式可以得到

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}=-\mathrm{A}_2\lambda_1-\mathrm{A}_3\lambda_2, \tag{4.4}$$

其中

$$\mathrm{A}_1=e^{-\varepsilon t}\mathrm{P}-\frac{c(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}{qd_2y^2},\mathrm{A}_2=r-\frac{2rx}{k}-\frac{\beta y}{(1+\alpha x)^2}-2\gamma xy,\mathrm{A}_3=\frac{a\beta y}{(1+\alpha x)^2},$$

求解线性方程 (4.4) 通解, 得到

$$\lambda_1(t)=\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3e^{-\varepsilon t}}{\mathrm{A}_2-\varepsilon}. \tag{4.5}$$

根据 (4.3) 式可以得到

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=-\mathrm{B}_1e^{-\varepsilon t}+\mathrm{B}_2\lambda_2, \tag{4.6}$$

其中

$$\mathrm{B}_1=\frac{\mathrm{P}qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}+\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_2-\varepsilon}(-\frac{\beta x}{1+\alpha x}-\gamma x^2),\mathrm{B}_2=\delta-\frac{a\beta x}{1+\alpha x}+\frac{qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E}+d_2y)^2}.$$

求解线性方程 (4.6) 通解, 得到

$$\lambda_2(t)=\frac{\mathrm{B}_1e^{-\varepsilon t}}{\mathrm{B}_2+\varepsilon}, \tag{4.7}$$

显然 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ 满足横截性条件. 由 (4.1) 和 (4.7) 式可以得到

$$c = (\mathrm{P} - \frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2 + \varepsilon})\frac{qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E} + d_2y)^2}, \tag{4.8}$$

由此可知最优平衡解 $\mathrm{A}_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, \mathrm{E}_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &= \frac{\mathrm{P}(\delta d_1 - q) + cd_2}{\mathrm{P}(a\beta d_1 - \delta\alpha d_2) + cd_2\alpha}, \\ y_\varepsilon &= \frac{r(k - x_\varepsilon)(1 + \alpha x_\varepsilon)}{\beta k + \gamma x_\varepsilon k(1 + \alpha x_\varepsilon)}, \\ \mathrm{E}_\varepsilon &= \frac{d_2 y_\varepsilon[\delta(1 + \alpha x_\varepsilon) - a\beta x_\varepsilon]}{a\beta x_\varepsilon d_1 - (1 + \alpha x_\varepsilon)(\delta d_1 + q)}. \end{aligned}$$

由 (4.8) 式知, 当 $\varepsilon \to \infty$ 时,

$$\frac{\mathrm{P}qd_1\mathrm{E}^2}{(d_1\mathrm{E} + d_2y)^2} - c = 0,$$

所以

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{E}} e^{-\varepsilon t} = 0,$$

这意味着无限的贴现率会导致未来单位努力的利润减少. 因此, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 收益达到最大.

5. 结论

该文研究了一类浮游生物具有植化相克作用的非线性捕食者捕获的捕食模型. 在这一类模型中, 采用非线性收获函数, 将商业渔业中存在的捕捞和种群内捕食相结合, 研究具有植化相克作用的捕食模型的动力学和最优收获. 为了维持海洋生态系统的平衡和可持续发展, 对浮游生物种群使用了最优收获控制策略, 应用 Pontryagin 极大值原理, 探讨了系统内最大可持续产量. 结果表明, 采收时的假定价格满足横截性条件, 零贴现率产生最大收益, 从而进一步说明了最优收获策略既可以合理地开发和使用资源, 又可以实现经济效益, 在海洋生态系统中具有重要意义.

参考文献

[1] Mukhopadhyay, A., Chattopadhyay, J. and Tapaswi, P.K. (1998) A Delay Differential Equations Model of Plankton Allelopathy. *Mathematical Biosciences*, **149**, 167-189. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(98)00005-4

[2] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京: 北京科学出版社, 1998.

[3] Smith, M. (1974) Models in Ecology. University Press.

[4] Rice, E.L. (1984) Manipulated Ecosystems: Roles of Allelopathy in Agriculture. In: *Allelopathy*, 2nd Edition, Academic Press, Cambridge, MA, 8-73. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-092539-4.50006-X

[5] Gupta, R.P., Banerjee, M. and Chandra, P. (2012) The Dynamic of Two-Species Allelopathic Competition with Optimal Harvesting. *Journal of Biological Dynamics*, **6**, 674-694. https://doi.org/10.1080/17513758.2012.677484

[6] Abbas, S., Banerjee, M. and Hungerbühler, N. (2010) Existence, Uniqueness and Stability Analysis of Allelopathic Stimulatory Phytoplankton Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 249-259. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.024

[7] Tian, C., Lai, Z. and Lin, Z. (2011) Pattern Formation for a Model of Plankton Allelopathy with Cross-Diffusion. *Journal of the Franklin Institute*, **348**, 1947-1964. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.05.013

[8] Tian, C. and Ruan, S. (2019) Pattern Formation and Synchronism in an Allelopathic Plankton Model with Delay in a Network. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **18**, 531-557. https://doi.org/10.1137/18M1204966

[9] Holling, C.S. (1959) Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *Canadian Entomologist*, **91**, 385-398. https://doi.org/10.4039/Ent91385-7

[10] Gupta, R.P., Chandra, P. and Banerjee, M. (2015) Dynamical Complexity of a Prey-Predator Model with Nonlinear Predator Harvesting. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B (DCDS-B)*, **20**, 423-443. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.423

[11] Lv, Y., Rong, Y. and Pei, Y. (2013) A Prey-Predator Model with Harvesting for Fishery Resource with Reserve Area. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 3048-3062. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.07.030

[12] Manna, D., Maiti, A. and Samanta, G.P. (2018) Analysis of a Predator-Prey Model for Exploited Fish Populations with Schooling Behavior. *Applied Mathematics and Computation*, **317**, 35-48. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.052

[13] 李雅芝, 刘利利. 登革热传播模型的最优综合控制研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(4): 445-452.

[14] Hale, J.K. (1969) Ordinary Differential Equations. *American Mathematical Monthly*, **23**, 82-122.

[15] 邢继祥, 张春蕊, 徐洪泽. 最优控制策略应用基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003.