Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(7), 4658-4667**
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117491

Hans汉斯

线性奇异摄动两点边值问题的自适应解法

姜雨男*，叶福林

北方工业大学理学院，北京

收稿日期：2022年6月13日；录用日期：2022年7月8日；发布日期：2022年7月15日

摘　要

本文讨论非守恒型线性奇异摄动两点边值问题的基于弧长等分布原理的自适应差分解法及其误差分析。引入对应的线性算子的伴随算子，利用伴随算子的格林函数的性质，证明了关于线性算子的稳定性。引入二次插值函数，可得在任意网格上提出的差分格式的后验误差估计。在均匀分布数值解弧长的自适应网格上，将引入的伴随线性算子离散化，利用离散格林函数的性质，证明了原问题数值解弧长的有界性，又由后验误差估计结论，最终可以证明原问题基于弧长等分布原理的自适应差分格式关于小摄动参数的一阶的一致收敛性。文章最后进行了数值实验，数值结果表明了误差分析的正确性和方法的可行性。

关键词

非守恒型线性两点边值问题，奇异摄动，自适应网格，二次插值函数，弧长等分布原理

Adaptive Solution of Singularly Perturbed Linear Two-Point Boundary Value Problems

Yunan Jiang*, Fulin Ye

College of Sciences, North China University of Technology, Beijing

Received: Jun. 13th, 2022; accepted: Jul. 8th, 2022; published: Jul. 15th, 2022

Abstract

In this paper, an adaptive difference method based on the arc-length equal distribution principle and its error analysis for non conservative linear singularly perturbed two-point boundary value problems are discussed. The adjoint operator of the corresponding linear operator is introduced. By using the properties of the Green's function of the adjoint operator, the stability of the linear operator is proved. By introducing the quadratic interpolation function, the posterior error esti-

*通讯作者。

文章引用: 姜雨男, 叶福林. 线性奇异摄动两点边值问题的自适应解法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4658-4667.
DOI: 10.12677/aam.2022.117491

mates of the difference schemes proposed on arbitrary grids can be obtained. On the adaptive grid with uniform arc length, the introduced adjoint linear operator is discretized, and the boundedness of the arc length of the numerical solution of the original problem is proved by using the properties of the discrete Green's function. From the conclusion of a posteriori error estimation, the first-order uniform convergence of the adaptive difference scheme for the original problem based on the principle of equal arc length distribution with respect to small perturbation parameters can be proved. Finally, numerical experiments are carried out. The numerical results show that the error analysis is correct and the method is feasible.

Keywords

Non-Conservative Linear Two-Point Boundary Value Problem, Singular Perturbation, Adaptive Mesh, Quadratic Interpolation Function, Arc Length Equal Distribution Principle

1. 引言

实际问题中，一个微分方程为反映一定的物理意义，往往会含有很小的正参数ε，且它们的解和解的导数当ε趋近零时出现不连续极限，因此这些方程被称为奇异摄动方程，ε称为摄动参数。奇异摄动问题出现于科技和工程的各种分支领域之中，例如河网水质模拟问题、大 Péclet 数对流热传输问题、运动介质中的电磁场问题、半导体器件模型的漂移扩散方程以及最著名的流体流动问题中的高雷诺数 Navier-Stokes 方程。因此，奇异摄动问题的数值解法成为计算数学和科学计算学科的一个重要的研究课题。我们考虑如下形式的非守恒型线性奇异摄动两点边值问题：

$$\begin{cases} Tu(x) := -\varepsilon u''(x) - p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中$0 < \varepsilon \ll 1$是一个充分小的正摄动系数，p 和 q 是充分光滑的函数，且对任意$x \in [0,1]$，$u \in R$分别满足$0 < \beta \le p(x) \le \beta^*$，$|p'(x)| \le C_p$，且$0 \le q(x) \le \gamma^*$，$|q'(x)| \le C_q$，其中，$\beta, \beta^*, \gamma^*$都是固定常数，$C_p$，$C_q$为一类正常数，且在不同处代表不同的值。满足上述条件时，问题(1)只含有唯一解 u，且 u 在$x = 0$处存在一个指数边界层(见[1] [2] [3])。

Linß 在[4]中研究了一类奇异摄动拟线性两点边值问题，提出了一种边界值问题数值处理的自适应方法，并进行了数值试验。Kumar 和 Srinivasan 在[5]中利用二阶中心差分格式，提出了一种新的求解对流占优对流扩散奇异摄动问题的自适应网格方法。Kumar 和 Srinivasan 在[6]中研究了一种新的自适应网格策略，用于求解具有规则边界层的抛物面对流扩散型奇异摄动问题。该方法利用引入一个熵样变量的辅助不等式也可以作为一个非常有效的适应指标的观点，是对[5]中方法的一种拓展。对于拟线性守恒型方程$-\varepsilon u''(x) - p(x,u(x))' u + q(x,u(x)) = 0$，$x \in (0,1)$，$u(0) = 0$，$u(0) = 0$。郑权，叶福林在[7]中采用以弧长函数作为控制函数的基于等分布原理的自适应方法，得到了一阶收敛的误差估计。对于线性非守恒型方程$-\varepsilon u''(x) - p(x)u'(x) = 0$，$x \in (0,1)$，$u(0) = 0$，$u(0) = 1$。杨继明，陈艳萍在[8]中采用移动网格方法，得到了一阶收敛的误差估计。对于上述问题陈艳萍在[9]中根据近似解的弧长等分布控制函数达到了一阶收敛速度。与以前对完全离散化方法的一些分析不同，该问题不需要此边值问题的保守形式。

本文研究了自适应网格上的一种迎风格式，利用等分布数值解来迭代网格，最终构建成等分布数值解弧长的网格来求解非守恒型线性问题(1)，证明了该格式的一致一阶收敛性，并通过数值实验验证了其有效性和误差估计。

2. 稳定性估计

根据 $(Tu,v)=(u,T^{*}v)$，我们得到 $Tu(x)=-\varepsilon u''(x)-p(x)u'(x)+q(x)u(x)$ 的伴随算子 $T^{*}u=-\varepsilon u''(x)+\left(p(x)u(x)\right)'+q(x)u(x)$。伴随算子 T^{*} 的格林函数 $G(x,\xi)$ 满足

$$\left(T^{*}G(x,\cdot)\right)(\xi)=\delta(\xi-x),\ 对于\ \xi\in(0,1),G(x,0)=G(x,1)=0, \tag{2}$$

其中 δ 是狄拉克 δ 函数。然后我们可以得到以下形式的解：

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)(Ty)(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

其中 $y(0)=y(1)=0$。

通过比较原则我们可以得到格林函数的界：

$$0\le G(x,\xi)\le\frac{1}{\beta},\ (x,\xi)\in[0,1]\times[0,1]. \tag{4}$$

定义范数：

$$\|v\|_{\infty}=\sup_{x\in[0,1]}|v(x)|,\|v\|_{*}=\min_{V:V'=v}\|V(x)\|_{\infty}.$$

我们需要更进一步。对每个 $y\in W_0^{1,\infty}(0,1)$，设辅助函数 $Y\in L_{\infty}(0,1)$ 满足：$Y'=Ty$。通过分部积分我们可以得到：

$$y(x)=-\int_0^1 G_{\xi}(x,\xi)Y(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{5}$$

因为 $G\ge 0$ 并且 G 满足(2)及其边界条件，我们可以得到：

$$G_{\xi}(x,0)\ge 0\ 及\ G_{\xi}(x,1)\le 0. \tag{6}$$

从(2)中，我们可以得到：

$$T^{*}G=-\varepsilon G_{\xi\xi}+pG_{\xi}+p_{\xi}G+qG=0,\ \xi\in(x,1).$$

根据[2]中§1.1.2，我们设：

$$q\ge 0,\ q+p'\ge 0 \tag{7}$$

再通过(7)式我们可以得到：

$$\varepsilon G_{\xi\xi}-pG_{\xi}=\left(p_{\xi}+q\right)G\ge 0. \tag{8}$$

所以：$\varepsilon G_{\xi\xi}-pG_{\xi}\ge 0$。显然，$\mathrm{e}^{\int_0^{\xi}-\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi}\ge 0$，因此我们可得：

$$G_{\xi\xi}\mathrm{e}^{\int_0^{\xi}-\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi}-\frac{p}{\varepsilon}G_{\xi}\mathrm{e}^{\int_0^{\xi}-\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi}\ge 0$$

$$\left(G_{\xi}\mathrm{e}^{\int_0^{\xi}-\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi}\right)'(\xi)\ge 0$$

当 $G_{\xi}(x,1)\le 0$ 时，上式在 $[\xi,1]$ 上的积分产生：

$$G(1)\mathrm{e}^{\int_0^1 -\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi} - G_\xi \mathrm{e}^{\int_0^\xi -\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi} \ge 0$$

$$G_\xi \mathrm{e}^{\int_0^\xi -\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi} \le G(1)\mathrm{e}^{\int_0^1 -\frac{p}{\varepsilon}\mathrm{d}\xi} \le 0.$$

所以 $G_\xi \le 0$，即：$G(x,\cdot)$ 在 $[0,x]$ 上单调减少。

对于 $\xi \in (0,x)$，在 $[0,\xi]$ 上对(2)式上积分，同理我们得到：$G(x,\cdot)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加。

下一步是利用上述单调性和(4)的 L_∞ 界来约束 G_ξ 的 L_1 范数。

首先，我们可得：

$$\left\|G_\xi(x,\cdot)\right\|_{L_1} = \int_0^x G_\xi(x,\xi)\mathrm{d}\xi - \int_x^1 G_\xi(x,\xi)\mathrm{d}\xi = 2G(x,x) \le \frac{2}{\beta}. \tag{9}$$

由(5)和(9)，就有：

$$|y(x)| \le \int_0^1 G_\xi(x,\xi)|Y(x)|\mathrm{d}\xi \le \int_0^x G_\xi(x,\xi)|Y(x)|\mathrm{d}\xi - \int_x^1 G_\xi(x,\xi)|Y(x)|\mathrm{d}\xi$$

$$|y(x)| \le \left[\int_0^x G_\xi(x,\xi)\mathrm{d}\xi - \int_x^1 G_\xi(x,\xi)\mathrm{d}\xi\right]\|Y(x)\|_\infty$$

$$\|y(x)\|_\infty \le \frac{2}{\beta}\min_{Y:Y'=y}\|Y(x)\|_\infty = \frac{2}{\beta}\|Ty(x)\|_*.$$

因此我们可得：$\|y(x)\|_\infty \le \frac{2}{\beta}\|Ty(x)\|_*$，即：

$$\|y(x)\|_\infty \le C\|Ty(x)\|_*. \tag{10}$$

定理 1：设 $v,w \in H^1(0,1)$ 且满足 $v(0)=w(0)$，$v(1)=w(1)$，那么，

$$\|v-w\|_\infty \le C\|Tv-Tw\|_*.$$

证明：由(10)可得：

$$\|v-w\|_\infty \le C\|T(v-w)\|_*,$$

又由 T 是线性算子可得：

$$\|v-w\|_\infty \le C\|Tv-Tw\|_*.$$

证毕。

3. 后验误差估计

构造问题(1)的差分格式：

$$\begin{cases} T^N u_i^N = -\varepsilon D^+\left(D^- u_i^N\right) - p_i D^+ u_i^N + q_i u_i^N = f_i, \\ u_0^N = 0, u_N^N = 0. \end{cases} \tag{11}$$

引入二次插值，对于每个 $x \in I_i = (x_i, x_{i+1})$。

$$\tilde{u}^N(x) = \frac{1}{2}D^+D^-u_i^N(x-x_i)(x-x_{i+1}) + \frac{1}{h_{i+1}}\left[u_{i+1}^N(x-x_i) + u_i^N(x_{i-1}-x)\right]. \tag{12}$$

我们使用以下恒等式：

$$T\tilde{u}^N(x) = -F'(x), x \in I_i, 1 \le i \le N. \tag{13}$$

由(11)知对于$t \in I_j$，

$$T\tilde{u}^N(t) = T\tilde{u}^N(t) - T^N u_j^N + f_j.$$

对于任意$t \in I_j$，由(1)，(12)可知

$$\begin{aligned} T\tilde{u}^N(t) - f_j = &\left(p_j - p(t)\right)\left[D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + D^+u_j^N\right] \\ &- p_j D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + q(t)\left(\tilde{u}^N(t) - u_j^N\right) + u_j^N\left(q(t) - q_j\right) \end{aligned} \tag{14}$$

积分上面等式

$$\begin{aligned} \int_{I_j}\left(T\tilde{u}^N(t) - f_j\right)\mathrm{d}t = &\int_{I_j}\left(p_j - p(t)\right)\left[D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + D^+u_j^N\right] \\ &+ q(t)\left(\tilde{u}^N(t) - u_j^N\right) + u_j^N\left(q(t) - q_j\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15}$$

由(13)，(15)知，对于$x \in I_j$，

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{j=i+1}^{N} &\left\{\int_{I_j}\left(p_j - p(t)\right)\left[D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + D^-u_j^N\right]\right. \\ &\left. + q(t)\left(\tilde{u}^N(t) - u_j^N\right) + u_j^N\left(q(t) - q_j\right)\mathrm{d}t\right\} \\ &+ \int_x^{x_i}\left\{\left(p_j - p(t)\right)\left[D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + D^-u_j^N\right]\right. \\ &\left. - p_j D^+D^-u_j^N\left(t - x_{j+\frac{1}{2}}\right) + q(t)\left(\tilde{u}(t) - u_j^N\right) + u_j^N\left(q(t) - q_j\right)\right\}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{16}$$

$\tilde{f}(x)$为$f(x)$的离散化f_j的分段函数：$\tilde{f}(x) = f_j$，$x \in I_j$。

由定理1，(1)，(13)及(16)，及模的定义，可知

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{u}(x) - u(x)\right\|_\infty \le C_1\left\|T\tilde{u}(x) - Tu(x)\right\|_* \le C_1&\left\|-F(x) - \int_x^1\left(\tilde{f}(t) - f(t)\right)\mathrm{d}t\right\|_\infty \\ \le C_1 \max_{0 \le i \le N-1}&\left\{\sum_{j=i}^{N}\int_{I_j}\left|p_j - p(t)\right|\left[\left|D^+D^-u_j^N\right| \cdot \left|t - x_{j+\frac{1}{2}}\right| + \left|D^+u_j^N\right|\right]\right. \\ &+ q(t) \cdot \left|\tilde{u}(t) - u_j^N\right| + \left|u_j^N\right| \cdot \left|q(t) - q_j\right|\mathrm{d}t \\ &\left. + \int_{I_i} p_i\left|D^+D^-u_i^N\right| \cdot \left|t - x_{i+\frac{1}{2}}\right|\mathrm{d}t + h_{j+1}\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

由引言知

$$\left|t - x_{j+\frac{1}{2}}\right| \le h_{j+1}, \left|p(t)'\right| \le C_P, \left|u_j^N\right| \le C_u, \left|q(t)'\right| \le C_q \tag{18}$$

由(18)，对$\left|p_j - p(t)\right|$进行估计，进而对$\int_{I_j}\left|p_j - p(t)\right|$进行估计：

$$\left|p_j-p(t)\right|=\left|\int_t^{x_j} p(t)'\,\mathrm{d}t\right|\le C_P\left(x_j-t\right)$$

$$\int_{I_j}\left|p_j-p(t)\right|\mathrm{d}t\le C_P\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left(x_j-t\right)\mathrm{d}t=C_P\cdot-\frac{1}{2}\cdot\left(x_j-t\right)^2\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}=C_p\cdot\frac{1}{2}h_{j+1}^2 \tag{19}$$

同理由(18)，(19)对 $\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}\left|p_j-p(t)\right|\cdot\left[\left|D^+D^-u_j^N\right|\cdot\left|t-x_{j+\frac{1}{2}}\right|+\left|D^+u_j^N\right|\right]\mathrm{d}t$ 进行估计：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}\left|p_j-p(t)\right|\cdot\left[\left|D^+D^-u_j^N\right|\cdot\left|t-x_{j+\frac{1}{2}}\right|+\left|D^+u_j^N\right|\right]\mathrm{d}t\\&\le\frac{C_P}{2}\max_{0\le j\le N-1}\left[h_{j+1}\left|D^+D^-u_j^N\right|\cdot h_{j+1}+h_{j+1}\left|D^+u_j^N\right|\right]\end{aligned} \tag{20}$$

同理由(18)，对 $\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}q(t)\cdot\left|\tilde u(t)-u_j^N\right|\mathrm{d}t$ 进行估计：

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}q(t)\cdot\left|\tilde u(t)-u_j^N\right|\mathrm{d}t\le\frac{1}{2}C_q\max_{0\le j\le N-1}\left[h_{j+1}\left|D^+D^-u_j^N\right|\cdot h_{j+1}+h_{j+1}\left|D^+u_j^N\right|\right] \tag{21}$$

由(18)，对 $\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}\left|u_j^N\right|\cdot\left|q(t)-q_j\right|\mathrm{d}t$ 进行估计：

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}\left|u_j^N\right|\cdot\left|q(t)-q_j\right|\mathrm{d}t\le\sum_{j=1}^{N}C_u\cdot C_q\cdot\frac{1}{2}h_{j+1}^2\le\frac{C_u\cdot C_q}{2}\max_{1\le i\le N}\left\{h_{i+1}\right\} \tag{22}$$

由(18)，对 $\int_{I_i}p_i\left|D^+D^-u_i^N\right|\cdot\left|t-x_{i+\frac{1}{2}}\right|\mathrm{d}t$ 进行估计：

$$\int_{I_i}p_i\left|D^+D^-u_i^N\right|\cdot\left|t-x_{i+\frac{1}{2}}\right|\mathrm{d}t\le C_Ph_{j+1}^2\left|D^+D^-u_i^N\right| \tag{23}$$

由(17)，(19)，(20)，(21)，(22)，(23)知：

$$\left\|\tilde u^N(x)-u(x)\right\|_\infty\le C_2\max_{0\le j\le N-1}\left[h_{j+1}^2\left|D^+D^-u_j^N\right|+h_{j+1}\left|D^+u_j^N\right|+h_{j+1}\right] \tag{24}$$

由 $D^+D^-u_i^N=\dfrac{1}{h_{i+1}}\left(D^+u_i^N-D^-u_i^N\right)$，得：

$$\left|D^+D^-u_j^N\right|\cdot h_{j+1}=\left|D^+u_j^N-D^-u_j^N\right|\le 2\max\left\{D^+u_j^N\right\}. \tag{25}$$

由(24)，(25)得：

$$\left\|\tilde u^N(x)-u(x)\right\|_\infty\le C_3\max_{0\le j\le N-1}\left[h_{j+1}\left|D^+u_j^N\right|+h_{j+1}\right]. \tag{26}$$

定理 2：设 u 是问题(1)的准确解，u_i^N 是问题(1)在差分格式(11)下任意网格上计算所得的数值解，那么，存在常数 C，使得：

$$\left\|u^N-u\right\|_\infty\le C\max_i\left(h_{i+1}\sqrt{1+\left|D^+u_i^N\right|^2}\right)$$

证明：由无穷模范数定义，及(26)得：

$$\left|u(x_i)-u_i^N\right| \le \left\|\tilde{u}^N(x)-u(x)\right\|_\infty \le C_3 \max_{0\le i\le N-1}\left[h_{i+1}\left|D^+u_i^N\right|+h_{i+1}\right]$$
$$\le C_3 \max_{0\le i\le N-1}\left[h_{i+1}\sqrt{1+\left|D^+u_i^N\right|^2}+h_{j+1}\right]$$
$$\le 2C_3 \max_{0\le i\le N-1}\left(h_{i+1}\sqrt{1+\left|D^+u_i^N\right|^2}\right).$$

证毕。

4. 自适应网格上的一阶一致收敛性

设 $T^{*,N}$ 表示 T^N 通过外积 $(\cdot,\cdot)$ 联系的伴随算子。根据

$$\begin{aligned}\left(T^Nu^N,v^N\right) &= \sum_{i=1}^{N-1}h_{i+1}v_i^NT^Nu_i^N \\ &= \sum_{i=1}^{N-1}h_{i+1}\left[-\varepsilon D^+\left(D^-u_i^N\right)-p_iD^+u_i^N+q_iu_i^N\right]v_i^N \\ &= \sum_{i=1}^{N-1}h_{i+1}\left[D^+\left(-\varepsilon D^-v_i^N+p_iv_i^N\right)+q_iv_i^N\right]u_i^N \\ &= \sum_{i=1}^{N-1}h_{i+1}u_i^NT^{*N}v_i^N := \left(u^N,T^{*N}v^N\right)\end{aligned}$$

因此，

$$T^{*N}u_i^N := D^+\left(-\varepsilon D^-u_i^N+p_iu_i^N\right)+q_iu_i^N. \tag{27}$$

定义离散格林函数 $G\left(x_i,x_j\right)$ 如下：

$$T^{*,N}G_{i,j}=\delta_{i,j}^N,\ i=1,2,\cdots,N-1,$$

且 $G_{0,j}=G_{N,j}=0$， $j=1,2,\cdots,N-1$，其中

$$\delta_{i,j}^N=\begin{cases}\dfrac{1}{h_{i+1}} & i=j,\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

通过离散比较原则，我们可以得到 $0\le G\left(x_i,x_j\right)\le\dfrac{1}{\beta}$， $i=0,1,\cdots,N$； $j=1,2,\cdots,N-1$。

对于任何网格函数，我们都可得到以下关系：

$$u_i^N=\sum_{j=1}^{N-1}h_{j+1}G_{i,j}T^Nu_j^N. \tag{28}$$

易证，在 $i=1,2,\cdots,j$ 时， $G_{i,j}$ 是 i 的单调递增函数，在 $i=j,j+1,\cdots,N$ 时， $G_{i,j}$ 是 i 的单调递减函数。

因此对每个 $j\in\{1,\cdots,N-1\}$，我们有：

$$\sum_{i=1}^{N}\left|G_{i,j}-G_{i-1,j}\right|=2G_{j,j}\le\frac{2}{\beta}.$$

所以我们得到：

$$\mathscr{L}^N=\sum_{i=1}^{N}h_i\sqrt{1+\left(D^-u_i^N\right)^2}\le\sum_{i=1}^{N}h_i\left[1+\left|D^-u_i^N\right|\right]=1+\sum_{i=1}^{N}\left|u_i^N-u_{i-1}^N\right|, \tag{29}$$

其中 $\mathscr{L}^N$ 是离散解 $\left\{u_i^N\right\}$ 的弧长。

对 $i=1,2,\cdots,N-1$ 有：

$$T^N u_i^N = T^N\left(u_i^N-\vec{0}\right)=T^N u_i^N - T^N\vec{0} = -\left(T^N\vec{0}\right)_i,\ u_0^N=u_N^N=0. \tag{30}$$

所以，由(29)，(30)我们有：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^N &\le 1+\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{N-1}h_{j+1}G_{i,j}T^N u_j^N-\sum_{j=1}^{N-1}h_{j+1}G_{i-1,j}T^N u_j^N\right| \\ &\le 1+\left\|T^N\vec{0}\right\|_\infty\sum_{j=1}^{N-1}h_{j+1}\sum_{i=1}^{N}\left|G_{i,j}-G_{i-1,j}\right|\le 1+\frac{2\left\|T^N\vec{0}\right\|_\infty}{\beta}.\end{aligned} \tag{31}$$

定理 3：设 $\left\{u_i^N\right\}$ 是(1)在迎风格式(11)下满足弧长等分布的自适应网格 $\left\{x_i\right\}$ 上的解，则：

$$\left\|u^N-u\right\|_\infty \le CN^{-1}$$

证明：根据 Brouwer 不动点定理，存在均匀分布弧长的自适应网格，且对 $i=1,2,\cdots,N$，从点 $\left(x_{i-1},u\left(x_{i-1}\right)\right)$ 到点 $\left(x_i,u\left(x_i\right)\right)$ 的弧长：

$$l_i=\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left(u_i^N-u_{i-1}^N\right)^2}=h_i\sqrt{1+\left(D^-u_i^N\right)^2}.$$

由定理 2 和(31)，就得到：

$$\left\|u^N-u\right\|_\infty \le C\max_i h_i\sqrt{1+\left(D^-u_i^N\right)^2}\le CN^{-1}.$$

证毕。

5. 数值实验

在 BakhvalovShishkin 网格和 Shishkin 网格和自适应网格上比较了迎风格式求解线性非守恒问题(1)的数值结果. 数值收敛速度由下式计算：

$$r^N=\log_2\left(\frac{\left\|u_i-u_i^N\right\|}{\left\|u_i-u_i^{2N}\right\|}\right).$$

另外，e_{bs} 是在迎风格式下 BS 网格上计算得到的数值解的最大节点误差。r_{bs}^N 是 BS 网格上解的数值收敛速度。e_s 是在迎风格式下 S 网格上计算得到的数值解的最大节点误差。r_s^N 是 S 网格上解的数值收敛速度。e_a 是在迎风格式下自适应网格上计算得到的数值解的最大节点误差。r_a^N 是自适应网格上解的数值收敛速度。

算例 1：我们研究下列线性奇异摄动两点边值问题：

$$\begin{cases}Tu(x):=-\varepsilon u''(x)-u'(x)+u(x)=0,\ x\in(0,1),\\ u(0)=0,\, u(1)=1,\end{cases}$$

该问题的准确解为

$$u(x)=\frac{\exp\left(m_1x\right)-\exp\left(m_1x\right)}{\exp\left(m_1\right)-\exp\left(m_2\right)},$$

其中 $m_1=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$， $m_2=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ 。

BS 网格和 S 网格和自适应网格上迎风格式的数值结果如表 1、表 2 和表 3 所示。

Table 1. Maximum errors and the corresponding rate of convergence in example for $\varepsilon = 10^{-2}$
表 1. 对于 $\varepsilon = 10^{-2}$，算例 1 中数值解的最大节点误差

N	e_{bs}	e_s	e_a	r_{bs}^N	r_s^N	r_a^N
8	0.0345	0.0484	0.0242	0.8212	−0.1003	0.3945
16	0.0195	0.0519	0.0184	0.7779	0.4260	0.7952
32	0.0114	0.0386	0.0106	0.8709	0.5205	0.8578
64	0.0062	0.0269	0.0059	0.9786	0.6585	0.9332
128	0.0032	0.0170	0.0031	1.0810	0.7147	0.9621
256	0.0015	0.0104	0.0016	0.5520	0.7747	0.9805
512	0.0010	0.0061	0.0008	0.3429	0.8138	0.9902
1024	0.0008	0.0035	0.0004			

Table 2. Maximum errors and the corresponding rate of convergence in example for $\varepsilon = 10^{-5}$
表 2. 对于 $\varepsilon = 10^{-5}$，算例 1 中数值解的最大节点误差

N	e_{bs}	e_s	e_a	r_{bs}^N	r_s^N	r_a^N
8	0.0464	0.0471	0.0328	0.6829	−0.0751	0.5978
16	0.0289	0.0497	0.0217	0.8480	0.4155	0.8700
32	0.0161	0.0372	0.0119	0.9069	0.5195	0.8133
64	0.0086	0.0260	0.0068	0.9509	0.6534	0.8907
128	0.0044	0.0165	0.0036	0.9744	0.7134	0.9383
256	0.0023	0.0101	0.0019	0.9865	0.7715	0.9532
512	0.0011	0.0059	0.0010	0.9932	0.8117	0.9713
1024	0.0006	0.0034	0.0005			

Table 3. Maximum errors and the corresponding rate of convergence in example1 for $\varepsilon = 10^{-8}$
表 3. 对于 $\varepsilon = 10^{-8}$，算例 1 中数值解的最大节点误差

N	e_{bs}	e_s	e_a	r_{bs}^N	r_s^N	r_a^N
8	0.0464	0.0471	0.0329	0.6830	−0.0751	0.6008
16	0.0289	0.0497	0.0217	0.8481	0.4154	0.8703
32	0.0161	0.0372	0.0119	0.9070	0.5195	0.8130
64	0.0086	0.0260	0.0068	0.9509	0.6534	0.8908
128	0.0044	0.0165	0.0036	0.9744	0.7134	0.9383
256	0.0023	0.0101	0.0019	0.9865	0.7714	0.9531
512	0.0011	0.0059	0.0010	0.9933	0.8117	0.9712
1024	0.0006	0.0034	0.0005			

6. 结论与展望

本文研究了自适应网格上的迎风格式，利用等分布数值解来迭代网格，最终构建成等分布数值解的网格来求解非守恒型线性问题(1)，证明了该格式的一致一阶收敛性。是对[9]的更一般化的推广，加入了一般项。并且数值实验进行了分别与层适应网格 BS 网格，S 网格的对比，实验结果也说明了本文的自适应网格误差更小，效果更好。但仍有改进的空间，今后我将主要研究通过中点迎风格式，进一步地缩小误差。

致　谢

感谢郑权老师的悉心教导。

参考文献

[1] Roos, H.-G. (2008) Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[2] Miller, J.-J.-H., O'Riordan, E. and Shishkin, G.-I. (1996) Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2933

[3] Lorenz, J. (1982) Stability and Monotonicity Properties of Stiff Quasilinear Boundary Problems. *Zbornik Radova. Prirodno-Matematichkog Fakulteta. Serija za Matematiku*, **12**, 151-175.

[4] Linß, T. (2001) Uniform Pointwise Convergence of Finite Difference Schemes Using Grid Equidistribution. *Computing*, **66**, 27-39. https://doi.org/10.1007/s006070170037

[5] Kumar, V. and Srinivasan, B. (2015) An Adaptive Mesh Strategy for Singularly Perturbed Convection Diffusion Problems. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2081-2091. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.019

[6] Kumar, V. and Srinivasan, B. (2019) A Novel Adaptive Mesh Strategy for Singularly Perturbed Parabolic Convection Diffusion Problems. *Differential Equations and Dynamical Systems*, **27**, 203-220. https://doi.org/10.1007/s12591-017-0394-2

[7] Zheng, Q. and Ye, F.-L. (2020) Numerical Solution of Qusilinear Singualrly Perturbed Problems by the Principle of Equidistribution. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **8**, 2175-2181. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.810163

[8] 杨继明，陈艳萍. 一类奇异摄动对流扩散边值问题的移动网格方法[J]. 湘潭大学自然科学学报，2004，26(3): 26-31.

[9] Chen, Y.P. (2006) Uniform Convergence Analysis of Finite Difference Approximations for Singular Perturbation Problems on an Adapted Grid. *Advances in Computational Mathematics*, **24**, 197-212. https://doi.org/10.1007/s10444-004-7641-0