Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4562-4577
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117483

具有强阻尼的非自治 Kirchhoff 型波方程的时间依赖拉回吸引子

田凯鸿，汪 璇*

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月11日；录用日期：2022年7月7日；发布日期：2022年7月14日

摘 要

本文研究了带有强阻尼和非线性扰动的非自治 Kirchhoff 波方程解的渐近性。运用收缩函数和渐近先验估计的方法验证了时间依赖拉回吸引子的存在性。

关键词

收缩函数，时间依赖拉回吸引子，强阻尼，**Kirchhoff** 波方程

The Pullback Attractors for Non-Autonomous Kirchhoff-Type Wave Equation with Strong Damping

Kaihong Tian, Xuan Wang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 11^{th}, 2022; accepted: Jul. 7^{th}, 2022; published: Jul. 14^{th}, 2022

* 通讯作者。

文章引用: 田凯鸿, 汪璇. 具有强阻尼的非自治 Kirchhoff 型波方程的时间依赖拉回吸引子[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4562-4577. DOI: 10.12677/aam.2022.117483

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions of Non-autonomous Kirchhoff-type wave equations with strong damping and nonlinear perturbations. The existence of time-dependent pullback attractors is verified by using contraction function and asymptotic prior estimation.

Keywords

Contraction Function, The Time Dependent Pullback Attractors, Strong Damping, Kirchhoff Wave Equation

1. 引言

在边界充分光滑的有界域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中, 考虑如下带有强阻尼和非线性扰动的非自治 Kirchhoff 型波方程

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt}-(1+\delta\|\nabla u\|^2)\Delta u-\Delta u_t+h(u_t)+f(u)=g(x,t), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, t\in\mathbb{R}, \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\delta\in[0,1]$,$h(u_t)$ 和 $f(u)$ 是非线性项, $g(x)$ 是外力项.

Kirchhoff 波方程源自 Kirchhoff 建立的可伸缩绳横向振动问题 (见文 [1]). 对于方程 (1.1), 当 $\varepsilon(t)$ 为正常数时, 已经有很多研究结果. 例如, 当 $\varepsilon(t)=1$ 时, 2008年, 钟和杨在文 [2]中研究了具有非线性阻尼项 $a(x)g(u_t)$ 的 Plate 方程在有界域中的全局吸引子的存在性. 同年, 杨在文 [3]中研究了非自治 Plate 方程在有界域上的一致吸引子的存在性. 2009年, 肖在文 [4]中研究了 Plate 方程在无界域上解的渐近紧性. 文 [5]中, 汪研究了非自治吊桥方程的渐近行为, 并通过应用新的结果和能量估计, 证明了一致吸引子在空间 $H_0^2\times L^2(\Omega)$ 上的存在性. 2014年, 徐和李在文 [6]中研究了非自治波方程的动力学行为并证得拉回吸引子的存在性. 马在文 [7] 中给出了具有强阻尼的非自治 Kirchhoff 方程

的拉回吸引子的存在性.

当 $\epsilon(t)$ 为单调有界递减且在无穷远处趋于 0 的函数时, 问题 (1.1) 变得更加复杂. 这是因为即使外力项与时间 t 无关, 方程 (1.1) 仍然在非自治情形下讨论. 为了解决这类问题, Conti 等人在文 [8]中提出了基于拉回吸引性的最小性拉回吸引子的概念, 并证得文 [9]中 Phinio 等人在时间依赖空间上建立的吸引子理论. 刘等人在文 [10]中应用文 [9]的方法研究了 Plate 方程在强拓扑空间上的时间依赖拉回吸引子. 关于带有强阻尼的非自治 Kirchhoff 波方程的时间依赖动力学行为还未见研究. 在本文的研究中发现非线性阻尼, 非自治外力项和 Kirchhoff 型非局部项给吸收集的证明带来了困难. 如何解决这些本质性困难成为本文研究的关键. 最终, 利用文献 [11]提出的收缩函数的方法, 以及文献 [12]中提出的动力系统 θ 诱导出的共圈函数 ϕ 证明了方程 (1.1) 的时间依赖拉回吸引子的存在性.

本文第二部分展示了预备知识及需要的定理, 第三部分证得了吸收集和时间依赖拉回吸引子的存在性.

2. 预备知识

定义 C 是一个正常数, 在文中出现的每一个 C 在不同的不等式中代表对应的常数值, 设 $\mathfrak{C}(\cdot)$ 是一个递增的正函数. 假设函数 $f(u), h(u_t), \varepsilon(t)$, 和 $g(x,t)$ 满足:

(A_1) 函数 $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 是一个递减有界函数且满足

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0, \tag{1.2}$$

存在常数 $L > 0$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|] \leqslant L. \tag{1.3}$$

(A_2) 设非线性项 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 满足

增长性条件

$$|f'(s)| \leqslant C(1 + |s|^{p-1}), s \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

耗散性条件

$$\liminf_{|s|\to\infty} |f'(s)| > -\lambda_1, \tag{1.5}$$

当 $N \geqslant 3$ 时, $1 \leqslant p < p^* \equiv \frac{N+2}{N-2}$. 其中 λ_1 为 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值.

(A_3) 设非线性扰动项 $h \in C^1(\mathbb{R}), h(0) = 0, h$ 是严格增的, 并且有

$$\liminf_{|s|\to\infty} h'(s) > 0, \tag{1.6}$$

$$|h(s)| \leqslant C(1 + |s|^{q-1}), s \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

当 $N \geqslant 3$ 时, $1 \leqslant q < p^* \equiv \frac{N+2}{N-2}$.

(A_4) 外力项 $g(x,t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$, 且有

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\sigma s}\|g(s)\|^2 \mathrm{d}s < +\infty, \tag{1.8}$$

其中 $0 < \sigma < \frac{\gamma}{2}, \gamma$ 为方程 (1.1) 做先验估计时所用的实验函数中的常数系数.

引理 1 假设 h 满足 (1.6)-(1.7) 式, 且对于任意的 $\delta > 0$, 存在一个常数 $C_\delta > 0$, 对所有的 $u,\ v \in \mathbb{R}$, 使得

$$|u-v|^2 \leqslant \delta + C_\delta(h(u)-h(v))(u-v). \tag{1.9}$$

结合条件 (1.3) 以及中值定理可得, 存在一个常数 C_1, 使得

$$|f(u)-f(v)| \leqslant C_1(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|, \quad \forall u,\ v \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant p < \frac{N+2}{N-2}. \tag{1.10}$$

令

$$F(u) = \int_0^{u(x)} f(s)\mathrm{d}s,$$

利用 (1.4) 式有

$$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \geqslant -\frac{\lambda}{4}\|u\|^2 - C. \tag{1.11}$$

从而易得

$$\langle f(u), u\rangle \geqslant \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{4}\|u\|^2 - C, \tag{1.12}$$

其中 $\lambda < \lambda_1$.

现在我们定义 L^2 中的自伴算子 $A : V_1 \longrightarrow V_{-1},\ \langle Au, v\rangle = \langle \nabla u, \nabla v\rangle, \forall u, v \in V_1$. 其中算子 A 的定义域 $D(A) = \{u \in L^2 | Au \in L^2\} = H^2 \cap H_0^1,\ Au = -\Delta u$ 对 $u \in D(A)$.

我们可以定义 A 的幂等算子 $A^s(s \in \mathbb{R})$, 空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$ 是Hilbert空间, 有内积和范数

$$\langle u, v\rangle_s = \langle A^{\frac{s}{2}}u, A^{\frac{s}{2}}v\rangle, \quad \|u\|_{V_s} = \|A^{\frac{s}{2}}u\|.$$

我们定义时间依赖空间 $\mathfrak{X}_t = V_1 \times L^2$, 并且赋予相应的范数 $\|(u, u_t)\|^2_{\mathfrak{X}_t} = \|\nabla u\|^2 + \epsilon(t)\|u_t\|^2$.

设 (X, d) 是完备的度量空间, (Q, ρ) 为度量空间, 也称为符号空间, $\theta = \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是定义在 Q 上的动力系统且满足:

(1) $\forall q \in Q,\ \theta_0(q) = q$;

(2) $\forall q \in Q,\ t, \tau \in \mathbb{R},\ \theta_{t+\tau}(q) = \theta_t(\theta_\tau(q))$;

(3) $(t, q) \to \theta_t(q)$ 连续.

定义 1 如果映射 $\phi : \mathbb{R}^+ \times Q \times X \to X$ 满足:

(1) $\forall (q,x) \in Q \times X,\ \phi(0,q,x) = x$;

(2) $\forall s,t \in \mathbb{R}^+,\ (q,x) \in Q \times X,\ \phi(t+s,q,x) = \phi(s,\theta_t(q),\phi(t,q,x))$,

则称映射 $\phi : \mathbb{R}^+ \times Q \times X \to X$ 是由 θ 诱导出的共圈.

定义 2(收缩函数) 设 X 为 Banach 空间, B 为 X 中的有界集, $\Phi(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $X \times X$ 上的函数, 如果对任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty} \Phi(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0.$$

则称 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 为 $X \times X$ 上的收缩函数, $\mathfrak{C}$ 表示定义在在 $X \times X$ 上收缩函数的集合.

定理 1 令 (θ,ϕ) 为 $Q \times X$ 上的非自治动力系统, 假设集合族 $\mathfrak{D} = \{D_q\}_{q\in Q}$ 为 ϕ 的拉回吸收集且 ϕ 是拉回 $\mathcal{D}-$ 渐近紧的, 则 ϕ 拥有拉回吸引子 $\mathfrak{A} = \{A_q\}_{q\in Q}$, 其中

$$A_q = \bigcap_{t\geqslant o}\overline{\bigcup_{s\geqslant t}\phi(s,\theta_{-s}(q),D_{\theta_{-s}(q)})},\quad q\in Q. \tag{1.13}$$

定理 2 令 (θ,ϕ) 为 $Q \times X$ 上的非自治动力系统, 有界集族 $\mathfrak{D} = \{D_q\}_{q\in Q}$ 与 $\tilde{\mathfrak{D}} = \{\tilde{D}_q\}_{q\in Q}$ 满足对任意的 $q \in Q$, 存在一个 $t_q = t(q,\mathfrak{D},\tilde{\mathfrak{D}}) \geqslant 0$, 使得

$$\phi(t,\theta_{-t}(q),D_{\theta_{-t}(q)}) \subset \tilde{D}_q,\ \ \forall t \geqslant t_q. \tag{1.14}$$

假设对任意的 $\epsilon > 0, q \in Q$, 并存在一个 $t = t(\epsilon,\tilde{\mathfrak{D}},q) \geqslant 0$ 与定义在 $\tilde{D}_{\theta_{-t(q)}} \times \tilde{D}_{\theta_{-t(q)}}$ 上的收缩函数 $\Phi_{t,q}(\cdot,\cdot)$, 使得对任意的 $x,y \in \tilde{D}_{\theta_{-t(q)}}$, 有

$$\|\phi(t,\theta_{-t}(q),x) - \phi(t,\theta_{-t}(q),y)\|_X \leqslant \epsilon + \Phi_{t,q}(x,y),$$

故 ϕ 在 X 上是拉回 $\mathfrak{D}-$ 渐近紧的.

3. 主要结果

3.1. 解的存在唯一性

对于方程 (1.1) 的解存在性可以通过标准的 Faedo − Galerkin 方法得到.

定理 3(解的存在唯一性) 假设 (1.2)-(1.8) 式成立, $y_0 \in \mathfrak{X}_t,\ g(\cdot) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ 则在区间 $[\tau,\ t]$ 上, 对任意的初值 (u_0,v_0), 问题 (1.1) 存在唯一解:

$$(u,u_t) \in C([\tau,\ t], H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\quad u_t \in C([\tau,\ t], L^2(\Omega)).$$

记

$$y_0 = y_\tau = \{u_0,u_1\},\quad y(t) = \{u(t),u_t(t)\}.$$

由问题 (1.1) 可在空间 $\mathfrak{X}_t$ 中构造一个非自治动力系统, 对任意的 $t,\tau\in\mathbb{R}$, 令 $Q=\mathbb{R}$, $\theta_t(\tau)=t+\tau$, 定义

$$\phi(t,\tau,y_0)=\phi(t+\tau,\tau,y_0)=\{u(t+\tau),u(t+\tau)\},\quad \tau\in\mathbb{R},\ s,t\geqslant 0,\ y_0\in\mathfrak{X}_\tau, \tag{2.1}$$

由方程 (1.1) 解的存在唯一性可知

$$\phi(t+s,\tau,y_0)=\phi(t,s+\tau,\phi(s,\tau,y_0)),\quad \tau\in\mathbb{R},\ s,t\geqslant 0,\ y_0\in\mathfrak{X}_\tau,$$

并且, 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$, 则由 (2.1) 式定义的映射 $\phi(t,\tau,\cdot):\ \mathfrak{X}_\tau\to\mathfrak{X}_t$ 是连续映射. 因此, 映射 ϕ 是 $\mathfrak{X}_t$ 上的共圈映射.

因为 $h(\cdot)\in L^2_{loc}(\mathbb{R},L^2(\Omega))$ 满足 (1.8) 式, R_δ 是所有函数 $r:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 的集合, 满足

$$\lim_{t\to-\infty}e^{\delta t}r^2(t)=0, \tag{2.2}$$

且 $D_{\delta,\mathfrak{X}_t}$ 是对任意的 $r_{\hat{D}}\in R_\delta$, 使得 $D(t)\subset\bar{B}(0;r_{\hat{D}}(t))$ 的所有 $\hat{D}=\{D(t),t\in\mathbb{R}\}$ 的集类, 其中 $\bar{B}(0,r_{\hat{D}}(t))$ 是以 0 为中心 $r_{\hat{D}}(t)$ 为半径的闭球.

3.2. 拉回吸收集的存在性

对方程 (1.1) 的解在空间 $\mathfrak{X}_t$ 中做先验估计.

令 $G(t)=\frac{1}{2}\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\delta}{4}\|\nabla u\|^4$, 定义能量函数

$$K(t)=G(t)+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

由 (1.10) 式有

$$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{1}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2-C, \tag{2.4}$$

由 (1.2) 式及 Hölder 不等式, 有

$$|\beta\varepsilon(t)(u_t,u)|\leqslant\frac{\varepsilon(t)}{4}\|u_t\|^2+\frac{L\beta^2}{\lambda_1}\|\nabla u\|^2. \tag{2.5}$$

由 (1.3) 式及嵌入 $V_1\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 得

$$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega(1+|u|^{p+1})\mathrm{d}x\leqslant\mathfrak{C}(\|\nabla u\|^2). \tag{2.6}$$

由 (1.4) 式及 Sobolev 嵌入, 存在正常数 c_0,C_0 以及递增的函数 $\mathfrak{C}(s)$, 使得

$$c_0G(t)-C_0\leqslant K(t)\leqslant\mathfrak{C}(G(t)). \tag{2.7}$$

设 $0<\beta<1$, 给方程 (1.1) 乘以 $u_t+\beta u$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(t)+\int_\Omega[h(u_t)u_t-\frac{\epsilon'(t)}{2}|u_t|^2-\beta\epsilon(t)|u_t|^2]\mathrm{d}x+\|\nabla u_t\|^2\\&+\rho(1+\delta\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2+\beta\langle h(u_t),u\rangle-\beta\langle f(u),u\rangle\\&=\langle g(t),u_t+\beta u\rangle+\beta\epsilon'(t)\langle u_t,u\rangle.\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $K_1(t)=K(t)+\beta\epsilon\langle u_t,u\rangle+\frac{1}{2}\beta\|\nabla u\|^2$. 因为

$$\langle g(t),u_t+\beta u\rangle\leqslant\frac{a\beta^2}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2+\frac{a}{2}\|u_t\|^2+a\beta\langle u,u_t\rangle+\frac{2}{a}\|g(t)\|^2,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(t)+\beta K_1(t)+\Lambda(t)\leqslant\frac{2}{a}\|g(t)\|^2,\tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda(t)=&\int_\Omega[h(u_t)u_t-\frac{\epsilon'(t)}{2}|u_t|^2-\beta\epsilon(t)|u_t|^2]\mathrm{d}x+\beta(h(u_t),u)+\beta(f(u),u)\\&-\beta\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x+(\beta-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{2}-\frac{a\beta^2}{2\lambda_1})\|\nabla u\|^2+\beta\delta\|\nabla u\|^4\\&-\beta^2\varepsilon(t)\langle u_t,u\rangle-\beta(\varepsilon'(t)-a)(u,u_t).\end{aligned}$$

由 (1.3) 式及 Hölder 不等式, 有

$$|(\varepsilon'(t)+a)(u_t,u)|\leqslant C\|u_t\|\|u\|\leqslant\frac{C}{4\eta}\|u_t\|^2+\eta\|\nabla u\|^2.\tag{2.10}$$

由 (1.6) 式 和 (1.7) 式, 可得

$$\begin{aligned}|\int_\Omega h(u_t)u\mathrm{d}x|&\leqslant\|h(u_t)\|\|u\|\\&\leqslant C\int_\Omega|u|\mathrm{d}x+C\int_\Omega(h(u_t)u_t)^{\frac{p}{p+1}}|u|\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_\Omega|u|\mathrm{d}x+C\int_\Omega(h(u_t)u_t\mathrm{d}x)^{\frac{p}{p+1}}\int_\Omega(|u|^{p+1}dx)^{\frac{1}{p+1}}\\&\leqslant C\int_\Omega|u|\mathrm{d}x+C\int_\Omega(h(u_t)u_t\mathrm{d}x)^{\frac{p}{p+1}}\|\nabla u\|\\&\leqslant C\int_\Omega|u|\mathrm{d}x+C(1+\int_\Omega(h(u_t)u_t\mathrm{d}x)\|\nabla u\|\\&\leqslant M_{g,\Omega}+\eta\|\nabla u\|^2+C(G(\tau))\int_\Omega h(u_t)u_t\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中 $\eta>0$ 足够小, $M_{g,\Omega}$ 是一个变化的普通常数. 由 (1.11) 式和 (1.12) 式, 可得

$$\begin{aligned}\beta(f(u),u)-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x &\geqslant \beta(\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2-C-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x)\\ &\geqslant -\frac{\beta}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2-\beta C. \end{aligned}\tag{2.12}$$

结合 (2.7) 式和 (2.10)-(2.12) 式, 有

$$\begin{aligned}\Lambda(t)=&\int_\Omega[(1-\mathfrak{C}(G(\tau)))h(u_t)u_t-\frac{(\epsilon'(t)+a)}{2}|u_t|^2-\beta(\frac{7\epsilon(t)}{4}+\frac{C}{4\eta})|u_t|^2]\mathrm{d}x\\ &+(1+\beta\|\nabla u\|^2-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{2}-\frac{L\beta^2}{2\lambda_1}-2\eta)\|\nabla u\|^2-\beta M_{g,\Omega}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

由 (1.4)式, 存在 $m>0$ 和 $|s|>R_0$, 有 $h'\geqslant m$, 因此,

$$\int_\Omega h(u_t)u_t\mathrm{d}x\geqslant m\int_{\Omega\{|u_t|\geqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x.\tag{2.14}$$

对 β_1 足够小, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega h(u_t)u_t\mathrm{d}x-\beta_1\|u_t\|^2\\ &\geqslant m\int_{\Omega\{|u_t|\geqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x-\beta_1\int_{\Omega\{|u_t|\geqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x-\beta_1\int_{\Omega\{|u_t|\leqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x\\ &\geqslant (m-\beta_1)\int_{\Omega\{|u_t|\geqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x+\beta_1\int_{\Omega\{|u_t|\leqslant R_0\}}|u_t|^2\mathrm{d}x-2\beta_1R_0^2|\Omega|.\end{aligned}\tag{2.15}$$

设 $\beta=\eta^2$, 选择 η 足够小, 使得 $1-\beta C(\mathcal{E}(\tau))>\frac{1}{2}$, 把 (2.15) 式代入到 (2.13) 式中, 可得 $\Lambda(t)\geqslant -\beta M_{g,\Omega}$. 我们可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(t)+\beta K_1(t)\leqslant \beta M_{g,\Omega}+\frac{2}{a}\|g(t)\|^2.\tag{2.16}$$

对 (2.16) 两边同乘以 $e^{\beta t}$ 并在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$K_1(t)\leqslant \beta^{-1}(1-e^{-\beta\tau})+e^{-\beta\tau}-K(t-\tau)+\frac{2}{a}\int_{t-\tau}^t e^{-\beta s}\|h(s)\|^2\mathrm{d}s.\tag{2.17}$$

对任意的 $y_0\in D_{t-\tau}$, $t\in\mathbb{R}$, $t>0$,

应用 Gronwall 引理, 由 (2.7) 式, 我们有

$$\|\phi(\tau,t-\tau,y_0)\|^2_{\mathfrak{X}_t}\leqslant 2Ce^{-\beta t}K_1(t-\tau)+2M_{g,\Omega}(1-e^{-\beta\tau})+\frac{4}{a}\int_{t-\tau}^t e^{-\beta s}\|h(s)\|^2\mathrm{d}s.\tag{2.18}$$

设 $(\mathfrak{Q}_\beta(\mathrm{t}))^2\leqslant 2C(1-e^{-\beta\tau})+\frac{4}{a}\int_{t-\tau}^t e^{-\beta s}\|h(s)\|^2\mathrm{d}s$, 考虑 $\mathfrak{X}_t$ 中的闭球 $B_{\beta,\mathfrak{X}_t}$, 定义 $B_\beta,\mathfrak{X}_t=\{y\in\mathfrak{X}_t,\ \|y\|^2_{\mathfrak{X}_t}\leqslant(\mathfrak{Q}_\beta(\mathfrak{t}))^2\}$, 结合 (2.7) 式知, $B_{\beta,\mathfrak{X}_t}$ 是共圈 ϕ 的拉回 $D_{\beta,\mathfrak{X}_t}$ 吸收集. □

定理 4 假设 (1.2)-(1.8) 式成立, 则方程 (1.1) 产生的非自治动力系统 (θ,ϕ) 在 $\mathfrak{X}_t$ 中存在拉回 $D_{\beta,\mathfrak{X}_t}$ 吸收集.

证明 在先验估计的基础上, 可以直接得出方程 (1.1) 产生的非自治动力系统 (θ,ϕ) 在 $\mathfrak{X}_t$ 中存在拉回 $D_{\beta,\mathfrak{X}_t}$ 吸收集. □

4. 拉回吸引子

4.1. 先验估计

引理 2 假设 (1.2)-(1.8) 成立, 定义在 $X\times X$ 上的函数 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 是收缩函数.

证明 对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 令 $y_i=(u_i(t),\partial_t u_i)(i=1,2)$ 为方程 (1.1) 关于初值 $y_0^i=(u_0^i,v_0^i)\in\tilde{D}_{t-\tau}\times\tilde{D}_{t-\tau}$ 的解, 其中 $\tau>0$. 为了方便估计, 记 $\omega(t)=u_1(t)-u_2(t)$, 则 $\omega(t)$ 满足以下方程

$$\begin{cases}\varepsilon(t)\omega_{tt}-\dfrac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\Delta\omega-\dfrac{\delta}{2}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\Delta(u_1+u_2) & \\ \qquad -\Delta\omega-\Delta\omega_t+h(u_{1_t})-h(u_{2_t})+g(u_1)-g(u_2)=0, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ \omega(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,t\in\mathbb{R},\\ \omega(x,0)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\omega_t(x,0)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{3.1}$$

令

$$\begin{aligned}K_\omega(t)=\frac{1}{2}e^{\gamma t}\int_\Omega&[\varepsilon(t)|\omega_t(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2\\&+\frac{\delta}{4}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)|\nabla\omega(t)|^2]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

给 (3.1) 式乘以 $e^{\gamma t}\omega_t(t)$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{\gamma t}K_\omega(t)]-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|\omega_t(t)\|^2+\langle h(u_{1t})-h(u_{2t}),e^{\gamma t}\omega_t(t)\rangle\\&=-\frac{\delta}{2}e^{\gamma t}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(t)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(t)\rangle+\gamma e^{\gamma t}K_\omega(t)\\&\quad-e^{\gamma t}\|\nabla\omega_t(t)\|^2-e^{\gamma t}\langle f(u_1)-f(u_2),\omega_t(t)\rangle.\end{aligned}\tag{3.2}$$

在 $[s,t]\times\Omega$ 上积分, 并由 $\varepsilon'(t)<0$ 及 h 的性质, 有

$$\begin{aligned}&e^{\gamma t}K_\omega(t)-e^{\gamma s}K_\omega(s)\\&\leqslant-\frac{\delta}{2}\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta+\gamma\int_s^t e^{\gamma\zeta}K_\omega(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\&\quad-\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}|\nabla\omega_t(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}\tag{3.3}$$

再对 (3.3) 式关于 s 在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$
\begin{aligned}
&\tau e^{\gamma t}K_\omega(t)-\int_{t-\tau}^{t}e^{\gamma s}K_\omega(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant +\gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\gamma\zeta}K_\omega(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}\|\nabla\omega_t(\zeta)\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

然后, 给 (3.1) 式乘以 $e^{\gamma t}\omega(t)$, 即

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{\gamma t}(\varepsilon(t)\|\omega_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\omega(t)\|^2)]+\frac{\delta}{2}e^{\gamma t}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_1\|^2)\|\nabla\omega(t)\|^2\\
&=-\frac{\delta}{2}e^{\gamma t}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(t)\rangle^2+\varepsilon'(t)\omega_t(t)\omega(t)-\langle h(u_{1t})-h(u_{2t}),e^{\gamma t}\omega(t)\rangle\\
&\quad-e^{\gamma t}\langle f(u_1)-f(u_2),\omega(t)\rangle+\gamma e^{\gamma t}[\varepsilon(t)\|\omega_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\omega(t)\|^2]. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

对上式在 $[s,t]\times\Omega$ 上积分, 并由 h 的性质, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{2}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_1\|^2)|\nabla\omega(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta+\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\\
&\leqslant-\int_\Omega e^{\gamma t}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\int_\Omega e^{\gamma s}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{\delta}{2}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\\
&\quad+\gamma\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta+\int_{s}^{t}\int_\Omega\varepsilon'(\zeta)e^{\gamma\zeta}\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

对 (3.6) 式关于 s 在 $[t-\tau,t]$ 上积分并乘以 γ, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega(\frac{\gamma\delta}{2}e^{\gamma\zeta}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_1\|^2)|\nabla\omega(\zeta)|^2+\gamma e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\leqslant-\frac{\delta\gamma}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s-\gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad-\gamma\tau\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega\varepsilon'(\zeta)\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad+\gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad+\gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

将 (3.7) 式代入 (3.4) 式, 有

$$
\begin{aligned}
& e^{\gamma t}K_\omega(t) - \int_{t-\tau}^{t} e^{\gamma s}K_\omega(s)\mathrm{d}s \\
& \leqslant -\frac{\delta\gamma}{4}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t} e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s - \int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta \\
& \quad - \frac{\gamma\tau}{2}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega}\varepsilon'(\zeta)\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
& \quad - \int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}|\nabla\omega_t(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta - \int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
& \quad - \frac{\delta}{2}\int_{s}^{t} e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta \\
& \quad + \frac{\gamma^2}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
& \quad + \frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

在 $[t-\tau, t]$ 上积分 (3.5) 式, 并由 h 的性质, 有

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)|\nabla\omega(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \leqslant -\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \quad + \gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}(\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \quad - \int_{\Omega} e^{\gamma t}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x + \int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}\varepsilon'(s)\omega_t(s)\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \quad + \int_{\Omega} e^{\gamma(t-\tau)}(\varepsilon(t-\tau)\omega_t(t-\tau)\omega(t-\tau)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t-\tau)|^2)\mathrm{d}x. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

将 (3.7) 式代入 (3.6) 式, 有

$$
\begin{aligned}
& e^{\gamma t}K_\omega(t) + \int_{t-\tau}^{t} e^{\gamma s}K_\omega(s)\mathrm{d}s \\
& \leqslant -\frac{\gamma\tau}{2}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega}\varepsilon'(\zeta)\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
& \quad - \frac{\delta\gamma}{4}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t} e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s - \int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta \\
& \quad - \frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \quad + \gamma\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}(\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma s}\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
& \quad - \int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}|\nabla\omega_t(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta - \int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega} e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega e^{\gamma t}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\int_{t-\tau}^t\int_\Omega \varepsilon'(s)\omega_t(s)\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+\int_\Omega e^{\gamma(t-\tau)}(\varepsilon(t-\tau)\omega_t(t-\tau)\omega(t-\tau)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t-\tau)|^2)\mathrm{d}x\\
&-\frac{\delta}{2}\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta\\
&+\frac{\gamma^2}{2}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&+\frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.8}
$$

对 (3.2) 式在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 并由 $\varepsilon(t)$, $h(u_t)$ 的性质, 可得

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t-\tau}^t e^{\gamma s}K_\omega(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant-\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}K_\omega(t)+\frac{1}{\gamma}e^{\gamma(t-\tau)}K_\omega(t-\tau)-\frac{1}{\gamma}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta}{2\gamma}\int_{t-\tau}^t e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(s)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(s)\rangle\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

将 (3.9) 式带入 (3.8) 式, 有

$$
\begin{aligned}
\tau e^{\gamma t}K_\omega(t)\ \leqslant&-\frac{\gamma\tau}{2}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega\varepsilon'(\zeta)\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&-\frac{\delta\gamma}{4}\int_{t-\tau}^t\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s-\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\\
&-\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+\gamma\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&-\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}K_\omega(t)+\frac{1}{\gamma}e^{\gamma(t-\tau)}K_\omega(t-\tau)-\frac{1}{\gamma}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&-\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}|\nabla\omega_t(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&-\int_\Omega e^{\gamma t}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\int_{t-\tau}^t\int_\Omega\varepsilon'(s)\omega_t(s)\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+\int_\Omega e^{\gamma(t-\tau)}(\varepsilon(t-\tau)\omega_t(t-\tau)\omega(t-\tau)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t-\tau)|^2)\mathrm{d}x\\
&-\frac{\delta}{2\gamma}\int_{t-\tau}^t e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(s)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&-\frac{\delta}{2}\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta\\
&+\frac{\gamma^2}{2}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&+\frac{\gamma}{2}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.10}
$$

结合 (3.8) 式-(3.10) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{t,\tau}((u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2))\\
&=-(\frac{\gamma}{2\tau}+\frac{1}{\tau})\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)\omega_t(t)\omega(t)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t)|^2)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{2\tau}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega \varepsilon'(\zeta)\omega_t(\zeta)\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\gamma}{2\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(s)\omega_t(s)\omega(s)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega \varepsilon'(s)\omega_t(s)\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta\gamma}{4\tau}\int_{t-\tau}^t\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s-\frac{1}{\tau}\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\\
&\quad+\frac{\gamma}{\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(s)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}\varepsilon(s)|\omega_t(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{1}{\tau}\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}|\nabla\omega_t(\zeta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(f(u_1)-f(u_2))\omega(\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta}{2\tau}\int_{t-\tau}^t e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle^2\mathrm{d}s-\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta}{2\gamma\tau}\int_{t-\tau}^t e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(s)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&\quad-\frac{\delta}{2\tau}\int_s^t e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega(\zeta)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t(\zeta)\rangle\mathrm{d}\zeta\\
&\quad-\frac{1}{\tau\gamma}e^{\gamma t}K_\omega(t)-\frac{1}{\gamma\tau}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega e^{\gamma s}(f(u_1)-f(u_2))\omega_t(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\gamma^2}{2\tau}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)|\omega_t(\zeta)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(\zeta)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{3.11}
$$

从而

$$K'_\omega(t)\leqslant C\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{\tau}\tilde{R}_{t-\tau}^2+\Phi_{t,\tau}((u_0^1)(v_0^1),(u_0^2)(v_0^2)),\tag{3.12}$$

其中 $\tilde{R}_{t-\tau}^2=\int_\Omega e^{\gamma(t-\tau)}(\varepsilon(t-\tau)\omega_t(t-\tau)\omega(t-\tau)+\frac{1}{2}|\nabla\omega(t-\tau)|^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{\gamma}e^{\gamma(t-\tau)}K_\omega(t-\tau)$.

令 (u_n,u_{n_t}) 为对应初始值 $(u_0^i,u_{1_0}^i)\in\tilde{D}_{t-\tau_0}\times\tilde{D}_{t-\tau_0}$ 的解. 已知 $\|\nabla u_n\|^2$ 是有界的. 由 (1.2)-(1.3) 式知: 对于任意固定的 $t-\tau_0$, $\zeta\in[t-\tau_0,t]$, $\varepsilon(\zeta)$ 有界, 故而 $\varepsilon(\zeta)\|u_{n_t}\|^2$ 有界. 因此 $\|\nabla u_n\|^2+\varepsilon(\zeta)\|u_{n_t}\|^2$ 有界. 根据 Alaoglu 定理, 有以下结果:

$$u_n\to u \text{ 在 } L^\infty(\tau,T;H_0^1(\Omega)) \text{ 中弱} * \text{收敛},\tag{3.13}$$

$$u_{n_t}\to u_t \text{ 在 } L^\infty(\tau,T;L^2(\Omega)) \text{ 中弱} * \text{收敛},\tag{3.14}$$

$$u_n\to u \text{ 在 } L^{p+1}(\tau,T;L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中强收敛},\tag{3.15}$$

$$u_n\to u \text{ 在 } L^2(\tau,T;L^2(\Omega)) \text{ 中强收敛}.\tag{3.16}$$

下面估计 (3.11) 式中的每一项. 由 (3.13)-(3.15) 式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega e^{\gamma\zeta}(\varepsilon(t)(\partial_t u_n-\partial_t u_m)(u_n-u_m)+\frac{1}{2}|\nabla(u_n-u_m)|^2)\mathrm{d}x=0.\tag{3.17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}e^{\gamma\zeta}L(\partial_t u_n-\partial_t u_m)(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=0. \tag{3.18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega}L(\partial_t u_n-\partial_t u_m)(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s=0. \tag{3.19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}e^{\gamma\zeta}(L(\partial_t u_n-\partial_t u_m)(u_n-u_m)+\frac{1}{2}|\nabla(u_n-u_m)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=0. \tag{3.20}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega}e^{\gamma\zeta}(L|\partial_t u_n-\partial_t u_m|^2+\frac{1}{2}|\nabla\omega(u_n-u_m)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s=0. \tag{3.21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(u_n-u_m)\rangle^2\mathrm{d}s=0. \tag{3.22}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(u_n-u_m)\rangle^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s=0. \tag{3.23}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{s}^{t}e^{\gamma\zeta}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(u_n-u_m)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\rangle\mathrm{d}\zeta=0. \tag{3.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}e^{\gamma s}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(u_n-u_m)\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\rangle\mathrm{d}s=0. \tag{3.25}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}e^{\gamma s}(L|(\partial_t u_n-\partial_t u_m)|^2+\frac{1}{2}|\nabla(u_n-u_m)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=0. \tag{3.26}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\gamma\zeta}(f(u_n)-f(u_m))(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta=0. \tag{3.27}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta\zeta}(f(u_n)-f(u_m))(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s=0. \tag{3.28}$$

由 (2.8) 式以及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&|\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta\zeta}(f(u_n)-f(u_m))\cdot(u_{n_t}-u_{m_t})\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta|\\
&\leqslant\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta\zeta}C(1+|u_n|^{p-1}+|u_m|^{p-1})\cdot|u_n-u_m|\cdot|u_{n_t}-u_{m_t}|\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\\
&\leqslant\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\beta\zeta}(C(1+\|u_n\|_{L^{2(p+1)}(\Omega)}^{p-1}+\|u_m\|_{L^{2(p+1)}(\Omega)}^{p-1})\\
&\quad\cdot\|u_n-u_m\|_{L^{p+1}(\Omega)}\cdot\|u_{n_t}-u_{m_t}\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\zeta\\
&\leqslant\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{\beta\xi}C(1+\|u_n(s)\|_{V_1}^{p-1}+\|u_m(s)\|_{V_1}^{p-1})\\
&\quad\cdot\|u_n(s)-u_m(s)\|_{L^{p+1}(\Omega)}\cdot\|u_{n_t}-u_{m_t}\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta\zeta}(f(u_n)-f(u_m))(u_{n_t}-u_{m_t})\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta=0. \tag{3.29}$$

类似地, 对于固定的 t, $|\int_s^t\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta\zeta}(f(u_n(\xi))-f(u_m(\zeta)))(u_{n_t}(\zeta)-u_{m_t}(\zeta))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta|$ 有界, 由勒贝格控制收敛定理可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\int_s^t\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta\zeta}(f(u_n(\zeta))-f(u_m(\zeta)))(u_{n_t}(\zeta)-u_{m_t}(\zeta))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s\\
&=\int_{t-\tau_0}^{t}(\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\int_\Omega \mathrm{e}^{\gamma\zeta}(f(u_n(\zeta))-f(u_m(\zeta)))(u_{n_t}(\zeta)-u_{m_t}(\zeta))\mathrm{d}x\mathrm{d}\zeta)\mathrm{d}s\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

因此, 可以得到 $\Phi_{t,\tau}((u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2))$ 为 $\tilde{D}_{t-\tau_0}\times\tilde{D}_{t-\tau_0}$ 上的收缩函数. □

定理 5 在式 (1.2)-(1.9) 及 (1.11) 成立的假设下, 由问题 (1.10) 产生的非自治动力系统 (θ,ϕ) 在 $\mathcal{H}_t$ 中存在时间依赖拉回吸引子.

证明: 由引理 2 知, (3.11) 式定义的函数 Φ_{t,τ_0} 是一个收缩函数, 结合定理 2 和定理 3 可知问题 (1.1) 产生的非自治动力系统 (θ,ϕ) 在 $\mathcal{H}_t$ 中存在时间依赖拉回吸引子. □

5. 总结

Kirchhoff 方程描述了物理学中可伸缩绳横向振动所引起的长度变化的现象. 此方程一直广泛应用于工程物理学中衡量桥梁振动、牛顿力学、海洋声学、宇宙物理、生物血浆问题等领域. 100多年来, 随着科技的发展, 人们对 Kirchhoff 方程的应用领域不断扩大, Kirchhoff 方程的表达式也在不断地推广, 越来越多关于 Kirchhoff 方程的数学物理模型得以建立. 本文研究了带有强阻尼和非线性扰动的非自治 Kirchhoff 波方程, 首先通过标准的 Faedo – Galerkin 方法得到了解的存在唯一性, 其次采用了先验估计的方法解决了非线性阻尼项、非自治外力项和 Kirchhoff 型非局部项在验证吸收集时带来的困难, 最后运用收缩函数和渐近先验估计的方法证明了时间依赖拉回吸引子的存在性. 国内外许多著名学者都致力于无穷维动力系统的研究并取得大量优秀成果, 他们建立并发展了吸引子的存在性理论, 使得无穷维动力系统理论在数学物理方程的研究中得到了更广泛的应用.

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 11761062; 11961059; 11661071).

参考文献

[1] Kirchhoff, G. (1883) Vorlesungen über Mechanik. Teubner, Sluttgart.

[2] Yang, L. and Zhong, C.K. (2008) Global Attractor for Plate Equation with Nonlinear Damping. *Nonlinear Analysis*, **69**, 3802-3810. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.10.016

[3] Yang, L. (2008) Uniform Attractor for Non-Autonomous Plate Equation with a Localized Damping and a Critical Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **338**, 1243-1254. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.011

[4] Xiao, H.B. (2009) Asymptotic Dynamics of Plate Equation with a Critical Exponent on Unbounded Domain. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1288-1301.
https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.012

[5] Wang, X., Yang, L.U. and Ma, Q.Z. (2014) Uniform Attractors for Non-Autonomous Suspension Bridge-Type Equations. *Boundary Value Problems*, **2014**, Article No. 75.
https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-75

[6] 徐茜, 李晓军. 带非线性阻尼非自治波方程拉回吸引子的存在性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2014, 31(3): 306-314.

[7] Ma, H.L., Wang, J. and Xie, J. (2021) Pullback Attractors for Nonautonomous Degenerate Kirchhoff Equations with Strong Damping. *Advances in Mathematical Physics*, **2021**, Article ID: 7575078. https://doi.org/10.1155/2021/7575078

[8] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277.
https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[9] Di Plinio, F., Duabe, G.S. and Temam, R. (2010) Time Dependent Attractor for the Oscillon Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **29**, 141-167.
https://doi.org/10.3934/dcds.2011.29.141

[10] 刘亭亭, 马巧珍. 非自治Plate方程时间依赖强拉回吸引子的存在性[J]. 数学年刊: A辑, 2017, 38(2): 125-144.

[11] Sun, C.Y., Cao, D.M. and Duan, J.Q. (2006) Non-Autonomous Dynamics of Wave Equations with Nonlinear Damping and Critical Nonlinearity. *Nonlinearity*, **19**, 2645-2665.
https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/11/008

[12] Li, Y.J. and Zhong, C.K. (2007) Pullback Attractors for the Norm-to-Weak Continuous Process and Application to the Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations. *Computers Mathematics with Applications*, **190**, 1020-1029. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.187