

# 一类具有不连续控制策略的网络病毒模型的动力学分析

徐忠齐

长沙理工大学, 数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2022年6月1日; 录用日期: 2022年6月27日; 发布日期: 2022年7月4日

---

## 摘要

本文研究了一类具有安装杀毒软件和重装系统策略的分段连续网络病毒模型, 从控制成本考虑, 我们将根据网络用户的数量作为考虑是否启动控制策略的决定因素。利用 Bendixson-Dulac 准则, 格林公式,  $\Omega$  极限集和 Poincaré 映射等知识分析了模型的全局动力学, 并进行了数值模拟。

## 关键词

分段连续, 网络病毒, Poincaré 映射, 全局动力学

---

## Dynamics of a Network Virus Model with Discontinuous Control Strategies

Zhongqi Xu

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jun. 1<sup>st</sup>, 2022; accepted: Jun. 27<sup>th</sup>, 2022; published: Jul. 4<sup>th</sup>, 2022

---

## Abstract

This paper studies a kind of piecewise continuous network virus model with anti-virus software installation and system reinstallation strategy. Considering the control cost, we will consider whether to start the control strategies according to the number of network users. The global dynamics of the model are analyzed by using Bendixson-Dulac criterion, Green's formula,  $\Omega$  limit set and Poincaré map and so on. In the end, numerical simulations are carried out.

## Keywords

Piecewise Continuous, Network Virus, Poincaré Map, Global Dynamics

---

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. 引言

计算机病毒本质上是一种恶性程序代码 [1]. 随着网络的高速发展, 全球经济的正常运行都高度依赖于网络的安全环境, 人们的日常生活也与之密不可分, 网络的出现让掌上办公成为常事, 不仅大幅降低了办公成本还提高了效率; 网购更是让人们足不出户就能实现生活各个方面的需要. 然而, 网络发达的同时也伴随问题的出现, 国家、企业、个人的机密不断因为网络病毒的入侵而遭到泄露 [2, 3].

1987 年, 学者 Cohen [4] 第一次提出了计算机病毒传播模型. 1991 年 Kephart [5] 首次发现生物病毒和计算机病毒传播规律相似, 用生物病毒模型的研究方法, 建立了计算机病毒传播机制, 并且研发反病毒软件控制计算机病毒的传播, 自此计算机病毒动力学正式诞生. 此后, 不断有学者通过考虑不同的抗毒因素, 提出了许多新的计算机病毒模型. 2001 年, Pastor-Satorras 等 [6] 提出 SIS 计算机病毒模型. 但这个模型的不足之处在于, 仅仅考虑了两个仓室, 没有考虑网络中感染计算机恢复后的状态. 在 2004 年 Kim [7] 建立了 SIR 计算机病毒模型, 将总的连入网络的计算机分为三类: 易感计算机  $S$ 、感染计算机  $I$  和免疫计算机  $R$ . SIR 模型的改进之处在于增加了一个恢复状态, 通过反病毒措

施将感染计算机转化为免疫计算机, 建立经典的 SIR 计算机病毒模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases} \quad (1.1)$$

这里  $\beta$  代表易感机和感染机之间的病毒传播率,  $\gamma$  是移除率. 随后, Ren [8] 考虑到网络系统中如果没有外部计算机的连入是不现实的, 因此提出以下的 SIR 计算机病毒模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \varepsilon I - dI, \\ \frac{dR}{dt} = \varepsilon I - dR, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $b$  代表网络中计算机的输入率,  $\varepsilon$  代表反病毒的恢复率,  $d$  代表网络断开率,  $\lambda$  代表网络的病毒感染率. 对于有计算机处于感染状态但仍处于潜伏期的情况, 考虑其暂时是不具有传染性, Gan [9] 等提出 SIRS 模型. Mishra [10] 等对 SIR 计算机病毒模型进行了改进, 增加了潜伏状态, 提出了 SEIR 模型. Yang [11] 等学者提出了具有时滞的计算机病毒模型, 在 SIR 模型中加入了时滞, 给出了平衡点的稳定性情况, 同时将时滞作为分支参数, 讨论了分支的动力学情况. 此外任建国 [12] 提出了一类具有固定时滞的计算机病毒模型, 既考虑了病毒爆发具有一定的潜伏期, 同时将软件杀毒视作具有临时免疫, 此时的免疫也可看作具有时滞. 根据现实中某些病毒具有“可触发性”, Marsden [13] 提出了具有变时滞的计算机病毒模型, 即病毒的爆发期并不是固定的. Mishra [14] 等根据安装杀毒软件或者采取人为措施隔离感染计算机的策略, 提出 SEIQRS 模型. Nyamoradi [15] 提出了一个带有分段恢复率的 SIR 计算机病毒模型, 由于只适合单一病毒的传播规律, 因此 SIR 模型存在一定的局限性, 当考虑计算机不能处于永久免疫时, 暂时免疫后的计算机仍为易感计算机.

冯丽萍 [16] 等学者考虑计算机在未感染病毒前就实行反病毒措施, 因此提出了安装反病毒软件的 SIR 及 SIRS 模型, 并且用数值实验验证了对计算机安装防病毒软件能够有效控制病毒的传播. 叶晓梦 [17] 在此基础上, 认为用户是否预先安装杀毒软件, 取决于用户危机意识, 危机意识又由感染机的数量决定. 当感染机的数量较少时, 主动安装杀毒软件的增长率并不明显, 设为一个常数, 当感染机数量较多时, 增长率便会增大, 于是引入了分段治疗率函数. 为了控制网络病毒在的传播, 我们将在文献 [11] 的基础上, 考虑安装杀毒软件以及重装系统策略.

本文的安排主要如下: 第 2 部分为模型的建立与准备, 第 3 部分为全局动力学, 最后给出模型的数值模拟.

## 2. 模型建立与准备

由于计算机和手机病毒传播模式的相似性, 考虑 SIR 计算机病毒模型 [11] 的安装反病毒软件和任建国 [12] 的重装系统策略. 如果不考虑感染机以及易感机的经济阈值, 实行连续的控制策略会造成资源的浪费以及经济损失. 因此本文考虑实行不连续控制策略, 并且是否实施不连续控制策略, 取决于网络对病毒的警觉程度, 警觉程度由感染计算机和易感机的数量表征. 将连入网络中的设备分

为: 易感机( $S$ ), 感染机( $I$ ), 免疫机( $R$ ), 建立模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS - \varphi_1(S, I) \mu_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - dI - \varphi_1(S, I) \mu_1 I - \varphi_2(S, I) \mu_2 I, \\ \frac{dR}{dt} = \varphi_1(S, I) \mu_1 S + \varphi_1(S, I) \mu_1 I + \varphi_2(S, I) \mu_2 I - dR, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里  $b > 0$  为设备的平均输入率,  $\lambda > 0$  为网络病毒的感染率,  $d \geq 0$  为网络断开率,  $\mu_1 > 0$  为易感机和感染机安装杀毒软件的免疫率,  $\mu_2 > 0$  为感染机重装系统的免疫率, 其中

$$(\varphi_1(S, I), \varphi_2(S, I)) = \begin{cases} (0, 0), & I < I_T, \\ (1, 0), & I > I_T, S < S_T, \\ (1, 1), & I > I_T, S > S_T, \end{cases}$$

为控制函数,  $I_T > 0$  为感染机控制阈值,  $S_T > 0$  为易感机控制阈值. 由于 (2.1) 前 2 个等式独立于  $R$ , 故可考虑如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS - \varphi_1(S, I) \mu_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - dI - \varphi_1(S, I) \mu_1 I - \varphi_2(S, I) \mu_2 I, \end{cases} \quad (2.2)$$

的动力学行为.

记切换边界由  $\Sigma_1 = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S < S_T, I = I_T\}$ ,  $\Sigma_2 = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S > S_T, I > I_T\}$ , 和  $\Sigma_3 = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S = S_T, I > I_T\}$  构成, 于是  $\mathbb{R}_+^2 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0\}$  被切换线划分为以下 3 个子区域:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : I < I_T\}, \\ G_2 &= \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S < S_T, I > I_T\}, \\ G_3 &= \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S > S_T, I > I_T\}. \end{aligned}$$

令  $x = (S, I)$ , 于是

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} F_1(x), & x \in G_1, \\ F_2(x), & x \in G_2, \\ F_3(x), & x \in G_3. \end{cases}$$

系统(2.2)在  $G_1$  内的系统为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - dI, \end{cases} \quad (2.3)$$

得到无病平衡点  $E_0^1 = (S_0^1, 0) = (\frac{b}{d}, 0)$ , 地反病平衡点  $E_1 = (S_1, I_1) = (\frac{d}{\lambda}, \frac{b}{d} - \frac{d}{\lambda})$ , 经过简单计算得基本再生数  $R_1 = \frac{b\lambda}{d^2}$ .

系统(2.2)在  $G_2$  内的系统为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS - \mu_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - dI - \mu_1 I. \end{cases} \quad (2.4)$$

无病平衡点  $E_0^2 = (S_0^2, 0) = \left(\frac{b}{\mu_1+d}, 0\right)$ , 地方病平衡点  $E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{\mu_1+d}{\lambda}, \frac{b\lambda - (\mu_1+d)^2}{\lambda(\mu_1+d)}\right)$ , 基本再生数  $R_2 = \frac{b\lambda}{(\mu_1+d)^2}$ .

系统(2.2)在  $G_3$  内的系统为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - dS - \mu_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - dI - \mu_1 I - \mu_2 I. \end{cases} \quad (2.5)$$

无病平衡点  $E_0^3 = (S_0^3, 0) = \left(\frac{b}{\mu_1+d}, 0\right)$ , 地方病平衡点  $E_3 = (S_3, I_3) = \left(\frac{\mu_1+\mu_2+d}{\lambda}, \frac{b\lambda - (\mu_1+\mu_2+d)(\mu_1+d)}{\lambda(\mu_1+\mu_2+d)}\right)$ , 基本再生数  $R_3 = \frac{b\lambda}{(\mu_1+\mu_2+d)(\mu_1+d)}$ .

对于子系统的动力学, 我们将以命题的形式给出, 证明方法见参考文献 [18].

**命题2.1.** 对于子系统, 当  $R_i \leq 1$  时,  $i = 1, 2, 3$ , 无病平衡点  $E_0^i$  在  $\mathbb{R}_+^2$  内是全局渐近稳定的; 当  $R_i > 1$  时,  $i = 1, 2, 3$ , 地方病平衡点  $E_i$  在  $\mathbb{R}_+^2$  是全局渐近稳定的.

由于切换线附近的动力学行为对不连续动力系统的全局动力学分析具有重要作用, 所以需要分析系统 (2.2) 在切换线上区域  $\Sigma_1, \Sigma_2$  和  $\Sigma_3$  的动力学行为, 切换线部分分为穿越区域和滑模区域. 对于  $\Sigma_1$  部分, 设  $H = I - I_T$ , 则  $\nabla H = (0, 1)$ , 如果李导数 [19]  $L_{F_1H} > 0, L_{F_2H} < 0$ , 那么  $\Sigma_1$  上存在滑模区域, 计算得到  $L_{F_1H} = (\lambda S - d) I_T, L_{F_2H} = (\lambda S - d - \mu_1) I_T$ , 于是滑模区域为

$$\Sigma_{S_1} = \{(S, I) \in \Sigma_1 \mid S_1 < S < \min\{S_2, S_T\}\},$$

当  $S < S_1$  或  $S > \min\{S_2, S_T\}$  时  $\Sigma_1$  上不存在滑模区域,  $\Sigma_1$  为穿越区域. 由 Filippov 凸方法 [20] 或等效替代法 [18], 滑模方程为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda S^2 - \lambda I_T S + b = f(S), \\ I = I_T, \end{cases} \quad (2.6)$$

函数  $f(S) = 0$  存在唯一的正根,  $S_{p_1} = \frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$ , 其中  $A_1 = -\lambda, B_1 = -\lambda I_T, C_1 = b$ , 当  $E_{P_1} = (S_{P_1}, I_T) \in \Sigma_{S_1}$  时, 在滑模区域  $\Sigma_{S_1}$  上存在伪平衡点  $E_{P_1}$ .

**命题2.2.** 当  $E_{P_1} = (S_{P_1}, I_T) \in \Sigma_{S_1}$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是稳定的.

**证明.** 当  $E_{P_1} = (S_{P_1}, I_T) \in \Sigma_{S_1}$ , 由函数  $f(S)$  的性质, 当  $S_1 < S < S_{P_1}, f(S) > 0$ , 当  $S_{P_1} < S < \min\{S_2, S_T\}$  时,  $f(S) < 0$ , 于是伪平衡点  $E_{P_1}$  在滑模区域  $\Sigma_{S_1}$  上是稳定的.  $\square$

对于  $\Sigma_2$  部分, 如果  $L_{F_1H} > 0, L_{F_3H} < 0$ , 那么  $\Sigma_2$  上存在滑模区域, 这里  $L_{F_3H} = (\lambda S - d - \mu_1 - \mu_2) I_T$ , 于是滑模区域为

$$\Sigma_{S_2} = \{(S, I) \in \Sigma_2 \mid \max\{S_1, S_T\} < S < S_3\},$$

当  $S < \max\{S_1, S_T\}$  或  $S > S_3$  时  $\Sigma_2$  上不存在滑模区域,  $\Sigma_2$  为穿越区域. 由 Filippov 凸方法 Filippov AF1988 或等效控制方法 [18], 滑模方程为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\lambda\mu_1}{\mu_1+\mu_2} S^2 + \left(\frac{d\mu_1}{\mu_1+\mu_2} - d - \lambda I_T\right) S + b = g(S), \\ I = I_T, \end{cases} \quad (2.7)$$

函数  $g(S) = 0$  存在唯一的正根,  $S_{P_2} = \frac{-B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}}{2A_2}$ , 这里  $A_2 = -\frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ ,  $B_2 = \left(\frac{d\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} - d - \lambda I_T\right)$ ,  $C_2 = b$ , 当  $E_{P_2} = (S_{P_2}, I_T) \in \Sigma_{S_2}$  时, 在滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  上存在伪平衡点  $E_{P_2}$ .

**命题2.3.** 当  $E_{P_2} = (S_{P_2}, I_T) \in \Sigma_{S_2}$  时, 伪平衡点  $E_{P_2}$  是稳定的.

**证明.** 当  $E_{P_2} = (S_{P_2}, I_T) \in \Sigma_{S_2}$ , 由函数  $g(S)$  的性质, 当  $\max\{S_1, S_T\} < S < S_{P_2}$ ,  $g(S) > 0$ , 当  $S_{P_2} < S < S_3$  时,  $g(S) < 0$ , 于是伪平衡点  $E_{P_2}$  在滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  上是稳定的.  $\square$

对于  $\Sigma_3$  部分, 设  $G = S - S_T$ , 则有  $\nabla G = (1, 0)$ , 如果  $L_{F_2G} > 0$ ,  $L_{F_3G} < 0$ ,  $\Sigma_3$  上存在滑模区域, 经过计算此时出现矛盾, 于是  $\Sigma_3$  上皆为穿越区域.

### 3. 全局动力学

在本文, 我们只讨论  $R_0^i > 1, i = 1, 2, 3$ , 的情况以确保各个子区域的地方病平衡点存在, 于是无论  $I_T > 0$  取任何值, 无病平衡点  $E_0^1$  都是鞍点,  $E_0^2, E_0^3$  都是虚平衡点. 由  $S_1 < S_2 < S_3$ , 因此根据易感者阈值  $S_T$  与  $S_1, S_2, S_3$  的相对大小关系, 全局动力学分为四种情况进行讨论.

**情形1:**  $S_T < S_1$

这里先验证滑模区域的存在性, 由于  $S_T < S_1$ , 所以  $\Sigma_1$  上不存在滑模区域.  $\Sigma_2$  上的滑模区域为  $\Sigma_{S_2} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_1 < S < S_3, I = I_T\}$  滑模方程为 (2.7).

**命题3.1.** 当  $S_T < S_1, I_3 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_2} \in \Sigma_{S_2}$  时是稳定的.

**证明.** 当  $S_1 < S_{P_2} < S_3$  时, 存在伪平衡点  $E_{P_2} = (S_{P_2}, I_T)$ . 此外由连续函数零点存在定理知, 当  $g(S_1) > 0$ , 且满足  $g(S_3) < 0$  时, 即当  $I_3 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_2}$  存在. 也就是  $E_{P_2}$  存在, 等价于  $I_3 < I_T < I_1$ . 另外由命题 2.3 伪平衡点  $E_{P_2}$  存在时是稳定的.  $\square$

由于  $S_T < S_1 < S_2 < S_3$ , 故对于任意的  $I_T$ , 地方病平衡点  $E_2$  都是虚平衡点. 又  $I_3 < I_1$ , 故分为三种情形.

**情形1.a:**  $I_T < I_3 < I_1$

此时地方病平衡点  $E_1$  为虚平衡点, 地方病平衡点  $E_3$  为实平衡点. 根据命题 2.1 已经排除了  $G_i (i = 1, 2, 3)$  内的闭轨线的存在性, 接下来排除系统 (2.2) 的滑模极限环的存在性.

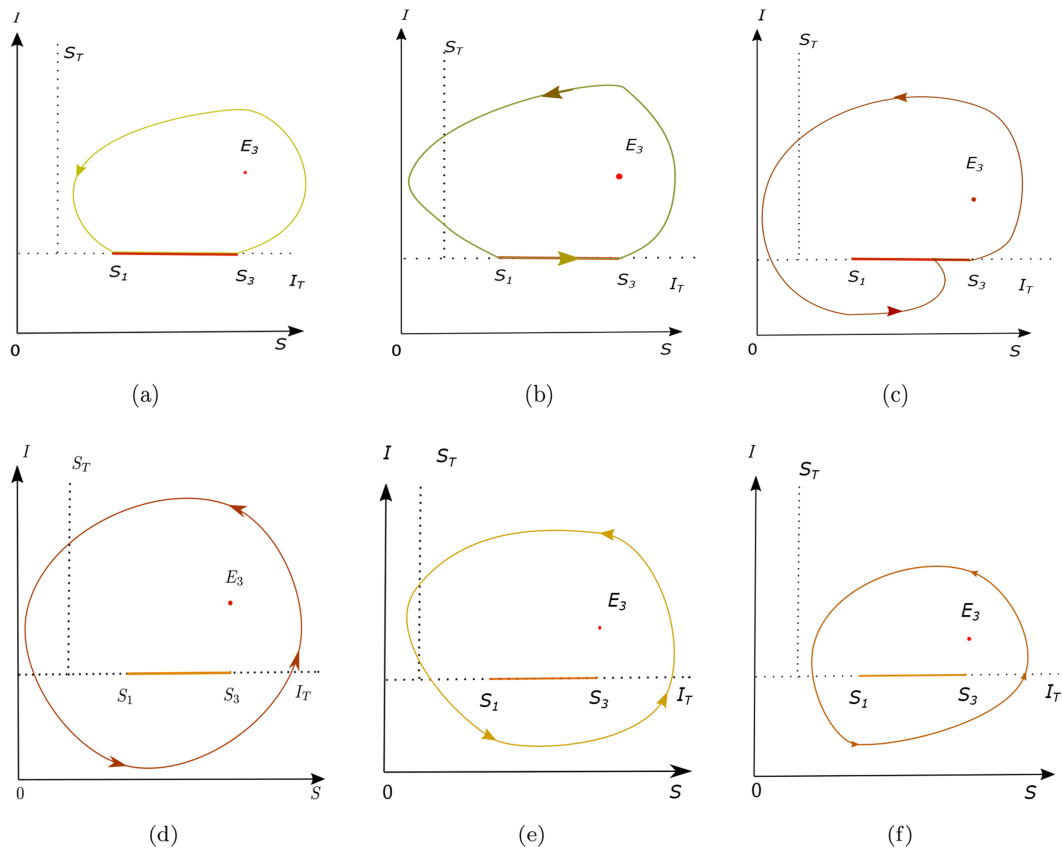
**引理3.2.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_T < I_3 < I_1$  时, 系统 (2.2) 不存在图 1(a) 的滑模极限环.

**证明.** 利用反证法 [21], 不失一般性, 对于图 1(a), 假设存在包含平衡点  $E_3$  的一个滑模极限环  $\Gamma$ , 则轨线  $\Gamma$  经过切点  $(S_3, I_T)$  并且再次到达  $\bar{\Sigma}_{S_2}$ . 由于  $E_3$  在  $G_3$  内的全局渐近稳定性,  $G_3$  内的解轨线将趋于  $E_3$ , 于是闭轨  $\Gamma$  外部的轨线将趋于  $E_3$ , 这与解的唯一性矛盾, 所以从  $(S_3, I_T)$  出发的轨线不会再次到达  $\bar{\Sigma}_{S_2}$ , 即不存在滑模极限环. 图 1(b), 图 1(c) 排除滑模极限环的情况类似, 不再赘述.  $\square$

接下来排除穿越极限环的存在性, 可能存在的穿越极限环如图 1(d)~(f) 所示.

**引理3.3.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_T < I_3 < I_1$  时, 系统 (2.2) 不存在图 1(d) 的穿越极限环.

**证明.** 不失一般性, 假设存在一个穿越极限环  $\Gamma$ , 如图 2 所示, 令  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ , 其中  $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i, i = 1, 2, 3$ , 令  $U$  为  $\Gamma$  界定的区域, 并且  $U_i = U \cap G_i, i = 1, 2, 3$ . 设点  $D_1 = (D_{11}, I_T)$ ,



**Figure 1.** Nonexistence of limit cycles in Case 1.a

**图 1.** 情况1.a极限环的不存在性

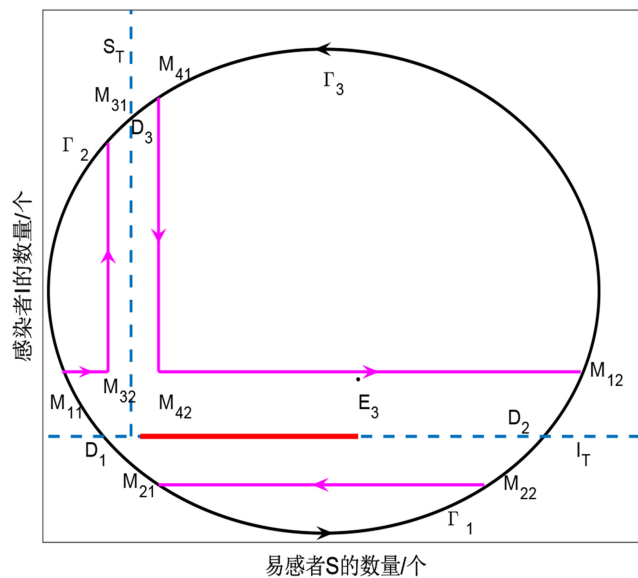
$D_2 = (D_{21}, I_T)$ ,  $D_3 = (S_T, D_{32})$ , 线段  $M_{21}M_{22}$ , 与  $\Gamma_1$  围成的区域为  $\bar{U}_1$ ,  $M_{11}M_{32}$ ,  $M_{32}M_{31}$  与  $\Gamma_2$  围成的区域为  $\bar{U}_2$ ,  $M_{41}M_{42}$ ,  $M_{42}M_{12}$  与  $\Gamma_3$  围成的区域为  $\bar{U}_3$ , 且设  $M_{11}M_{12} = I_T + \varepsilon$ ,  $M_{21}M_{22} = I_T - \varepsilon$ ,  $M_{31}M_{32} = S_T - \varepsilon$ ,  $M_{41}M_{42} = S_T + \varepsilon$ , 设 Dulac 函数  $B(S, I) = \frac{1}{SI}$ , 则由 Bendixson-Dulac 准则, 我们有

$$\begin{aligned} \iint_U \left( \frac{\partial BF_1}{\partial S} + \frac{\partial BF_2}{\partial I} \right) dSdI &= \sum_{i=1}^3 \iint_{U_i} \left( \frac{\partial BF_{i1}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{i2}}{\partial I} \right) dSdI \\ &= \sum_{i=1}^3 \iint_{U_i} -\frac{1}{S^2I} dSdI < 0, \end{aligned}$$

由格林公式有:

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{U}_1} \left( \frac{\partial BF_{11}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{12}}{\partial I} \right) dSdI &= \oint_{\partial \bar{U}_1} BF_{11}dI - BF_{12}dS \\ &= \int_{\Gamma_1} BF_{11}dI - BF_{12}dS + \int_{M_{21}}^{M_{22}} BF_{11}dI - BF_{12}dS \\ &= - \int_{M_{22}}^{M_{21}} BF_{12}dS, \end{aligned}$$





**Figure 2.** When  $E_3$  is the real equilibrium, exclude the crossing limit cycle in Figure 1(d)

**图 2.** 当  $E_3$  为实平衡点时, 排除图 1(d) 的穿越环

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{U}_2} \left( \frac{\partial BF_{21}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{22}}{\partial I} \right) dSdI &= \oint_{\partial \bar{U}_2} BF_{21}dI - BF_{22}dS = \int_{M_{32}}^{M_{31}} BF_{21}dI - \int_{M_{11}}^{M_{32}} BF_{22}dS, \\ \iint_{\bar{U}_3} \left( \frac{\partial BF_{31}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{32}}{\partial I} \right) dSdI &= \oint_{\partial \bar{U}_3} BF_{31}dI - BF_{32}dS = \int_{M_{41}}^{M_{32}} BF_{31}dI - \int_{M_{42}}^{M_{12}} BF_{32}dS, \\ \sum_{i=1}^3 \iint_{\bar{U}_i} \left( \frac{\partial BF_{i1}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{i2}}{\partial I} \right) dSdI &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \iint_{\bar{U}_i} \left( \frac{\partial BF_{i1}}{\partial S} + \frac{\partial BF_{i2}}{\partial I} \right) dSdI \\ &= \mu_1 \ln \frac{D_{21}}{D_{11}} + \mu_2 \ln \frac{D_{21}}{S_T} - \mu_2 \ln \frac{I_T}{D_{32}} > 0. \end{aligned}$$

出现矛盾. 因此, 排除了包围滑模区域和平衡点  $E_3$  的穿越极限环. 接下来图 1(e), 图 1(f) 情况排除穿越环类似, 不再说明.  $\square$

**定理 3.4.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_T < I_3 < I_1$  时, 地方病平衡点  $E_3$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_T < I_3 < I_1$  时,  $E_3$  是实平衡点且是局部渐近稳定的,  $E_1$  和  $E_2$  为虚平衡点. 此时不连续边界  $\Sigma_1$  上没有滑模区域,  $E_{p_2} \notin \Sigma_{S_2}$ . 由于地方病平衡点  $E_1, E_2$  在子系统  $G_1, G_2$  内是渐近稳定的, 所以从  $G_1, G_2$  出发的轨线在到达切换线之前是趋于地方病平衡点  $E_1$  和  $E_2$  的. 从  $G_1$  出发的轨线或从滑模区域或从穿越区域到达  $G_3$ , 从  $G_2$  出发的轨线或从穿越区域直接到达  $G_3$  或从穿越区域经  $G_1$  再经滑模区域或者穿越区域到达  $G_3$ , 根据引理 3.2 和引理 3.3 可得系统 (2.2) 不存在极限环, 则由  $\Omega$  极限集理论 [20], 从  $\mathbb{R}_+^2$  出发的轨线最终趋于地方病平衡点  $E_3$ , 即  $E_3$  是全局渐近稳定的.  $\square$

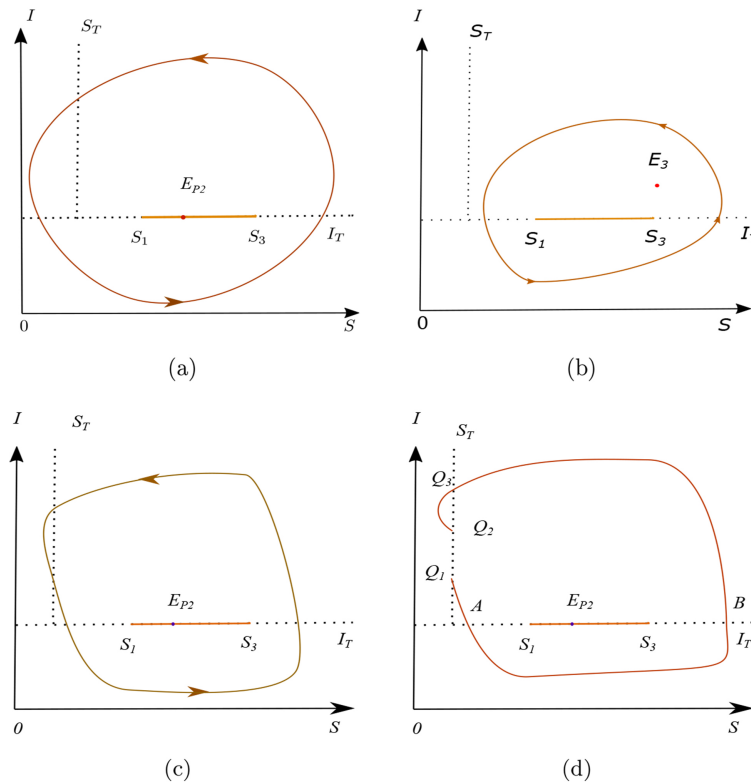


**情形1.b:**  $I_3 < I_T < I_1$

此时地方病平衡点  $E_1, E_2, E_3$  皆为虚平衡点.

**定理3.5.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_3 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_2}$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 由命题 3.1, 此时在滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  上伪平衡点  $E_{P_2}$  存在且是稳定的, 因此系统 (2.2) 不存在包含滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  段的滑模极限环, 否则与伪平衡点  $E_{P_2}$  在滑模区域上的局部稳定性矛盾, 接下来排除穿越极限环的存在性.



**Figure 3.** Nonexistence of crossing limit cycles in Case 1.b

**图 3.** 情况1.b穿越环的不存在性

类似引理 3.3 可以排除 图 3(a), 图 3(b) 的穿越极限环, 接下来将给出排除 图 3 极限环的证明. 不失一般性, 利用反证法, 假设存在 图 3(c) 的极限环. 如 图 3(d) 所示, 假设系统轨线从点  $B = (b, I_T) \in \{(S, I) \in \Sigma_2 | S > S_3\}$  处出发, 经  $Q_3 = (S_T, a_3) \in \{(S, I) \in \Sigma_3 | I > I_T\}$  到达  $Q_2 = (S_T, a_2) \in \{(S, I) \in \Sigma_3 | I > I_T\}$ , 其中  $a_3 > a_2$ . 假设存在点  $Q_1 = (S_T, a_1) \in \{(S, I) \in \Sigma_3 | I > I_T\}$ , 使得从这点出发的轨线到达  $A = (a, I_T) \in \{(S, I) \in \Sigma_2 | S_T < S < S_1\}$ . 接下来我们将证明  $a_2 > a_1$ . 构造函数 [22]

$$g_1(S, I) = V_6(S, I) - V_4(S, I),$$

则有  $\frac{\partial g_1(S, I)}{\partial I} = \frac{I_2 - I_3}{I} > 0$ , 进一步有

$$V_6(S_T, a_3) - V_4(S_T, a_3) < V_6(S_T, a_2) - V_4(S_T, a_2).$$

由 Lyapunov 函数的性质知,

$$V_4(S_T, a_3) = V_4(S_T, a_2),$$

$$V_6(S_T, a_3) = V_6(S_T, a_1),$$

于是有  $V_6(S_T, a_1) < V_6(S_T, a_2)$ .

又  $\frac{\partial V_6(S, I)}{\partial I} = \frac{I - I_3}{I}$ , 且  $a_1 > I_T > I_3, a_2 > I_T > I_3$ , 于是有  $a_1 < a_2$ , 因此不存在图 3(c) 的极限环. 排除滑模极限环和穿越极限环之后, 系统 (2.2) 的  $\Omega$  极限集是  $\{E_{P_2}\}$ , 即系统 (2.2) 任何从  $\mathbb{R}_+^2$  内出发的解随着  $t$  的增加最终都会趋于伪平衡点  $E_{P_2}$ .  $\square$

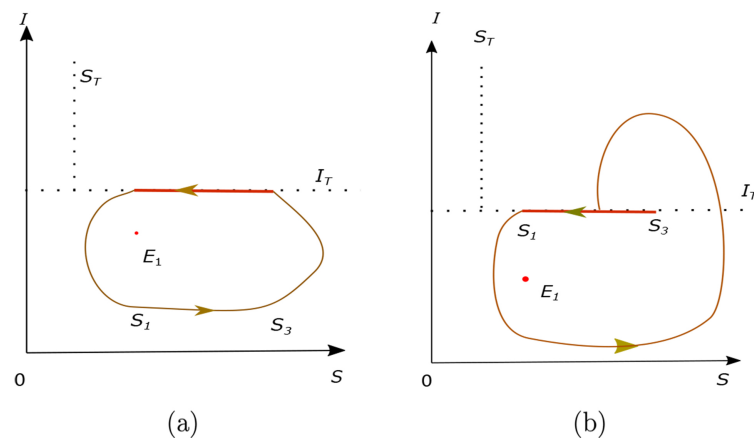
**情形 1.c:**  $I_3 < I_1 < I_T$

此时地方病平衡点  $E_1$  为实平衡点, 地方病平衡点  $E_3$  为虚平衡点.

**定理 3.6.** 当  $S_T < S_1$  且  $I_3 < I_1 < I_T$  时, 实平衡点  $E_1$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 可能存在的穿越极限环见情形 1.a, 排除的方法类似, 这里将不再给出. 可能存在的滑模极限环如图 4 所示, 利用引理 3.2 的方法, 假设存在如图 4 所示的滑模极限环, 那么从切点  $(S_1, I_T)$  出发的轨线, 或经  $G_1$  到达  $\bar{\Sigma}_{S_2}$ , 如图 4(a) 所示, 或是经  $G_1$  区域到达  $G_2$  区域之后再到达  $\bar{\Sigma}_{S_2}$ , 如图 4(b) 所示, 而实平衡点  $E_1$  在  $G_1$  内是全局渐近稳定的, 那么在  $G_1$  内的解轨线都会趋于实平衡点  $E_1$ , 则轨线必与滑模极限环相交, 与解的唯一性矛盾, 于是不存在滑模极限环. 排除滑模极限环以及穿越极限环之后, 地方病平衡点  $E_1$  在  $\mathbb{R}_+^2$  内是全局渐近稳定的.  $\square$

接下来探究其他情形的全局动力学行为, 我们也将采用排除极限环的思路, 再利用系统的  $\Omega$  极限集, 证明方法相同的部分后面就不再赘述.



**Figure 4.** Nonexistence of sliding mode limit cycles in Case 1.c

**图 4.** 情况 1.c 滑模环的不存在性

**情形 2:**  $S_1 < S_T < S_2$

这里先来讨论滑模区域的动力学, 由前面的讨论知道在不连续边界  $\Sigma_3$  上不存在滑模区域, 即在切换线  $\Sigma_3$  上都是穿越区域, 在后续的情形中不再进行说明. 接下来讨论切换线上  $\Sigma_1$  在情形  $S_1 < S_T < S_2$  下的滑模动力学. 根据易感阈值  $S_T$  与  $S_1, S_2$  的相对大小, 此时  $\Sigma_1$  上的滑模区域应为

$\Sigma_{S_1} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_1 < S < S_T, I = I_T\}$  滑模方程为 (2.6).

**命题3.7.** 当  $S_1 < S_T < S_2, H_1 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_1} \in \Sigma_{S_1}$  时是稳定的.

**证明.** 由  $f(S)$  的性质, 当  $S_1 < S_{P_1} < S_T$  时, 存在伪平衡点  $E_{P_1} = (S_{P_1}, I_T)$ . 另外, 当  $S_1 < S_{P_1} < S_T$ , 有  $f(S_1) > 0, f(S_T) < 0$ , 令  $H_1 = \frac{b}{\lambda S_T} - S_T$ , 由连续函数零点存在定理则伪平衡点  $E_{P_1}$  存在的等价条件为  $H_1 < I_T < I_1$ . 此外由命题 2.2, 当  $\Sigma_{S_1}$  上的伪平衡点存在时是稳定的.  $\square$

由 4.3 节的讨论, 根据易感阈值  $S_T$  与  $S_1, S_3$  的相对大小, 此时  $\Sigma_2$  上滑模区域为  $\Sigma_{S_2} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_T < S < S_3, I = I_T\}$ , 此时  $\Sigma_{S_2}$  上的滑模方程为 (2.7).

**命题3.8.** 当  $S_1 < S_T < S_2$  时, 且满足  $I_3 < I_T < H_2$  时, 有伪平衡点  $E_{P_2} \in \Sigma_{S_2}$  是稳定的.

**证明.** 由  $g(S)$  的性质, 根据零点存在定理, 当  $g(S_T) > 0$  且  $g(S_3) < 0$ , 也就是  $I_3 < I_T < \frac{b}{\lambda S_T} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \right)$  时伪平衡点存在, 令  $H_2 = \frac{b}{\lambda S_T} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \right)$ , 即伪平衡点  $E_{P_2}$  存在当且仅当  $I_3 < I_T < H_2$ . 由命题 2.3 当  $\Sigma_{S_2}$  上的伪平衡点存在时是稳定的.  $\square$

为了更好地判断伪平衡点  $E_{P_1}, E_{P_2}$  的存在性, 需要判断  $I_T$ , 以及  $H_1$  和  $H_2$  之间的大小关系, 接下来先讨论  $H_1$  和  $H_2$  的大小关系:

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} S_T < 0,$$

即只要  $S_T > S_1$ , 就有  $H_1 < H_2$ .

进一步地, 当  $S_1 < S_T < S_2 < S_3$  有

$$I_3 = \frac{b}{\lambda S_3} - S_2 < H_1 = \frac{b}{\lambda S_T} - S_T < \frac{b}{\lambda S_1} - S_1 = I_1,$$

即  $I_3 < H_1 < I_1$ .

又当  $S_T > S_1$  时,

$$\begin{aligned} I_1 - H_2 &= \frac{b}{d} - \frac{d}{\lambda} - \frac{b}{\lambda S_T} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \right) \\ &> \frac{b}{d} - \frac{d}{\lambda} - \frac{b}{\lambda S_1} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_1 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

即  $H_2 < I_1$ .

由于此时对于任给的  $I_T$ , 地方病平衡点  $E_2$  都是虚平衡点, 并且  $I_3 < I_1$ , 因此全局动力学根据  $I_T$  与  $I_3, I_1$  的相对大小分为三种情况讨论. 根据感染阈值  $I_T$  的取值范围, 我们将给出当  $S_1 < S_T < S_2$  时, 系统 (2.2) 的动力学结果.

**定理3.9.** 当  $S_1 < S_T < S_2$  时, 根据  $I_T$  不同的取值, 得到如下结论:

(a) 当  $I_T < I_3 < I_1$  时, 实平衡点  $E_3$  是全局渐近稳定的.

(b) 当  $I_3 < I_T < I_1$  时, 分为三种情况:

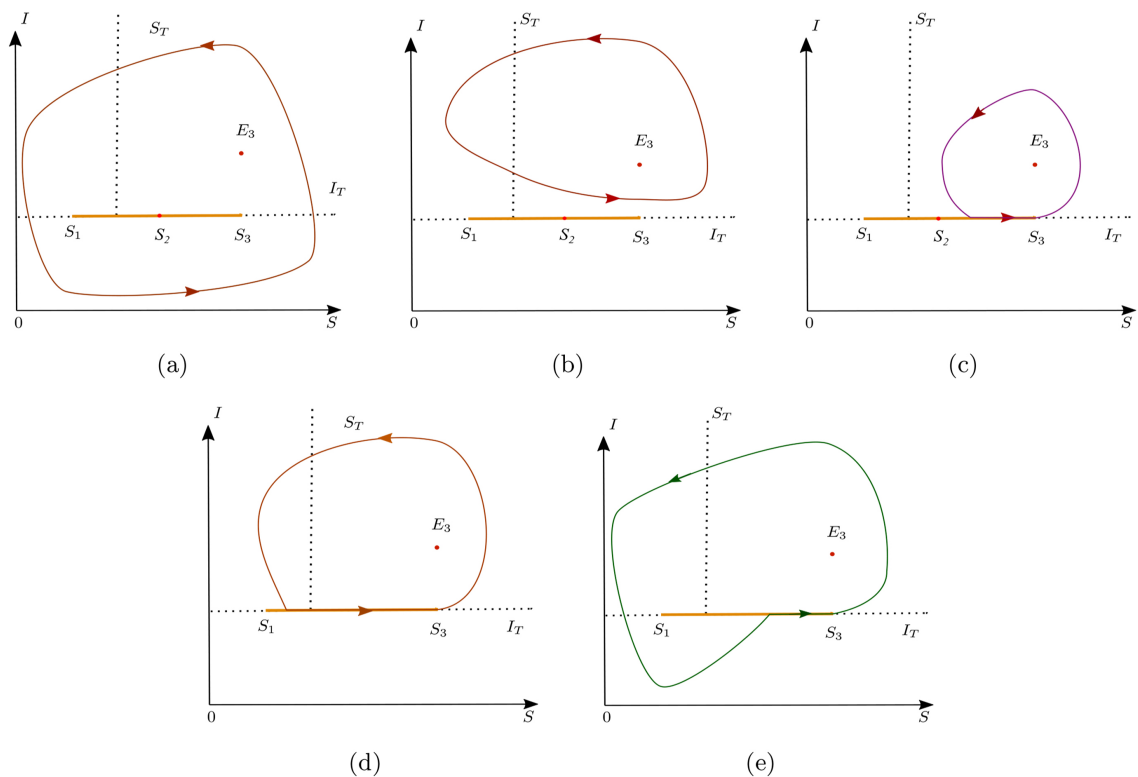
(b.1) 当  $I_3 < I_T < H_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_2}$  是全局渐近稳定的.

(b.2) 当  $H_1 < I_T < H_2$  时, 系统 (2.2) 的轨线最终趋于伪平衡点  $E_{P_1}$  或  $E_{P_2}$ .

(b.3) 当  $H_1 < H_2 < I_T$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是全局渐近稳定的.

(c) 当  $I_3 < I_1 < I_T$  时, 地方病平衡点  $E_1$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 对于情形 (a), 此时地方病平衡点  $E_3$  为实平衡点,  $E_1$  为虚平衡点. 根据命题 3.7, 伪平衡点  $E_{P_1} \notin \Sigma_{S_1}$ , 根据命题 3.8, 伪平衡点  $E_{P_2} \notin \Sigma_{S_2}$ , 此时可能存在的极限环如图 5 所示, 根据引理 3.3 的方法可以排除图 5(a), 图 5(b) 的穿越极限环. 根据引理 3.2 的方法可以排除图 5(c)~(e) 的滑模极限环. 假设存在一个从切点  $(S_2, I_T)$  出发, 再次到达点  $(S, I_T)$ , 这里  $S_1 \leq S \leq S_3$ . 由于地方病平衡点  $E_3$  的局部稳定性, 此时在  $G_3$  区域闭轨外的解轨线将趋于  $E_3$ , 与解的唯一性矛盾, 于是不存在滑模极限环. 从  $G_2$  区域出发的轨线在到达不连续边界之前是趋于  $E_2$  的, 或到达滑模区域经切点  $(S_3, I_T)$  趋于  $E_3$ , 或经区域  $G_1$  到达不连续边界  $\Sigma_2$  再趋于地方病平衡点  $E_3$ . 从  $G_1$  区域出发的轨线, 在到达不连续边界之前是趋于  $E_1$  的, 经滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  或穿越区域趋于  $E_3$ , 于是地方病平衡点  $E_3$  是全局渐近稳定的.



**Figure 5.** Nonexistence of limit cycles in Case 2.a

**图 5.** 情况2.a极限环的不存在性

对于情形 (b.1), 伪平衡点  $E_{P_2} \in \Sigma_{S_2}$  是稳定的. 此时地方病平衡点  $E_2, E_3$  皆为虚平衡点, 可能存在的穿越极限环如图 5(a) 所示, 根据引理 3.3 的方法可以排除. 同时我们知道在滑模区域上,

当  $S < S_{P_2}$  时, 根据向量场分析, 系统的解在滑模区域上从左至右滑动, 当  $S > S_{P_2}$  时, 系统的解在滑模区域上从右往左滑动, 所以此时不存在滑模极限环, 否则与伪平衡点  $E_{P_2}$  在滑模区域上的局部稳定性矛盾. 根据地方病平衡点  $E_i$  在区域  $G_i$  的局部稳定性, 从区域  $G_i$  出发的轨线在到达切换线之前是趋于  $E_i$  的,  $i = 1, 2, 3$ , 到达滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  后趋于伪平衡点  $E_{P_2}$ , 系统的  $\Omega$  极限集是  $\{E_{P_2}\}$ , 所以  $E_{P_2}$  是全局渐近稳定的. 情形 (b.2), (b.3) 类似可证, 这里不再给出.

对于情形 (c), 此时伪平衡点  $E_{P_1} \notin \Sigma_{S_1}$ , 伪平衡点  $E_{P_2} \notin \Sigma_{S_2}$ , 地方病平衡点  $E_1$  为实平衡点,  $E_1, E_2$  为虚平衡点. 可能存在的穿越极限环如图 6 所示, 根据引理 3.3 的方法可以排除图 6(a) 的穿越极限环, 对于图 5((b)~(d)) 的滑模极限环, 根据引理 3.2, 假设存在一个滑模极限环包围地方病平衡点  $E_1$ , 从切点  $(S_1, I_T)$  出发, 经区域  $G_1$  到达  $\Sigma_2$ , 再经区域  $G_2$  或  $G_3$  最后到达点  $(S, I_T)$ , 这里  $S_1 \leq S \leq S_3$ . 由于地方病平衡点  $E_1$  的局部稳定性, 此时在  $G_1$  区域闭轨外的解轨线将趋于  $E_1$ , 与解的唯一性矛盾, 所以  $E_1$  是全局渐近稳定的.  $\square$

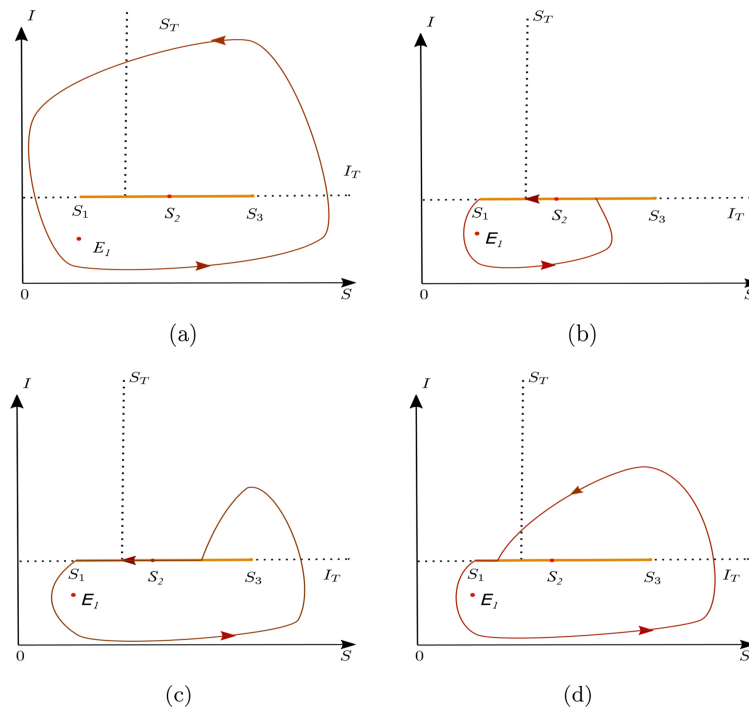


Figure 6. Nonexistence of limit cycles in Case 2.c

图 6. 情形2.c极限环的不存在性

**情形3:**  $S_2 < S_T < S_3$

根据  $S_T$  的取值范围, 此时  $\Sigma_1$  上的滑模区域为  $\Sigma_{S_1} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_1 < S < S_2, I = I_T\}$ , 由前面的讨论,  $\Sigma_{S_1}$  上的滑模方程为 (2.6), 伪平衡点  $E_{P_1}$  存在当且仅当  $S_1 < S_{P_1} < S_2$ .

此时  $\Sigma_2$  上的滑模区域为  $\Sigma_{S_2} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_T < S < S_3, I = I_T\}$ .  $\Sigma_{S_2}$  上的滑模方程为 (2.7), 伪平衡点  $E_{P_2}$  存在当且仅当  $S_T < S_{P_2} < S_3$ .

由于  $I_3 < I_2 < I_1$ , 因此全局动力学分为 4 种情况, 在给出定理之前我们先给出两个命题和一个引理.

**命题3.10.** 当  $S_2 < S_T < S_3$  时, 且满足  $I_2 < I_T < I_1$  时, 有  $E_{P_1} \in \Sigma_{S_1}$ , 并且伪平衡点  $E_{P_1}$  是稳定的; 当  $S_2 < S_T < S_3$  时, 且满足  $I_3 < I_T < H_2$  时, 有  $E_{P_2} \in \Sigma_{S_2}$ , 并且伪平衡点  $E_{P_2}$  是稳定的.

**证明.** 由连续函数零点存在定理, 当  $f(S_1) > 0$  且  $f(S_2) < 0$  时伪平衡点  $E_{P_1}$  存在, 也就是满足  $I_2 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点存在, 由命题 2.2, 伪平衡点  $E_{P_1}$  在滑模区域上是稳定的.

由  $g(S)$  的性质, 当  $g(S_T) > 0$  且  $g(S_3) < 0$  时伪平衡点存在, 也就是  $I_3 < I_T < \frac{b}{\lambda S_T} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \right)$  时伪平衡点  $E_{P_2}$  存在, 即伪平衡点存在当且仅当  $I_3 < I_T < H_2$ , 由命题 2.3, 伪平衡点  $E_{P_2}$  在滑模区域上是稳定的.  $\square$

**命题3.11.** 当  $I_3 < I_T < I_2 < I_1$  时, 不连续边界交点  $E_T = (S_T, I_T)$  处的向量场, 利用微分包含定义 [20] 不连续边界处点  $(S_T, I_T)$  的向量场方程为

$$F(S_T, I_T) = l_1 F_1(S_T, I_T) + l_2 F_2(S_T, I_T) + l_3 F_3(S_T, I_T), l_1, l_2, l_3 \in (0, 1),$$

且有  $l_1 + l_2 + l_3 = 1$ . 当  $(S_T, I_T)$  为系统 (2.2) 的平衡点时, 即  $(0, 0) \in F(S_T, I_T)$ , 得到

$$\begin{cases} S_T = \frac{1}{\lambda} [d + (l_2 + l_3)\mu_1 + l_3\mu_2], \\ I_T = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{b}{S_T} - d - (l_2 + l_3)\mu_1 \right]. \end{cases}$$

**引理3.12.** 当  $S_2 < S_T < S_3$ , 且  $I_3 < H_2 < I_T$  时,  $E_T$  不是系统 (2.2) 的平衡点.

**证明.** 用反证法证明, 不失一般性, 假设  $E_T$  是系统 (2.2) 的平衡点. 当  $(0, 0) \in F(S_T, I_T)$  时, 意味着

$$\frac{1}{\lambda} \left[ \frac{b}{S_T} - d - (l_2 + l_3)\mu_1 \right] > \frac{b}{\lambda S_T} - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \right),$$

于是有

$$\begin{aligned} d + (l_2 + l_3)\mu_1 &< \frac{d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} S_T \\ &= d + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} [(l_2 + l_3)\mu_1 + l_3\mu_2], \end{aligned}$$

进而有

$$(l_2 + l_3)\mu_2 < l_3\mu_2,$$

产生矛盾, 即说明  $E_T$  此时不是系统 (2.2) 的平衡点.  $\square$

**定理3.13.** 当  $S_2 < S_T < S_3$  时, 根据  $I_T$  的取值, 得到以下结论:

(a) 当  $I_T < I_3 < I_2 < I_1$  时, 系统 (2.2) 的轨线随着  $t$  的增加将趋于地方病平衡点  $E_2$  或  $E_3$ .

(b) 当  $I_3 < I_T < I_2 < I_1$  时, 分为三种情况:

(b.1) 当  $(0, 0) \notin F(S_T, I_T)$ , 且  $I_3 < I_T < H_2 < I_2$  时, 系统 (2.2) 的解随着时间  $t$  的增加或趋于实平衡点  $E_2$  或趋于伪平衡点  $E_{P_2}$ .

(b.2) 当  $I_3 < H_2 < I_T < I_2$  时, 地方病平衡点  $E_2$  是全局渐近稳定的.

(b.3) 当  $I_3 < I_T < I_2 < H_2$  时, 系统 (2.2) 的解随着时间  $t$  的增加最终趋于地方病平衡点  $E_2$  或伪平衡点  $E_{P_2}$ .

(c) 当  $I_3 < I_2 < I_T < I_1$  时, 分为三种情况:

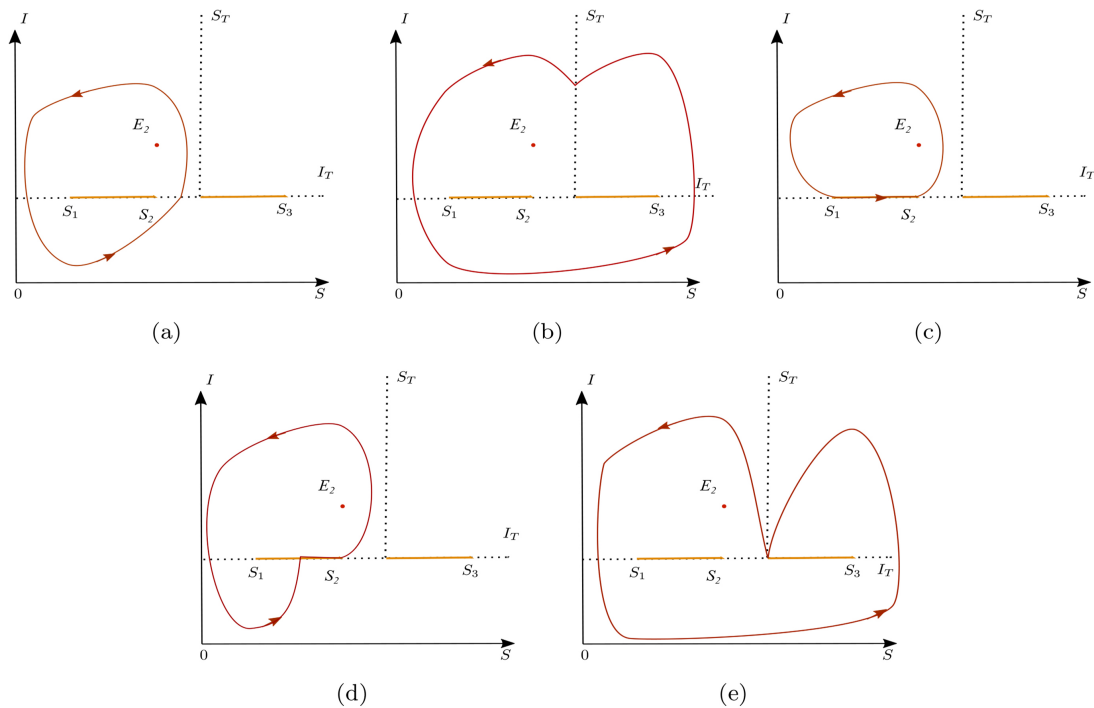
(c.1) 当  $(0, 0) \notin F(S_T, I_T)$ ,  $I_2 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是全局渐近稳定的.

(c.2) 当  $I_3 < I_2 < I_T < H_2 < I_1$  时, 系统 (2.2) 的解随着时间  $t$  的增加最终或趋于伪平衡点  $E_{P_1}$ , 或趋于伪平衡点  $E_{P_2}$ .

(c.3) 当  $I_3 < I_2 < H_2 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 这里我们只给出 (b.2) 和 (c.1) 的证明, 其他情形的证明与前面类似.

对于情形 (b.2), 此时,  $E_3$  为虚平衡点,  $E_2$  为实平衡点,  $E_1$  为虚平衡点. 根据命题 3.10 此时伪平衡点  $E_{P_1} \notin \Sigma_{S_1}$ ,  $E_{P_2} \in \Sigma_{S_2}$ . 根据引理 3.12, 知  $E_T$  不是系统 (2.2) 的平衡点. 可能存在的极限环如图 7 所示, 利用引理 3.2 可以排除图 7(a), 图 7(b), 图 7(e) 的穿越极限环. 由于伪平衡点  $E_{P_1}$  在滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  上的局部稳定性, 不存在包含滑模区域  $\Sigma_{S_2}$  段的滑模极限环, 应用引理 3.3 的方法, 假设存在从切点  $(S_2, I_T)$  经区域  $G_2$  直接到达  $\bar{\Sigma}_{S_1}$ , 或经  $G_2$  到达  $G_1$  之后再达到区域  $\bar{\Sigma}_{S_1}$ , 与  $E_2$  在  $G_2$  内的局部稳定性矛盾, 于是可以排除系统 (2.2) 极限环的存在性, 地方病平衡点  $E_2$  是全局渐近稳定的.



**Figure 7.** Nonexistence of limit cycles in Case 3.b

**图 7.** 情形3.b极限环的不存在性

对于情形 (c.1), 此时地方病平衡点  $E_1, E_2, E_3$  皆为虚平衡点. 如图 8 所示, 给出可能存在的极限环. 由引理 3.3 的方法可以排除穿越极限环的存在性, 与前面的证明类似, 这里不再赘述, 我们



将给出排除滑模极限环的证明. 当  $(0,0) \notin F(S_T, I_T)$  时, 假设存在如图 8(c), 图 8(d) 两种滑模极限环, 这里我们将利用反证法 [23] 的方法排除图 8(c) 的滑模极限环, 图 8(d) 的证明类似.

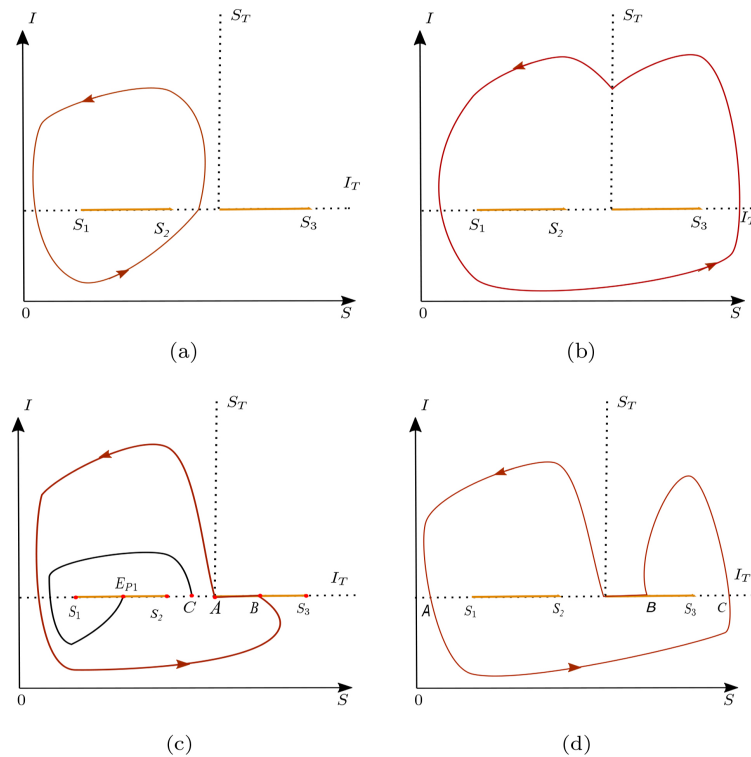


Figure 8. Nonexistence of limit cycles in Case 3.c

图 8. 情形 3.c 极限环的不存在性

利用反证法, 如图 8(c) 所示, 不失一般性, 假设存在一个闭轨道从  $A(S_T, I_T)$  出发, 到达点  $B(S_B, I_T)$ , 其中  $S_B > S_T$ . 根据命题 3.10, 此时  $E_{P_1} \in \Sigma_{S_1}$ , 并且伪平衡点  $E_{P_1}$  是稳定的, 并且满足  $S_1 < S_{P_1} < S_2$ , 容易得到存在一个点  $C(S_C, I_T)$ ,  $S_2 < S_C < S_T$ , 使得从点  $C$  出发的轨线最终到达伪平衡点  $E_{P_1}(S_{P_1}, I_T)$ , 于是对于任意点  $(S_0, I_T)$ , 其中  $S_C < S_0 < S_T$  出发的轨线, 经过区域  $G_2$  都会再次到达切换线上的点  $(S, I_T)$ , 满足  $S_{P_1} < S < S_B$ , 于是可以构造一个 Poincaré 映射:

$$P(S_0) = S,$$

我们将后继函数定义为:

$$d(S_0) = P(S_0) - S_0.$$

容易知道后继函数在  $[S_C, S_T]$  是一个连续函数, 且由  $P(S_C) = S_{P_1}$ ,  $P(S_T) = S_B$ , 有  $d(S_C) = S_{P_1} - S_C < 0$ ,  $d(S_T) = S_B - S_T > 0$ , 于是根据闭区间上连续函数的零点存在定理, 存在  $S^* \in (S_C, S_T)$ , 使得  $d(S^*) = 0$ , 即有  $P(S^*) = S^*$ , 这就说明系统存在穿越极限环, 应用引理 3.2 的方法可排除穿越极限环的存在性, 产生矛盾, 于是排除了图 8(c) 的滑模极限环. 于是当  $(0,0) \notin F(S_T, I_T)$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是全局渐近稳定的.  $\square$

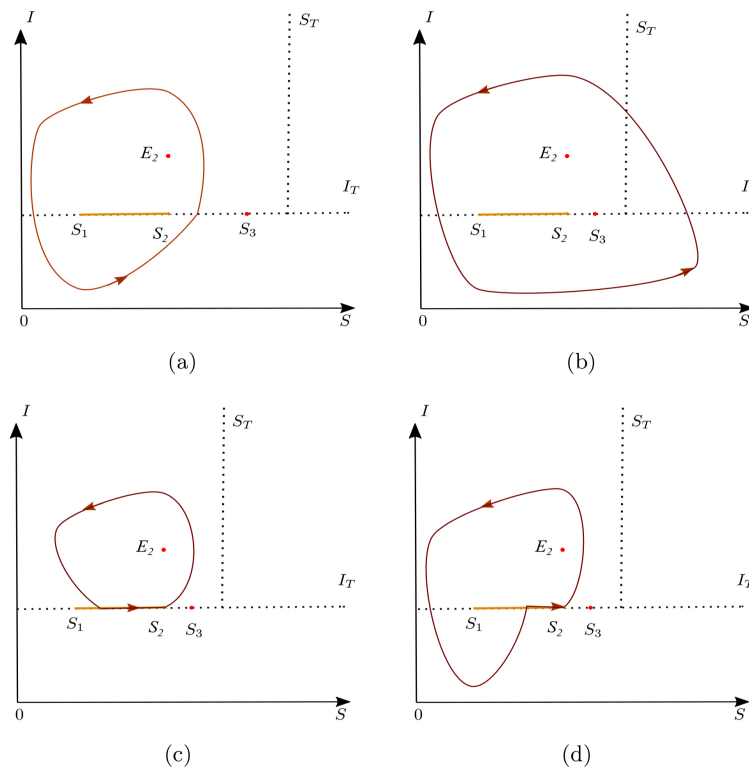
**情形4:**  $S_T > S_3$

此时代无论  $I_T$  取任何值, 地方病平衡点  $E_3$  皆为虚平衡点, 此时  $\Sigma_2$  上没有滑模区域,  $\Sigma_1$  上的滑模区域为  $\Sigma_{S_1} = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_1 < S < S_2, I = I_T\}$ , 滑模方程为(2.6), 伪平衡点  $E_{P_1}$  存在且稳定当且仅当  $I_2 < I_T < I_1$ . 下面以定理的形式给出所有的动力学情况.

**定理3.14.** 当  $S_T > S_3$  时, 根据  $I_T$  的取值, 故此分为以下三种情况:

- (a) 当  $I_T < I_2 < I_1$  时, 地方病平衡点  $E_2$  是全局渐近稳定的.
- (b) 当  $I_2 < I_T < I_1$  时, 伪平衡点  $E_{P_1}$  是全局渐近稳定的.
- (c) 当  $I_2 < I_1 < I_T$  时, 地方病平衡点  $E_1$  是全局渐近稳定的.

**证明.** 对于情形 (a), 此时地方病平衡点  $E_2$  为实平衡点,  $E_1$  为虚平衡点, 伪平衡点  $E_{P_1} \notin \Sigma_1$ , 可能存在的极限环如 图 9 所示. 对于 图 9(a), 图 9(b) 的穿越极限环, 根据引理 3.3 的方法, 运用 Bendixson-Dulac 准则可以排除. 由于地方病平衡点  $E_2$  的局部稳定性, 假设存在如 图 9(c), 图 9(d) 的滑模极限环, 从切点  $(S_2, I_T)$  出发的解轨线, 经区域  $G_2$  直接到达  $\bar{\Sigma}_{S_1}$ , 或经  $G_2$  到达  $G_1$  之后再达到区域  $\bar{\Sigma}_{S_1}$ , 则闭轨外  $G_2$  内的解轨线不能趋于  $E_2$ , 与  $E_2$  的局部稳定性矛盾, 所以不存在滑模极限环. 根据  $E_1$  和  $E_3$  的局部稳定性, 从区域  $G_3$  区域出发的轨线经穿越区域  $\Sigma_3$  趋于  $E_3$ , 从区域  $G_1$  出发的轨线或到达滑模区域  $\Sigma_{S_1}$  经切点  $(S_2, I_T)$  趋于  $E_1$ , 或从穿越区域或者  $G_3$  区域趋于  $E_1$ , 于是地方病平衡点  $E_2$  是全局渐近稳定的, 情形 (b), (c) 类似可证. □



**Figure 9.** Nonexistence of limit cycles in Case 4.a

**图 9.** 情形4.a极限环的不存在性

Table 1. Parameter values

表 1. 参数取值

情形 \ 参数	$b$	$\lambda$	$d$	$\mu_1$	$\mu_2$	$S_T$	$I_T$
情形1.a	5	0.2	0.4	0.15	0.8	1.8	0.6
情形1.b	5	0.2	0.4	0.2	0.8	1	8
情形1.c	6	0.2	0.4	0.4	0.8	1.8	15
情形2.a	5	0.2	0.4	0.15	0.8	2.5	0.8
情形2.b.1	5	0.2	0.4	0.15	0.8	2.5	5
情形2.b.2	6	0.3	0.2	0.6	0.8	2.5	6
情形2.b.3	6	0.3	0.2	0.6	0.8	2.5	10
情形2.c	4	0.3	0.3	0.3	0.8	1.5	15
情形3.a	6	0.3	0.4	0.4	0.6	4	1.2
情形3.b.1	6	0.3	0.4	0.4	0.6	3	3
情形3.b.2	10	0.3	0.4	0.4	0.6	3.5	9.2
情形3.b.3	6	0.3	0.4	0.4	0.6	3	4
情形3.c.1	6	0.3	0.4	0.4	0.6	3	10
情形3.c.2	9.4	0.3	0.4	0.8	0.6	3.8	5
情形3.c.3	9.4	0.3	0.4	0.8	0.6	4	6
情形3.d	6	0.3	0.4	0.4	0.6	3	15
情形4.a	5	0.2	0.4	0.2	0.8	5	4
情形4.b	5	0.2	0.4	0.2	0.8	8	8
情形4.c	5	0.2	0.4	0.2	0.8	7.5	15

## 4. 结果讨论

通过定性分析,我们排除了滑模极限环和穿越环的存在性,基于以上讨论,我们已经给出了全局动力学的所有情况.在本节中,我们将通过具体的参数取值来验证上一节中定理的结论,具体参数取值见表 1.从实际来说,是没有必要甚至不能做到完全消除病毒的.事实上,将易感机和感染机控制在阈值水平  $S_T$  和  $I_T$  内是可以接受的.需要强调的是,安装杀毒软件和重装系统将电子设备转化为免疫机的概率  $\mu_1$  和  $\mu_2$  对我们控制病毒的传播至关重要,适当的选取值会达到我们的控制目标.在感染机数量超过阈值  $I_T$ ,易感染机未超过阈值  $S_T$  之前,安装杀毒软件起主导作用,当两者数量均超过阈值时,此时只安装杀毒软件已经不能控制病毒的传播,应对感染机先重装系统,再对它进行安装杀毒软件的处理.

## 参考文献

- [1] 贾晶. 信息系统的安全与保密[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [2] Howard, J.D. (1998) An Analysis of Security Incidents on the Internet 1989-1995. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.
- [3] 何卫平. “爱虫”病毒分析及杀毒[J]. 电脑编程技巧与维护, 2000(8): 92-94.
- [4] Cohen, F. (1984) Computer Viruses: Theory and Experiments. *Computers and Security*, **6**, 22-35. [https://doi.org/10.1016/0167-4048\(87\)90122-2](https://doi.org/10.1016/0167-4048(87)90122-2)
- [5] Kephart, J.O., White, S.R. and Chess, D.M. (1993) Computers and Epidemiology. *Spectrum IEEE*, **30**, 20-26. <https://doi.org/10.1109/6.275061>
- [6] Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. (2001) Epidemic Dynamics and Endemic States in Complex Networks. *Physical Review E*, **63**, Article ID: 066117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.066117>
- [7] Kim, J., Radhakrishnan, S. and Dhall, S.K. (2004) Measurement and Analysis of Worm Propagation on Internet Network Topology. *International Conference on Computer Communications and Networks*, Chicago, IL, 11-13 October 2004, 495-500.
- [8] Ren, J., Yang, X., Zhu, Q., Yang, L. and Zhang, C. (2012) A Novel Computer Virus Model and Its Dynamics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 376-384. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.07.048>
- [9] Gan, C., Yang, C., Liu, W., Zhu, Q. and Zhang, X. (2012) Propagation of Computer Virus under Human Intervention: A Dynamical Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2012**, Article ID: 106950. <https://doi.org/10.1155/2012/106950>
- [10] Mishra, B.K. and Pandey, S.K. (2011) Dynamic Model of Worms with Vertical Transmission in Computer Network. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 8438-8446. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.041>
- [11] Ren, J., Yang, X., Yang, L., Xu, Y. and Yang, F. (2012) A Delayed Computer Virus Propagation Model and Its Dynamics. *International Journal of Computer Mathematics*, **45**, 74-79. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.10.003>
- [12] 任建国. 计算机病毒的网络传播机制: 三个新型的动力系统模型[D]: [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2012.
- [13] Marsden, J.E. and Sirovich, L. (1998) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, Berlin.
- [14] Mishra, B.K. and Jha, N. (2010) SEIQRS Model for the Transmission of Malicious Objects in Computer Network. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 710-715. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.06.011>

- [15] Nyamoradi, N. and Javidi, M. (2012) Qualitative and Bifurcation Analysis Using a Computer Virus Model with a Saturated Recovery Function. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **2**, 305-313. <https://doi.org/10.11948/2012022>
- [16] 冯丽萍, 王鸿斌, 冯素琴. 改进的SIR计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1891-1893.
- [17] 叶晓梦, 杨小帆. 基于两阶段免疫接种的SIRS计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2013, 33(3): 739-742.
- [18] Guo, Z., Huang, L. and Zou, X. (2013) Impact of Discontinuous Treatments on Disease Dynamics in an SIR Epidemic Model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **9**, 97-110. <https://doi.org/10.3934/mbe.2012.9.97>
- [19] 陈小艳. 几类Filippov系统与光滑微分系统的定性理论及应用研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2015.
- [20] Filippov, A.F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- [21] 马慧丽, 黄立宏, 王佳伏. 有干预措施的Filippov戒烟模型的全局动力学[J]. 经济数学, 2020, 37(3): 208-213.
- [22] Li, W., Huang, L. and Wang, J. (2020) Dynamic Analysis of Discontinuous Plant Disease Models with A Non-Smooth Separation Line. *Nonlinear Dynamics*, **99**, 1675-1697. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05384-w>
- [23] Li, W., Chen, Y., Huang, L., *et al.* (2022) Global Dynamics of a Filippov Predator-Prey Model with Two Thresholds for Integrated Pest Management. *Chaos, Solitons and Fractals*, **157**, Article ID: 111881. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111881>