Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4089-4109
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117437

分数阶Choquard方程变号解的存在性

高金华

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年6月1日；录用日期：2022年6月24日；发布日期：2022年7月1日

摘 要

分数阶 **Choquard** 方程具有重要的物理背景，是近年非线性分析领域广受关注的问题之一。在本文中，我们研究如下的分数阶 **Choquard** 方程

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = (|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

其中 $s \in (0,1)$，$N \geq 3$，$\mu \in (0,N)$，$2 < p < \frac{2N-\mu}{N-2s}$，“$*$” 代表卷积算子，$(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯算子。通过结合 **Ekeland** 变分原理和隐函数定理，我们证明了 (P) 存在极小能量变号解 w。此外，我们还证明了 w 的能量严格大于基态能量，但严格小于基态能量的两倍。

关键词

分数阶拉普拉斯算子，变号解，**Choquard**方程

Existence of Sign-Changing Solutions for a Fractional Choquard Equation

Jinhua Gao

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 1^{st}, 2022; accepted: Jun. 24^{th}, 2022; published: Jul. 1^{st}, 2022

文章引用: 高金华. 分数阶Choquard方程变号解的存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4089-4109.
DOI: 10.12677/aam.2022.117437

Abstract

With an important physical background, the fractional Choquard equation has attracted great attention from the field of nonlinear analysis in recent years. In this paper, we study the following fractional Choquard equation

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = (|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-2}u, \quad \textbf{in } \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

where $s \in (0,1)$, $N \geq 3$, $\mu \in (0,N)$, $2 < p < \frac{2N-\mu}{N-2s}$, **"$*$" stands for the convolution and** $(-\Delta)^s$ **is the fractional Laplacian operator. By combining the Ekeland variational principle with the implicit function theorem, we prove that the problem** (P) **possesses one least energy sign-changing solution** w**. Moreover, we show that the energy of** w **is strictly larger than the ground state energy and less than twice the ground state energy.**

Keywords

Fractional Laplacian, Sign-Changing Solutions, Choquard Equation

1. 引言和主要结果

Schrödinger 方程通常用来描述粒子在时间与空间中的运动规律, 是量子力学中的基本模型, 在化学、凝聚态物理、非线性光学等领域中也有广泛应用. Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \widetilde{V}(x)\Psi - |\Psi|^{p-1}\Psi, \ \ x \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

广泛出现在凝聚态物理和非线性光学等问题的研究中, 其中 $\hbar$ 是 Planck 常量, i 是虚数单位, 若 $N \geq 2$, 则 $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$; 若 $N = 1, 2$, 则 $1 < p < \infty$. 在物理问题中, 一般出现的是 $p = 3$ 的情形, 此时该方程也被称为 Gross-Pitaevskii 方程.

从方程形式来看, Choquard 方程可视作带有非局部项的 Schrödinger 方程. 本文的目标即是去研究如下带有分数阶拉普拉斯算子的 Choquard 方程的变号解的存在性

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = (|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-2}u,\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

其中 $N \geq 3$, $\mu \in (0, N)$, $2 < p < \frac{2N-\mu}{N-2s}$, "$*$" 表示卷积算子, $(-\Delta)^s$ 是 $s \in (0,1)$ 阶的分数拉普拉斯算子, 它可以描述为 $(-\Delta)^s = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u)$, 其中 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的傅里叶变换.

由于存在非局部项 $(-\Delta)^s u$ 和 $(|x|^{-\mu} * |u|^p)$, 这说明方程 (1.1) 不是一个逐点成立的方程, 因此这样的问题通常被称为非局部问题.

当 $s = 1$, $N = 3$ 且 $\mu = p = 2$ 时, (1.1) 转化为下列 Choquard-Pekar 方程

$$-\Delta u + u = (I_2 * |u|^2)u,\ \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2}$$

这个方程已经出现在各种物理模型的背景中, 由 Choquard 于 1976 年在单组分等离子体的文章中提出 (参见 [1], [2]). 需要指出, 方程 (1.2) 的解与聚焦时间变化的 Hartree 方程

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi = -(I_2 * |\psi|^2)\varphi,\ \ \psi \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$$

的驻波解 $\psi(t,x) = e^{it}u(x)$ 有关.

1996 年, Penrose [3] 提出将 (1.2) 作为自引力物质的模型. 此后, Bahrami [4] 将方程 (1.2) 与 Schrödinger 方程耦合的模型称为非线性的 Schrödinger-Newton 方程. Giulini [5] 指出, 方程 (1.2) 也可以从 Einstein-Klein-Gordon 和 Einstein-Dirac 系统推导出. 更多的物理背景可参见 [6] 及其中的参考文献.

Choquard 方程有如下更一般的形式, 即

$$-\Delta u + V(x)u = (|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-2}u,\ \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.3}$$

在过去的几十年中, 人们对方程 (1.3) 解的存在性和多重性研究取得了一系列研究成果. 例如, 文献 [7] [8] [9] 以及其中的参考文献. 特别地, Alves, Nóbrega 和 Yang [7] 证明了当 $V(x) = \lambda a(x) + 1$ 时, 方程 (1.3) 至少有 $(2^k - 1)$ 个多包解, 并且在 λ 充分大时研究了解的渐近行为. Moroz 和 Van Schaftingen [8] 研究了当 $V(x) = 1$ 时, 方程 (1.3) 基态解的存在性、正则性和正性, 以及基态解的一些定量性质. 最近, Gao 和 Yang [10] 在有界区域上研究了一个类似于 (1.3) 的方程带临界指数的问题.

近期, 人们开始关注方程 (1.3) 的变号解或节点解的存在性和多重性. 如在 [11] 中, Clapp 和 Salazar 在一个对称的外区域上研究了方程 (1.3) 正解的存在性以及具有极小能量的变号解的多重性, 其中 V 是球对称的, 且在无穷远处存在极限. Ye [12] 得到了 (1.3) 的极小能量变号解 (所有变号解中具有最低能量者) 的存在性, 并证明了变号解的能量严格大于基态能量, 且严格小于基态能量的两倍. 当 $V = 1$ 时, 在 [13] 中, 基于极小能量节点解的极大极小刻画和变号 Palais-Smale 序列的紧性分析, Ghimenti 和 Van Schaftingen 建立了下列问题节点解的定性分析

$$-\Delta u + V(x)u = (I_\mu * |u|^p)|u|^{p-2}u,\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $I_\mu : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 表示 Riesz 位势, 定义如下:

$$I_\mu(x) = \frac{\Gamma(\frac{N-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2})\pi^{N/2}2^\mu|x|^{N-\mu}}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. 在 [14] 中, Ghimenti, Moroz 和 Van Schaftingen 考虑以上问题并建立了 $p > 2$ 且 $p \to 2+$ 情形下极小能量节点解的存在性. 对于更多相关结果我们可参见 Moroz 和 Van Schaftingen [6] 及其参考文献.

近年来, 分数阶 Choquard 方程引起了越来越多的关注. 在 [15] 和 [16] 中, d'Avenia, Siciliano 和 Squassina 研究了以下分数阶 Choquard 方程解的正则性、存在性、非存在性、对称性和衰减性

$$(-\Delta)^s u + \omega u = (\mathcal{K}_s * |u|^p)|u|^{p-2}u, \ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

其中 $\mathcal{K}_s = |x|^{s-N}$, $s \in (0, N)$, ω 为正参数. 后来, Chen 和 Liu [17] 研究了当 $\omega = 1$ 且非线性项为 $(1 + a(x))(\mathcal{K}_s * |u|^p)|u|^{p-2}u$ 时, 方程 (1.4) 基态解的存在性, 其中 $a(x)$ 在无穷远处消失. Shen, Gao 和 Yang [18] 研究了 Berestycki-Lions 型假设下分数阶 Choquard 方程的基态解的存在性.

受文献 [12] 和 [19] 启发, 在本文中我们研究了方程 (1.1) 的极小能量变号解的存在性. 我们利用分数阶拉普拉斯算子的 $s-$调和延拓方法, Ekeland 变分原理以及隐函数定理, 通过在 Nehari 流形中所有变号函数构成的子集上求约束, 证明了极小能量变号解的存在性.

在本文中, $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的范数表示为 $\|\cdot\|_p$, $1 \le p < \infty$; C 或 $C_i(i = 1, 2, \cdots)$ 表示逐行变化的正常数. 现在, 我们回顾 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

命题1. *[20](Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 设 θ, $r > 1$, $0 < \mu < N$ 满足 $\frac{1}{\theta} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2$. 若 $g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, 则存在一个与 g, h 无关的常数 $C(\theta, \mu, r, N)$, 使得*

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{g(x)h(y)}{|x-y|^\mu} dxdy \le C(\theta, \mu, r, N)\|g\|_\theta\|h\|_r.$$

注1. *对于 $F(u) = |u|^p$, $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 当*

$$\frac{2N-\mu}{N} \le p \le \frac{2N-\mu}{N-2s}$$

时,

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{F(u(x)F(u(y))}{|x-y|^\mu} dxdy$$

有定义, 其中 $\theta = \frac{2N}{2N-\mu}$.

我们假设势函数 $V(x)$ 满足

(V_1) $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 且 $\inf V(x) \ge a_1 > 0$.

(V_2) 对任意 $M > 0$, 有 $meas\{x \in \mathbb{R}^N | V(x) \le M\} < \infty$.

首先, 我们回顾分数阶 Sobolev 空间. 对于 $s \in (0,1)$, 分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \right\},$$

其范数定义为

$$\|u\|_{H^s} = [u]_{H^s} + \|u\|_2,$$

其中

$$[u]_{H^s} = (\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy)^{\frac{1}{2}}$$

表示 u 的 Gagliardo 半范数. 由 [21] 可知, 分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 可定义如下:

$$(-\Delta)^s u = -\frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy \tag{1.5}$$

且

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_2^2 = \frac{1}{2} C_{N,s} \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy,$$

其中

$$C_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos\xi_1}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1}, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N).$$

为处理方程 (1.1) 中分数阶算子的非局部性, 我们将使用 [22] 中 Caffarelli 和 Silvestre 发展的 $s-$调和延拓方法来研究相应的延拓问题, 这让我们能用经典的局部问题的变分方法来研究问题 (1.1). 对于 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{cases} -div(y^{1-2s}\nabla w) = 0, \ x \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ w = u \,, x \in \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{1.6}$$

的解 $w \in X^s(\mathbb{R}_+^{N+1})$ 称为 u 的 $s-$调和延拓, 记为 $w = E_s(u)$. 在 [22] 中已经证明

$$(-\Delta)^s u = -\frac{1}{k_s} \lim_{y\to 0^+} y^{1-2s} \frac{\partial w}{\partial y}(x,y),$$

其中

$$k_s = 2^{1-2s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)},$$

这里 Γ 是伽马函数. 这里, 空间 $X^s(\mathbb{R}_+^{N+1})$ 和 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 也被视为 $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}})$ 和 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的完备化空间, 在 [23] 中, 范数

$$\|w\|_{X^s} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} k_s |\nabla w|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |2\pi\xi|^{2s} |\mathcal{F}(u(\xi))|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

需要指出的是, 嵌入 $X^s(\mathbb{R}_+^{N+1}) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ 是连续的 (参见 [23]). 基于上述方法, 我们将研究以下问题的极小能量 (变号) 解的存在性

$$\begin{cases} -div(y^{1-2s}\nabla w) = 0,\ x \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = -V(x)w + (|x|^{-\mu} * |w|^p)|w|^{p-2}w,\ x \in \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -\frac{1}{k_s} \lim_{y \to 0^+} y^{1-2s} \frac{\partial w}{\partial y}(x, y).$$

为了方便, 我们省略常数 k_s. 易见, 若 $w \in X^s(\mathbb{R}_+^{N+1})$ 是方程 (1.7) 的解, 则 $u(x) = w(x, 0)$ 是 (1.1) 的解.

由于位势函数 $V(x)$ 的出现, 我们引入如下子空间

$$H := \{w \in X^s(\mathbb{R}_+^{N+1}) \mid \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w(x,0)|^2 dx < \infty\}$$

其中

$$(w, v) = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s} \nabla w \nabla v dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w(x,0) v(x,0) dx$$

范数定义为

$$\|w\| = \left(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s} |\nabla w|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w(x,0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合 (1.7), 能量泛函 $J : H \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$\begin{aligned} J(w) = &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s} |\nabla w|^2 dxdy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w(x,0)|^2 dx \\ &- \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w(x,0)|^p)|w(x,0)|^p dx. \end{aligned} \tag{1.8}$$

利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 用标准的方法可证明 $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ (参见 [8], [9]) 且对于任意 w, $\varphi \in H$,

$$\begin{aligned} \langle J'(w), \varphi \rangle = &\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s} \nabla w \nabla \varphi dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w(x,0) \varphi(x,0) dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w(x,0)|^p)|w(x,0)|^{p-2} w(x,0) \varphi(x,0) dx, \end{aligned} \tag{1.9}$$

这说明能量泛函 J 的临界点是 (1.1) 的弱解.

若 $w \in H$ 是 (1.1) 的一个解且 $w^\pm \neq 0$, 且满足

$$J(w) = \inf\{J(v) | v^\pm \neq 0,\ J'(v) = 0\} \tag{1.10}$$

其中

$$w^+(x,0)=\max\{w(x,0),0\},\ w^-(x,0)=\min\{w(x,0),0\}.$$

则我们称 $w\in H$ 为 (1.1) 的极小能量变号解. 我们定义了 J 相应的 Nehari 流形

$$\mathcal{N}=\{w\in H\setminus\{0\}:\langle J'(w),\ w\rangle=0\},\tag{1.11}$$

且定义

$$c:=\inf_{w\in\mathcal{N}}J(w).\tag{1.12}$$

让我们回忆半线性问题的一些经典结果

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u) & x\in\Omega,\\ u=0 & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.13}$$

在 [24] 中, Castro, Cossio 和 Neuberger 证明了 (1.13) 存在一个变号解, 且它恰好只改变一次符号, 像这样知道变号次数的变号解也称为节点解. Bartsch, Weth 和 Willem [25] 证明了恰好变号一次的极小能量节点解的存在性. 此外, 在 [26] 中还发现了能量倍增现象. 然而, 这些提到的关于 (1.13) 的结果依赖于如下两种分解, 即对于 $u\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$I(u)=I(u^+)+I(u^-),\tag{1.14}$$

$$\langle I'(u),\ u^+\rangle=\langle I'(u^+),\ u^+\rangle,\ \ \langle I'(u),\ u^-\rangle=\langle I'(u^-),\ u^-\rangle,\tag{1.15}$$

其中 $I:H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\int_\Omega F(x,u)dx,\ \ F(x,u)=\int_0^u f(x,\tau)d\tau$$

为 (1.13) 对应的能量泛函. 然而, 由 (1.8) 定义的变分泛函 J 不再有与 (1.14) 和 (1.15) 相同的分解. 事实上,

$$J(w)=J(w^+)+J(w^-)-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w(x,0)^+|^p)|w(x,0)^-|^pdx,$$

$$\langle J'(w),w^+\rangle=\langle J'(w^+),w^+\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w(x,0)^-|^p)|w(x,0)^+|^pdx,$$

且

$$\langle J'(w),w^-\rangle=\langle J'(w^-),w^-\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w(x,0)^+|^p)|w(x,0)^-|^pdx.$$

因此, 在 [24] (也可参见 [25] [26]) 中的方法似乎不适用于我们的问题 (1.1). 为了得到 (1.1) 的极小能

量变号解, 类似于 [27], 我们首先尝试在以下约束流形上寻找能量泛函 J 的最小值

$$\mathcal{M} = \{w \in H | w^{\pm} \neq 0, \langle J'(w), w^{\pm} \rangle = 0\}. \tag{1.16}$$

显然, 若 $\inf_{u \in \mathcal{M}} J(u)$ 可达, 则极小元是 (1.1) 的一个变号解. 然而, 在我们的问题 (1.1) 中, 正如我们上面提到的, 泛函 J 不再具有性质 (1.14), (1.15), 很难用通常的方式来证明 $\mathcal{M} \neq \emptyset$. 因此, 为了证明集合 $\mathcal{M}$ 非空, 我们借用了 [7] 提出的一种与 Ye [12] 和 Shuai [19] 不同的方法. 我们证明了对于满足 $w^{\pm} \neq 0$ 的 $w \in H$, 存在唯一一对 $(d, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, 使得 $dw^+ + tw^- \in \mathcal{M}$, 见下文引理 7. 为了证明约束问题的极小元是一个变号解, 类似于 [12] 和 [19], 我们采用 Ekeland 变分原理 [28] 和隐函数定理.

我们的第一个主要结果表述如下:

定理1. *设 $\mu \in (0, N)$, $2 < p < \frac{2N-\mu}{N-2s}$. 则 (1.1) 存在极小能量变号解 w.*

然而, 由于非局部项 $(-\Delta)^s u$ 和 $|x|^{-\mu} * |u|^p$ 的出现, 我们不知道极小能量变号解 w 是否只改变一次符号, 因为对于满足 $supp(w_1) \cap supp(w_2) = \emptyset$ 的两个函数 w_1 和 w_2 而言, 积分

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_1 (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_1|^p)|w_2|^p dx$$

未必为零.

本文的另一个目标是建立 (1.1) 极小能量变号解的能量估计. 事实上, 对于方程 (1.13), 任何变号解的能量都大于基态能量的两倍, 这种特性在 [26] 中被 Weth 称为能量倍增. 然而, 对于问题 (1.1), 我们的结果表明此时能量倍增现象并不发生, 此时变号解的能量严格大于基态能量, 但严格小于基态能量的两倍. 即有如下结果:

定理2. *在定理 1 假设下, $c > 0$ 由某正解或负解达到, 且*

$$c < J(w) < 2c,$$

其中 w 为定理 1 中给出的极小能量变号解.

本文的结构如下: 在第 2 节中, 我们证明了几个预备性引理, 它们对证明我们的主要结果至关重要. 在第 3 节中, 结合 Ekeland 变分原理和隐函数定理, 我们证明了主要结果.

2. 预备引理

以下是分数阶 Sobolev 空间的嵌入结果, 参见 [21].

引理3. *设 $t \in [2, 2_s^*]$, (V_1) 成立. 则嵌入 $H \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N)$ 是连续的. 特别地, 存在常数 $C_t > 0$, 使得对于所有 $u \in H$,*

$$\|u\|_t \leq C_t \|u\|.$$

此外, 若 $t \in [1, 2_s^*)$, 则嵌入 $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 是紧的, 其中 $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$. 若 $(V_1) - (V_2)$ 成立, 则

对于 $t \in [2, 2_s^*)$, $H \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N)$ 是紧的. 特别地, 有

$$\text{对于每个 } 2 \le t < 2_s^*,\ \ H \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^N) \text{是紧的.} \tag{2.1}$$

接下来, 我们建立泛函 J 的紧性结果, 即:

引理4. 设 $V(x)$ 满足条件 (V_1) 和 (V_2). 则对于任意 $c \in \mathbb{R}$, J 满足 $(PS)_c$ 条件.

证明: 设 $c \in \mathbb{R}$ 并且 $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 H 中的一个序列, 使得当 $j \to \infty$ 时,

$$J(w_j) \to c,\ J'(w_j) \to 0.$$

我们有

$$\begin{aligned} c + 1 + \|w_j\| &= J(w_j) - \frac{1}{2p}\langle J'(w_j), w_j\rangle \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla w_j|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w_j(x,0)|^2 dx\Big) \\ &\ge \frac{1}{4}\|w_j\|^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

因此, 序列 $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 H 中有界. 根据 (2.1), 在子列意义下, 我们不妨假设

$$\text{在 } H \text{ 上},\ w_j \rightharpoonup w_0,$$

$$\text{在 } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ 上},\ w_j(x,0) \to w_0(x,0),$$

$$w_j(x,0) \to w_0(x,0) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

除此之外, 根据 [28], 存在 $g(x,0) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$|w_j(x,0)| \le g(x,0) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N,\ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

根据勒贝格控制收敛定理, 我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_j(x,0)|^p)|w_j(x,0)|^p dx \\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_0(x,0)|^p)|w_0(x,0)|^p dx, \end{aligned} \tag{2.3}$$

且当 $j \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_j(x,0)|^p)|w_j(x,0)|^{p-2} w_j(x,0) w_0(x,0) dx \\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_0(x,0)|^p)|w_0(x,0)|^p dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

因此, 根据 $\langle J'(w_j), w_j\rangle \to 0$ 和 (2.3), 当 $j\to\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla w_j|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}(V(x)|w_j(x,0)|^2)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w_0(x,0)|^p)|w_0(x,0)|^p dx. \tag{2.5}$$

此外, 根据 $\{w_j\}$ 和 (2.4) 的弱收敛性, 当 $j\to\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla w_0|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w_0(x,0)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w_0(x,0)|^p)|w_0(x,0)|^p dx, \tag{2.6}$$

因此, 当 $j\to\infty$ 时,

$$\|w_j\| \to \|w_0\|, \tag{2.7}$$

这表明在 H 中 $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 强收敛, 这样就完成了引理 4 的证明.

显然, 这个泛函 J 具有山路结构, 即存在 $\rho, r>0$ 使得 $\inf J(\partial B_r)\ge\rho$ 且对于任意 $w\neq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} J(tw) = -\infty$. 因此, 我们有

引理5. 设 $\mu\in(0,N)$, $2<p<\frac{2N-\mu}{N-2s}$. 则方程 (1.1) 有一个基态解.

我们现在证明基态解不变号 (参见 [8], [9]).

引理6. 设 $\mu\in(0,N)$, $2<p<\frac{2N-\mu}{N-2s}$. 则方程 (1.1) 的任何基态解 $u\in H^s(\mathbb{R}^N)$ 不变号.

证明: 若 $u=w(x,0)$ 是 (1.1) 的基态解, 则 $w\in X^s(\mathbb{R}^{N+1})$ 是问题 (1.7) 的解. 从而, $|w|$ 也是一个解. 因此, $|u|$ 也是一个基态解. 它满足方程

$$(-\Delta)^s|u| + V(x)|u| = (|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-1},\ \ x\in\mathbb{R}^N.$$

使用 u^- 作为 (1.1) 中的检验函数, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u^- dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)uu^- dx + \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |u|^p)|u|^{p-2}uu^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |u|^p)|u^-|^p dx \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u^-|^2 dx \ge 0. \end{aligned}$$

因此, $u^-=0$. 从而, $u\ge 0$. 此外, 若对于 $x_0\in\mathbb{R}^N$, $u(x_0)=0$, 则 $(-\Delta)^s u(x_0)=0$. 再根据 (1.5),

$$(-\Delta)^s u(x_0) = -\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x_0+y)+u(x_0-y)-2u(x_0)}{|y|^{N+2s}}dy,$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x_0+y)+u(x_0-y)}{|y|^{N+2s}}dy = 0,$$

由于 u 是非负的, 可得 $u \equiv 0$. 这与 $u \neq 0$ 相矛盾. 故 u 是正的. 因此, u 不变号.

下面的引理表明集合 $\mathcal{M}$ 非空.

引理7. 设 $\mu \in (0, N)$, $2 < p < \frac{2N-\mu}{N-2s}$. 则对于任意满足 $w^{\pm} \neq 0$ 的 $w \in H$, 存在唯一一对 $(d, t) = (d_w, t_w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, 使得 $d_w w^+ + t_w w^- \in \mathcal{M}$, 即 $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

证明: 我们采用 [7] 和 [20] 中的思想, 首先, 我们定义函数

$$G(d_1, d_2) := J(d_1^{\frac{1}{p}} w^+ + d_2^{\frac{1}{p}} w^-).$$

此外, 对于 $0 < s', \beta < N$ 和 $0 < s' + \beta < N$, 从 [20, 推论 5.10] 得出

$$\begin{aligned}(|x|^{s'-N} * |x|^{\beta-N})(y) &:= \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{s'-N}|y-z|^{\beta-N}dz \\ &= \frac{C_{N-s'-\beta}C_{s'}C_\beta}{C_{s'+\beta}C_{N-s'}C_{N-\beta}}|y|^{s'+\beta-N},\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$C_{s'} := \pi^{-\frac{s'}{2}}\Gamma(\frac{s'}{2}).$$

当 $s' = \beta = \frac{N-\mu}{2}$ 时, 为了方便, 我们记 $C(N, \mu) := \frac{C_{s'+\beta}C_{N-s'}C_{N-\beta}}{C_{N-s'-\beta}C_{s'}C_\beta}$, 根据 (2.8),

$$|x|^{-\mu} = C(N, \mu)|x|^{-\frac{N+\mu}{2}} * |x|^{-\frac{N+\mu}{2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu} * (|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p)\right)|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p dx \\ &= C(N,\mu)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}} * \left(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}} * |d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p\right)\right)|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) \\ &\quad + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p dx \\ &= C(N,\mu)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|x-z|^{-\frac{N+\mu}{2}}\left(|z|^{-\frac{N+\mu}{2}} * |d_1^{\frac{1}{p}} w^+(z,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(z,0)|^p\right)dz|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) \\ &\quad + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p dx \\ &= C(N,\mu)\int_{\mathbb{R}^N}|z|^{-\frac{N+\mu}{2}} * |d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p\int_{\mathbb{R}^N}|x-z|^{-\frac{N+\mu}{2}}|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(z,0) \\ &\quad + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(z,0)|^p dxdz \\ &= C(N,\mu)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|z|^{-\frac{N+\mu}{2}} * |d_1^{\frac{1}{p}} w^+(z,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(z,0)|^p\right)^2 dz \\ &= C(N,\mu)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|z|^{-\frac{N+\mu}{2}} * (d_1|w^+(z,0)|^p + d_2|w^-(z,0)|^p)\right)^2 dz.\end{aligned} \tag{2.9}$$

根据 (2.9), 我们有

$$
\begin{aligned}
G(d_1,d_2) = \frac{d_1^{\frac{2}{p}}}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla w^+|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}} V(x)|w^+(x,0)|^2 dx\Big) \\
+ \frac{d_2^{\frac{2}{p}}}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla w^-|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w^-(x,0)|^2 dx\Big) \\
- \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|x|^{-\mu} * (|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p)\Big)|d_1^{\frac{1}{p}} w^+(x,0) + d_2^{\frac{1}{p}} w^-(x,0)|^p dx \\
= \frac{d_1^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^+\|^2 + \frac{d_2^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^-\|^2 - \frac{C_{N,\mu}}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}} * \Big(d_1|w^+(x,0)|^p + d_2|w^-(x,0)|^p\Big)\Big)^2 dx.
\end{aligned}
$$

由于 $G(d_1,d_2)$ 是连续函数, 并且

$$
\begin{aligned}
G(d_1,d_2) &= \frac{d_1^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^+\|^2 + \frac{d_2^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^-\|^2 - \frac{d_1^2}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w^+(x,0)|^p)|w^+(x,0)|^p dx \\
&\quad - \frac{d_1 d_2}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w^+(x,0)|^p)|w^-(x,0)|^p dx \\
&\quad - \frac{d_2^2}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w^-(x,0)|^p)|w^-(x,0)|^p dx \\
&\le \frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2)^{\frac{1}{p}}(\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2) - \frac{1}{2p}\min\{A_1,A_2\}(d_1^2+d_2^2),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{cases}
A_1 = \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w^+(x,0)|^p)|w^+(x,0)|^p dx, \\
A_2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |w^-(x,0)|^p)|w^-(x,0)|^p dx.
\end{cases}
$$

当 $|(d_1,d_2)| \to +\infty$ 时, $G(d_1,d_2) \to -\infty$, 故 G 有一个全局最大值点 $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. 这里我们用到了 G 的严格凹性. 事实上, 记

$$
F(d_1,d_2) = \frac{d_1^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^+\|^2 + \frac{d_2^{\frac{2}{p}}}{2}\|w^-\|^2,
$$

$$
T(d_1,d_2) = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}} * \Big(d_1|w^+(x,0)|^p + d_2|w^-(x,0)|^p\Big)\Big)^2 dx,
$$

则

$$
(F''_{d_1d_2})^2 - F''_{d_1d_1}F''_{d_2d_2} < 0.
$$

因此, F 是严格凹函数. 此外, 令 (d_1,d_2), $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $\lambda\in(0,1)$, 则

$$
\begin{aligned}
&T(\lambda(d_1,d_2)+(1-\lambda)(t_1,t_2))=T(\lambda d_1+(1-\lambda)t_1,\lambda d_2+(1-\lambda)t_2)\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}}*\left((\lambda d_1+(1-\lambda)t_1|w^+(x,0)|^p+(\lambda d_2+(1-\lambda)t_2)|w^-(x,0)|^p\right)\right)^2dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\lambda|x|^{-\frac{N+\mu}{2}}*\left(d_1|w^+(x,0)|^p+d_2|w^-(x,0)|^p\right)\right.\\
&\quad\left.+(1-\lambda)|x|^{-\frac{N+\mu}{2}}*\left(t_1|w^+(x,0)|^p+t_2|w^-(x,0)|^p\right)\right)^2dx\\
&<\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}}*\left(d_1|w^+(x,0)|^p+d_2|w^-(x,0)|^p\right)\right)^2dx\\
&\quad+(1-\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{N+\mu}{2}}*\left(t_1|w^+(x,0)|^p+t_2|w^-(x,0)|^p\right)\right)^2dx\\
&=\lambda T(d_1,d_2)+(1-\lambda)T(t_1,t_2),
\end{aligned}
$$

这说明 G 是严格凹函数, 由此得出结论 $(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 是唯一的全局极大值点, 并且 $\nabla G(a,b)=(0,0)$, 这说明 $\mathcal{M}\neq\emptyset$.

由 (2.2), 下列结论成立.

引理8. $J(w)$ 在 $\mathcal{M}$ 上下方有界且强制.

由引理 7, 我们考虑如下约束极小问题

$$m:=\inf\{J(u):w\in\mathcal{M}\}. \tag{2.10}$$

引理9. $m<2c$.

证明: 根据引理 5, 设 e 是问题 (1.1) 的一个基态解, 即

$$J'(e)=0,\ J(e)=c,\ e>0.$$

设 $\eta\subset C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^{N+1}},[0,1])$ 为一截断函数, 使得

$$\mathrm{supp}\eta\in B_1(0):=\{z=(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1}:|z|\leq 1\},$$

在 $B_{\frac{1}{2}}(0)$ 上 $\eta\equiv1$, 在 $\mathbb{R}^{N+1}\setminus B_1(0)$ 上 $\eta\equiv0$, 并且 $|\nabla\eta|<1$. 定义

$$w_R(x,y):=\eta(\frac{x}{R},y)e(x,0)\geq0,\ v_R(x,y):=-\eta(\frac{x-x_n}{R},y)e(x,0)\leq0,$$

DOI: 10.12677/aam.2022.117437

其中 $R>0$, $x_n=(0,0,\cdots,0,3R)$. 因此, 我们可以证明

$$\mathrm{supp} w_R(x,y)\cap \mathrm{supp} v_R(x,y)=\emptyset,$$

这表明 $w_R(x,y)+v_R(x,y)\neq 0$, 并且 $w_R(x,y)\neq 0$, $v_R(x,y)\neq 0$. 因此, 根据引理 7, 存在唯一一对 $(d_{w_R},t_{v_R})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 使得 $\bar{u}_R:=d_{w_R}w_R+t_{v_R}v_R\in\mathcal{M}$ 当且仅当

$$\begin{cases} d_{w_R}^2\|w_R\|^2-d_{w_R}^{2p}A_3-d_{w_R}^p t_{v_R}^p B=0,\\ t_{v_R}^2\|v_R\|^2-t_{v_R}^{2p}A_4-t_{v_{R,N}}^p d_{w_R}^p B=0. \end{cases} \tag{2.11}$$

为了简单起见, 我们使用以下符号:

$$\begin{cases} A_3=\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w_R|^p)|w_R|^p dx,\\ B=\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|v_R|^p)|w_R|^p dx,\\ A_4=\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|v_R|^p)|v_R|^p dx. \end{cases} \tag{2.12}$$

此外, 根据 w_R 和 v_R 的定义,

$$\begin{aligned} &y^{1-2s}|\nabla(w_R-e)|^2+V(x)|w_R-e|^2\\ &\quad\leq C\left(|\nabla\eta(\frac{x}{R},y)|^2e^2+|\eta(\frac{x}{R},y)-1|^2|\nabla e|^2\right)\in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

类似地

$$y^{1-2s}|\nabla(v_R+e)|^2+V(x)|v_R(x,0)+e(x,0)|^2\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

因此, 根据勒贝格控制收敛定理, 在 H 中, 当 $R\to\infty$ 时,

$$w_R\to e,\ v_R\to -e. \tag{2.13}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w_R|^p)|w_R|^p dx\to\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|e|^p)|e|^p dx, \tag{2.14}$$

并且

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|v_R|^p)|v_R|^p dx\to\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|e|^p)|e|^p dx. \tag{2.15}$$

接下来, 我们将证明当 $R\to\infty$ 时存在 $(d_0,t_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 使得

$$d_{w_R}\to d_0,\ t_{v_R}\to t_0,\ (d_0,t_0)\in(0,1)\times(0,1). \tag{2.16}$$

事实上, 令 $\lim\limits_{R\to+\infty}d_{w_R}=+\infty$. 根据 (2.11) 和 (2.14) 我们得出

$$0\leq\frac{t_{v_R}^p}{d_{w_R}^p}B=\frac{1}{d_{w_R}^{2p-2}}\|w_R\|^2-A_3=-\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|e|^p)|e|^p dx+o(1)<0,$$

矛盾. 因此, d_{w_R} 是一致有界的. 类似于 (2.11) 和 (2.15) 的证明, t_{v_R} 也是一致有界的. 不失一般性, 我们可以假设存在 $d_0, t_0 \in [0, \infty)$, 使得当 $R \to \infty$ 时,

$$d_{w_R} \to d_0,\ t_{v_R} \to t_0.$$

若 $d_0 = 0$ 或 $t_0 = 0$, 根据 (2.11)-(2.15),

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |e|^p)|e|^p dx\Big)^2 + o(1) = \Big(\frac{1}{d_{w_R}^{2p-2}}\|w_R\|^2 - A_3\Big)\Big(\frac{1}{t_{v_R}^{2p-2}}\|v_R\|^2 - A_4\Big) + o(1) = +\infty,$$

这是不可能的. 因此, 我们得到 $(d_0, t_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. 根据 (2.13) 和 (2.14), 我们可以得到

$$\begin{cases} d_{w_R}^2\|e\|^2 - d_{w_R}^{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |e|^p)|e|^p dx - d_{w_R}^p t_{v_R}^p \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |e|^p)|e|^p dx = 0, \\ t_{v_R}^2\|e\|^2 - t_{v_R}^{2p}\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |e|^p)|e|^p dx - t_{v_R}^p d_{w_R}^p \int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu} * |e|^p)|e|^p dx = 0. \end{cases}$$

结合 $J'(e) = 0$, 我们得到

$$\frac{1}{d_{w_R}^{2p-2}} - 1 = \frac{t_{v_R}^p}{d_{w_R}^p},\ \frac{1}{t_{v_R}^{2p-2}} - 1 = \frac{d_{w_R}^p}{t_{v_R}^p}.$$

因此, $(d_0, t_0) \in (0,1) \times (0,1)$, (2.16) 得证.

因此, 我们由 $\bar{u}_R \in \mathcal{M}$ 和 (2.16) 可得, 当 $R \to +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} m \le J(\bar{u}_R) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})\Big(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} y^{1-2s}|\nabla \bar{u}_R|^2 dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\bar{u}_R(x,0)|^2 dx\Big) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})(d_{w_R}^2\|w_R\|^2 + t_{v_R}^2\|v_R\|^2) \\ &= (t_0^2 + d_0^2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})\|e\|^2 + o(1) \\ &= (t_0^2 + d_0^2)J(e) + o(1) \\ &= (t_0^2 + d_0^2)c + o(1) \\ &\le 2c. \end{aligned}$$

引理得证.

3. 变号解

本节的主要目的是证明我们的主要结果.

定理 1 的证明

证明: 我们首先证明约束极小问题 (2.10) 的极小元 w 的确是 (1.1) 的一个解, 即 $J'(w) = 0$.

由引理 8 和 Ekeland 变分原理, 我们不妨假设存在极小化序列 $\{w_n\} \subset \mathcal{M}$, 使得

$$J(w_n) \leq m + \frac{1}{n},$$

$$J(v) \geq J(w_n) - \frac{1}{n}\|w_n - v\|. \tag{3.1}$$

我们可以证明序列 $\{w_n^{\pm}\}$ 都在 H 中一致有界. 因此, 在子列意义下,

$$\begin{aligned}
&\text{在 } H \text{ 中}, \ w_n^{\pm} \rightharpoonup w^{\pm},\\
&\text{在 } L^t(\mathbb{R}^N) \text{ 中}, \ \text{对于 } t \in [2, 2_s^*), \ w_n^{\pm}(x,0) \to w^{\pm}(x,0),\\
&w_n^{\pm}(x,0) \to w^{\pm}(x,0) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

此外, 由 Sobolev 紧嵌入 (2.1), 我们得到

$$w^+(x,0) \geq 0, \ w^-(x,0) \leq 0, \ w^+(x,0) \cdot w^-(x,0) = 0 \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

因此, 为了证明这个定理, 我们只需证明 $J'(w_n) \to 0$.

接下来, 对于任意 $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 和每个 n, 我们定义 $T_n^1, T_n^2 \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 如下:

$$\begin{aligned}
T_n^1(\sigma,k,l) = {} & \|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^+\|^2\\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^+|^p)|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^+|^p dx\\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^-|^p)|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^+|^p dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n^2(\sigma,k,l) = {} & \|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^-\|^2\\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^-|^p)|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^-|^p dx\\
& - \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^+|^p)|(w_n + \sigma\phi + kw_n^+ + lw_n^-)^-|^p dx,
\end{aligned}$$

则 $T_n^1(0,0,0) = T_n^2(0,0,0) = 0$. 此外, 根据前面的符号, 若用 w_n 替换了 A_1, A_2 中的 w, 用 w_n^- 和 w_n^+ 分别替换 B 中的 v_R 和 w_R, 则

$$\frac{\partial T_n^1(\sigma,k,l)}{\partial k}|_{(0,0,0)} = 2(1-p)A_1 + (2-p)B, \ \ \frac{\partial T_n^2(\sigma,k,l)}{\partial l}|_{(0,0,0)} = 2(1-p)A_1 + (2-p)B$$

并且

$$\frac{\partial T_n^1(\sigma,k,l)}{\partial l}|_{(0,0,0)} = \frac{\partial T_n^2(\sigma,k,l)}{\partial k}|_{(0,0,0)} = -pB.$$

此外, 根据 [12], [20, 定理 9.8],

$$B^2 < A_1A_2 \leq \frac{A_1 + A_2}{2}, \tag{3.2}$$

令

$$\mathcal{J}(0,0,0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial T_n^1(\sigma,k,l)}{\partial k} & \frac{\partial T_n^1(\sigma,k,l)}{\partial l} \\ \frac{\partial T_n^2(\sigma,k,l)}{\partial k} & \frac{\partial T_n^2(\sigma,k,l)}{\partial l} \end{bmatrix}.$$

由 (3.2), 有

$$\begin{aligned}\det\mathcal{J}(0,0,0)&=4(1-p)^2A_1A_2+2(1-p)(2-P)(A_1+A_2)B+4(1-p)B^2\\&\geq 8(1-p)(2-p)B^2>0.\end{aligned}$$

根据隐函数定理, 存在一个序列 $\{\sigma_n\}\subset\mathbb{R}_+$ 和 $k_n(\sigma),l_n(\sigma)\in C^1(-\sigma_n,\sigma_n)$ 满足 $k_n(0)=0,l_n(0)=0$, 且

$$T_n^1(\sigma,k_n(\sigma),l_n(\sigma))=0,\ \ T_n^2(\sigma,k_n(\sigma),l_n(\sigma))=0.$$

因此, 对于 $\forall\sigma\in(-\sigma_n,\sigma_n)$,

$$\phi_{n,\sigma}:=w_n+\sigma\phi+k_n(\sigma)w_n^++l_n(\sigma)w_n^-\in\mathcal{M}.$$

此外, 根据 (3.1),

$$J(\phi_{n,\sigma})-J(w_n)\geq-\frac{1}{n}\|\sigma\phi+k_n(\sigma)w_n^++l_n(\sigma)w_n^-\|. \tag{3.3}$$

由 (3.3), 结合满足 $\langle J'(w_n),w_n^\pm\rangle=0$ 的泰勒展开式,

$$\sigma\langle J'(w_n),\phi\rangle+o(\|\sigma\phi+k_n(\sigma)w_n^++l_n(\sigma)w_n^-\|)\geq-\frac{1}{n}\frac{\|\sigma\phi+k_n(\sigma)w_n^++l_n(\sigma)w_n^-\|}{\sigma}. \tag{3.4}$$

由于 $\{w_n\}$ 在 H 中是一致有界的且 $\det\mathcal{J}(0,0,0)>0$, 我们得到 $\{k_n'(0)\}$ 和 $\{l_n'(0)\}$ 都是一致有界的. 因此当 $\sigma\to0$ 时,

$$\frac{o(\|\sigma\phi+k_n(\sigma)w_n^++l_n(\sigma)w_n^-\|)}{\sigma}\to0.$$

因此, 根据 (3.4), 当 $\sigma\to0$ 时,

$$|\langle J'(w_n),\sigma\rangle|\leq\frac{C}{n},$$

其中 C 是一个与 n 无关的正常数. 因此, 我们得到 $J'(w_n)\to0$, 这说明 $J'(w)=0$. 此外, 对于 $w_n\in\mathcal{M}$, 根据 (2.7), 我们得到 $\|w_n^\pm\|\to\|w^\pm\|$. 因此, 在 H 中, 当 $n\to\infty$ 时,

$$w_n^\pm\to w^\pm.$$

此外, 根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 $\langle J'(w_n),w_n^\pm\rangle=0$,

$$\begin{aligned}\|w_n^+\|^2&=\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w_n^+(x,0)|^p)|w_n^+(x,0)|^pdx+\int_{\mathbb{R}^N}(|x|^{-\mu}*|w_n^-(x,0)|^p)|w_n^+(x,0)|^pdx\\&\leq C_1\|w_n^+\|^{2p}+C_2\|w_n^-\|^p\|w_n^+\|^p.\end{aligned} \tag{3.5}$$

类似地, 有

$$\|w_n^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_n^-(x,0)|^p)|w_n^-(x,0)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^{-\mu} * |w_n^+(x,0)|^p)|w_n^-(x,0)|^p dx \\ \leq C_1\|w_n^-\|^{2p} + C_2\|w_n^+\|^p\|w_n^-\|^p. \tag{3.6}$$

因此, 存在一个常数 $\varrho > 0$, 使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $\|w_n^\pm\| \geq \varrho$. 所以 $\|w^\pm\| \geq \varrho > 0$, 这说明 $w^\pm \neq 0$ 并且 $\langle J'(w), w^\pm \rangle = 0$. 因此, $w \in \mathcal{M}$, $J(w) = m$, 即 w 是 J 的一个临界点. 因此, w 是问题 (1.1) 的一个变号解. 证毕.

由定理 1, 我们知道问题 (1.1) 有一个极小能量变号解 w. 我们现在证明 w 的能量严格大于基态能量, 但严格小于基态能量的两倍.

定理 2 的证明

证明: 根据定理 1 的证明, (1.1) 存在极小能量变号解 w.

接下来, 我们断言

$$J(w) = m = \inf\{J(v) \mid v^\pm \neq 0, J'(v) = 0\}. \tag{3.7}$$

事实上, 由于 $J(w) = m$, w 是 J 的临界点并且 $w^\pm \neq 0$, 我们得到

$$J(w) = m \geq \inf\{J(v) \mid v^\pm \neq 0, J'(v) = 0\}.$$

此外, 根据 $\{J(v) \mid v^\pm \neq 0, J'(v) = 0\} \subset \mathcal{M} \neq \emptyset$, 可得

$$\inf\{J(v) \mid v^\pm \neq 0, J'(v) = 0\} \geq \inf_{w\in\mathcal{M}} J(w) = m,$$

这就说明 (3.7) 成立. 因此, 由 $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, 我们有 $J(w) = m \geq c$. 根据引理 6, 问题 (1.1) 的每个基态解不变号, 由此得出结论 $J(w) = m > c$. 因此, 根据引理 9, 我们有 $c < m < 2c$. 证毕.

本文主要利用变分方法研究了一类分数阶 Choquard 方程变号解的存在性. 我们研究了一类带有非局部的非线性项的分数阶 Choquard 方程, 该方程的特点是同时出现分数阶算子的非局部性和非线性项的非局部性. 结合 Ekeland 变分原理和隐函数定理, 我们证明了该方程存在极小能量变号解 (所有变号解中具有最低能量者), 且证明了其能量介于基态能量与 2 倍基态能量之间. 我们的研究将促进 Choquard 方程 (即带有非局部项的 Schrödinger 方程) 的研究, 为量子力学、化学、凝聚态物理、非线性光学等领域的发展提供理论支持.

参考文献

[1] Lieb, E. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **57**, 93-105.
https://doi.org/10.1002/sapm197757293

[2] Pekar, S. (1954) Untersuchung über die elektronentheorie der kristalle. Akademie Verlag, Berlin.

[3] Moroz, I., Penrose, R. and Tod, P. (1998) Spherically-Symmetric Solutions of the Schrödinger-Newton Equations. *Classical and Quantum Gravity*, **15**, 2733-2742. https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/9/019

[4] Bahrami, M., Großardt, A., Donadi, S. and Bassi, A. (2014) The Schrödinger-Newton Equation and Its Foundations. *New Journal of Physics*, **16**, 7-28. https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/11/115007

[5] Giulini, D. and Großardt, A. (2012) The Schrödinger-Newton Equation as a Non-Relativistic Limit of Self-Gravitating Klein-Gordon and Dirac Fields. *Classical and Quantum Gravity*, **29**, Article ID: 215010. https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/21/215010

[6] Moroz, V. and Schaftingen, J.V. (2017) A Guide to the Choquard Equation. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 773-813. https://doi.org/10.1007/s11784-016-0373-1

[7] Alves, C., Nóbrega, A. and Yang, M. (2016) Multi-Bump Solutions for Choquard Equation with Deepening Potential Well. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, 1-28. https://doi.org/10.1007/s00526-016-0984-9

[8] Moroz, V. and Schaftingen, J.V. (2013) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 153-184. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.04.007

[9] Moroz, V. and Schaftingen, J.V. (2015) Existence of Groundstates for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6557-6579. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06289-2

[10] Gao, F. and Yang, M. (2017) On Nonlocal Choquard Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **448**, 1006-1041. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.015

[11] Clapp, M. and Salazar, D. (2013) Positive and Sign Changing Solutions to a Nonlinear Choquard Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **407**, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.081

[12] Ye, H. (2015) The Existence of Least Energy Nodal Solutions for Some Class of Kirchhoff Equations and Choquard Equations in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **431**, 935-954. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.012

[13] Ghimenti, M. and Schaftingen, J.V. (2016) Nodal Solutions for the Choquard Equation. *Journal of Functional Analysis*, **271**, 107-135. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.04.019

[14] Ghimenti, M., Moroz, V. and Schaftingen, J.V. (2017) Least Action Nodal Solutions for the Quadratic Choquard Equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 737-747. https://doi.org/10.1090/proc/13247

[15] d'Avenia, P., Siciliano, G. and Squassina, M. (2015) Existence Results for a Doubly Nonlocal Equation. *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*, **9**, 311-324. https://doi.org/10.1007/s40863-015-0023-3

[16] d'Avenia, P., Siciliano, G. and Squassina, M. (2015) On Fractional Choquard Equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1447-1476. https://doi.org/10.1142/S0218202515500384

[17] Chen, Y. and Liu, C. (2016) Ground State Solutions for Non-Autonomous Fractional Choquard Equations. *Nonlinearity*, **29**, 1827-1842. https://doi.org/10.1088/0951-7715/29/6/1827

[18] Shen, Z., Gao, F. and Yang, M. (2016) Groundstates for Nonlinear Fractional Choquard Equations with General Nonlinearities. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **39**, 4082-4098. https://doi.org/10.1002/mma.3849

[19] Wei, S. (2015) Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problem in Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1256-1274. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.02.040

[20] Lieb, E. and Loss, M. (1997) Analysis, Second Edition. In: *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI.

[21] Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[22] Caffarelli, L. and Silvestre, L. (2006) An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 1245-1260. https://doi.org/10.1080/03605300600987306

[23] Brändle, C., Colorado, E., Pablo, A. and Sánchez, U. (2010) A Concave-Convex Elliptic Problem Involving the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, **143**, 39-71. https://doi.org/10.1017/S0308210511000175

[24] Castro, A., Cossio, J. and Neuberger, J. (1997) A Sign-Changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **27**, 1041-1053. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181071858

[25] Bartsch, T., Weth, T. and Willem, M. (2005) Partial Symmetry of Least Energy Nodal Solutions to Some Variational Problems. *Journal d'Analyse Mathématique*, **96**, 1-18. https://doi.org/10.1007/BF02787822

[26] Weth, T. (2006) Energy Bounds for Entire Nodal Solutions of Autonomous Superlinear Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **27**, 421-437. https://doi.org/10.1007/s00526-006-0015-3

[27] Bartsch, T. and Weth, T. (2005) Three Nodal Solutions of Singularly Perturbed Elliptic Equations on Domains without Topology. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Non Linéaire*, **22**, 259-281. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2004.07.005

[28] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Springer Science + Business Media, Berlin.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1