

自然条件下玉米与马铃薯单、间作生长的微分方程建模

陶 香, 化存才*

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年6月11日; 录用日期: 2022年7月6日; 发布日期: 2022年7月13日

摘 要

在本文中, 首先分别建立了自然条件下玉米和马铃薯单作生长时干物质积累的一维非自治微分方程模型。数值模拟结果表明: 模拟值与试验数据非常吻合, 因而所建的单作模型可分别用于描述玉米和马铃薯单作生长时的干物质积累过程。玉米的干物质积累主要集中在拔节 - 抽雄 - 灌浆期, 而马铃薯的干物质积累主要集中在块茎形成 - 块茎膨大 - 淀粉积累期, 两者的干物质积累过程都符合“S型”增长规律。进一步, 考虑到玉米和马铃薯间作生长时有促进与抑制的作用, 建立了两者间作生长时干物质积累的二维非自治微分方程模型, 分析得出相应自治间作模型存在唯一的正平衡点, 且为稳定结点, 给出的相对增长率公式表明: 间作玉米呈现增产优势, 马铃薯呈现减产弱势, 两者的总量呈现增长优势; 非自治间作模型的数值模拟得出: 若选取耦合项的参数为 $\gamma = 0.303$, $\eta = 0.0778$, 则两者作物的干物质积累量趋于稳定正平衡点 $N_4 (442.96, 266.55)$, 与单作相比, 间作玉米的干物质积累量提高了26.76%, 马铃薯减少了8.10%, 而玉米和马铃薯两者总的干物质积累量却增加了11.09%, 呈现出间作系统提高群体产量的优势。因此, 在两者的种植方式上, 可以优先选择间作栽培。

关键词

玉米, 马铃薯, 单作, 间作, 非自治微分方程

Differential Equation Modeling of Monocropping and Intercropping Maize and Potato's Growth under Natural Conditions

Xiang Tao, Cuncai Hua*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 11th, 2022; accepted: Jul. 6th, 2022; published: Jul. 13th, 2022

*通讯作者。

Abstract

In this paper, one-dimensional non-autonomous differential equation models of dry matter accumulation of mono-cropping maize and potato under natural conditions are established respectively. Numerical simulation results show that the simulated values are in good agreement with the experimental data, so the monoculture models can be used to describe the dry matter accumulation process of maize and potato in monoculture growth respectively. The dry matter accumulation of maize concentrates mainly in jointing, tending and filling stage, while the dry matter accumulation of potato concentrates mainly in tuber formation, tuber swelling and starch accumulation stage, both of which are in line with the "S-shaped" growth law. Furthermore, by considering the promotion and inhibition effect of intercropping maize and potato's growth, a two-dimensional nonautonomous differential equation model of dry matter accumulation during their intercropping growth is established. It is concluded by analyzing the corresponding autonomous intercropping model that it has unique positive equilibrium point which is a stable node. The formulas of relative growth rate are given. They show that the intercropping maize increases production yield at a competitive advantage, the intercropping potato decreases production yield at a competitive disadvantage, and their total production yield increases at advantage. Numerical simulation of the nonautonomous interplanting model shows that if the parameters of the coupling term of the model is chosen as $\gamma = 0.303$, $\eta = 0.0778$, then amount of dry matter accumulation of both crops tends to the stable positive equilibrium N_4 (442.96, 266.55). Compared with the monoculture maize and potato, the dry matter accumulation of intercropping maize increases by 26.76%, the potato decreases by 8.10%, and the total dry matter accumulation corn of them increases by 11.09%. This is just the result of what the advantage of intercropping system increases production yield. Therefore, for the selection of planting methods, intercropping cultivation can be considered as priority.

Keywords

Mize, Potato, Monocropping, Intercropping, Non-Autonomous Differential Equation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

粮食增产关系到人类生存和延续的命脉, 粮食安全是国家发展的头等大事, 耕地是保障国家粮食安全的最为关键的资源基础。近五年来, 中国的耕地面积因城市和公共设施化建设占用、生态退耕、农业结构调整等而不断缩小, 导致国家面临巨大的粮食生产压力。要解决好粮食产量的问题, 就需要考虑如何在有限的土地资源内提高作物在单位土地面积上的产出。目前, 农作物间作栽培是时空高度集中的一种种植方式, 且是缓解连作障碍的一种主要手段, 其原理是把两种或两种以上的作物复合种植在同一片土地上, 通过种间关系发生变化, 在时间互补、时空竞争、养分促进与竞争等方面表现出相互关系[1], 从而直接产生提高整个农作系统生产力的重要影响。

玉米和马铃薯是继小麦、水稻之后的第三、第四大重要粮食作物, 但它们都不适合连年种植, 且连作还导致了这两种作物发育不良、品质变差、产量降低等后果[2]。范志伟、吴开贤等[3] (2016)研究发现, 玉米与马铃薯采用间作模式可以高效地利用水分资源, 从而表现出增产优势。刘英超(2020)通过检测间作

下玉米、马铃薯在其各生育期表现的耗水量和植株氮含量的变化, 分析水分吸收与氮素在植株累积中的关系, 得出结论: 玉米和马铃薯间作具有明显的产量优势, 土地当量比(LER)大于 1, 间作促进作物水-氮协同吸收作用, 且随生育期推移越显著[4]。耿川雄、任家兵的研究也表明, 玉米/马铃薯间作对玉米也具有增产作用, 且土地当量比大于 1, 表现出间作优势[5]。同样地, Ebwongu 等[6]的研究也证实了玉米/马铃薯间作具有产量优势。究其原因, 这可能是玉米/马铃薯间作会提高土壤微生物总量、丰富微生物群落结构[7], 造成不同生态位的微生物物种多样性, 提高作物根系对养分的吸收利用[8], 进而提高间作体系的产量。因此, 如果这两种高-矮秆作物采用间作栽培模式, 那么就可以通过互相作用, 合理分配资源, 从而直接或间接地影响作物生长环境, 提升土地资源的利用率, 实现作物的增产量[1] [9]。由此可见, 间作系统研究具有重要理论和现实应用意义。

当然, 以上所述的前人对于间作系统的研究都属于农学专业领域, 是从农学角度出发, 通过测定耗水量变化、氮素吸收情况、微生物数量等来得出间作的优势, 而至于如何上升为数学交叉应用研究则是还有待于开展的问题。在这里, 就需要考虑如何通过建立合理数学模型来模拟和解释作物在间作条件下干物质积累的动态过程, 以及预测和调控作物的生长等问题来加以研究。

事实上, 在传统的数学模型方法研究中, 利用微分形式的 Logistic 模型更加适用于植物各个生理生长阶段的解析表达, 这也就使得 Logistic 微分方程在植物的生理生态建模方面占有主导地位。至今为止, 许多学者针对植物生长发育问题, 基于对经典的 Logistic 模型的改进而相继做过相关研究。2013 年, 刘春、张春辉等[10]注意到植物的生命活动、物质交换等与能量流动有关的事实, 从热力学的角度出发, 通过引入能量模型建立了水稻增长率受到气温变化影响的二维的非自治微分方程模型。2014 年, 符云锦[11]根据农作物生长因素与药物控制机理之间的关系, 建立了农作物生长质量的常微分方程模型, 进而定性分析和解释了模型的合理性, 这为农业生产提供了重要的理论依据。2019 年, 李文斌基于农业领域对植物声频影响水稻生长的实验研究和数据, 考虑到水稻分蘖期生长对提高产量最为关键的事实, 首次将声频影响因子引入到经典的 Logistic 模型中, 建立了描述水稻分蘖期生长的一阶、二阶微分方程模型, 数值模拟表明: 400 HZ 的声频对水稻分蘖达到最好的促进作用[12]。2021 年, 梁仕军基于对播种深度及根长会影响花生的干物质积累的分析, 建立了花生在自然条件下干物质积累的一、二维微分方程模型, 同时考虑到花生间作可缓解连作障碍问题而建立了花生与玉米间作生长的二维微分方程模型, 数值模拟结果显示: 间作模型中的花生和玉米总产量增加了 11.15% [13]。总之, 虽然已有相关的学者在农业试验研究数据的基础上建立了一些经验式的植物生长微分方程模型, 但是, 目前仍然未见利用微分方程建模对玉米和马铃薯这两种作物间作生长状态的文献研究, 间作系统产生产量增长优势的机理仍未从数学上得到解决。

本文的目的, 是在自然条件下分别建立玉米和马铃薯单作、间作生长时干物质积累量的非自治微分方程模型, 并通过理论和数值模拟对比方面做出深刻分析, 得出这两种作物间作系统所产生的增产优效结果。

2. 玉米单作生长时干物质积累的非自治 Logistic 微分方程模型

玉米是在中国种植面积最广的一类禾本科作物, 对中国的粮食安全和社会稳定起着极其重要的作用。随着畜牧业的迅速发展及“粮改饲”产业结构的调整, 人们对玉米食品需求量的增大, 玉米的高产稳产成为一个新的挑战性问题。实际上, 玉米产量的形成本质上是一个干物质积累的过程, 玉米的物质积累量提高决定着产量提高。在本节中, 将基于一些农学的实验数据, 把玉米每个阶段的干物质积累量与玉米生长的时间联系起来, 建立起一个非自治的 Logistic 微分方程模型, 从而从对玉米的整个干物质积累变化的过程中获得更加清晰的本质规律认识。

2.1. 模型的建立

分析文献[14] [15] [16] [17] [18]发现, 对玉米的生长特性和干物质积累过程总结归纳为以下几个基本事实:

(F1) 增加玉米的干物质积累量是提高其产量的基本途径, 而玉米干物质质量的积累速率则是影响产量的主要限制因素;

(F2) 玉米的干物质积累过程符合“慢-快-慢”的生长规律, 呈现“S”型曲线增长趋势, 且在种植 60~80 天内干物质积累能力最快。

(F3) 随着时间的推移, 玉米的干物质积累量最终会达到一个饱和值(即最大值)。

基于以上事实, 我们做出如下合理假设:

(H1) 单株玉米的干物质积累量的饱和值保持不变, 为一个常数。

(H2) 玉米受自身条件, 以及光照、温度等多种自然因素的综合影响, 不同生育期阶段所表现的干物质积累能力不同, 由此可设玉米干物质积累的内禀增长率为一个随时间呈“先增后减”变化趋势的二次函数。

(H3) 玉米在整个生育期干物质积累的速度与所剩的资源成正比。

根据上述基本事实和合理假设, 现设 t 时刻单株玉米的干物质积累量为 $M(t)$, 单位为 g/株, 饱和值(最大值)为 M_m , 玉米的干物质内禀增长率为 $r_M(t) = -\alpha_1(t-70)^2 + \beta_1$, 其中 α_1, β_1 为待定参数, 且 $\alpha_1 > 0$, 于是, 可以建立如下一个单株玉米的干物质积累量变化的非自治 Logistic 模型初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = r_M(t)M \left(1 - \frac{M}{M_m}\right) = \left(-\alpha_1(t-70)^2 + \beta_1\right)M \left(1 - \frac{M}{M_m}\right), \\ M(t_0) = M_0 \end{cases} \quad (1)$$

2.2. 模型的求解与定性分析

模型(1)是一个 $n = 2$ 时的伯努利方程, 利用伯努利方程的求解公式可得到(1)的解为:

$$M(t) = \frac{M_0 e^{\left(-\frac{\alpha_1}{3}(t^3-t_0^3)+70\alpha_1(t^2-t_0^2)-4900\alpha_1(t-t_0)+\beta_1(t-t_0)\right)}}{1 + \frac{M_0}{M_m} \left(e^{\left(-\frac{\alpha_1}{3}(t^3-t_0^3)+70\alpha_1(t^2-t_0^2)-4900\alpha_1(t-t_0)+\beta_1(t-t_0)\right)} - 1 \right)} \quad (2)$$

从(2) (3)中可以看出, 函数 $M(t)$ 具有以下性质:

1) 存在两条渐近线, 即 $t \rightarrow t_0$ 时, $M(t) \rightarrow M_0$; $t \rightarrow \infty$ 时, $M \rightarrow M_m$ 。

2) 随着时间的增长, 虽然玉米的干物质积累速度有所减慢, 但是其积累量是个累加的过程, 所以 $M(t)$ 应是关于时间 t 单调递增的函数。

3) 存在一个时间拐点, 拐点的纵坐标为 $M = \frac{M_m}{2}$ 。

对模型(1)的解结果(3)进行二阶求导得:

$$\frac{d^2M}{dt^2} = \left(-2\alpha_1(t-70) + \left(-\alpha_1(t-70)^2 + \beta_1\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{M_m}\right) \right) M \left(1 - \frac{M}{M_m}\right) \quad (3)$$

由 $\frac{d^2M}{dt^2} = 0$, 得到一个时间拐点为 $\left(70, \frac{M_m}{2}\right)$ 。在这个时间拐点处, 玉米的干物质积累速度可达到最大值,

即 $\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\max} = \frac{\beta_1 M_m}{4}$ 。依据玉米干物质积累速度的快慢, 可将积累过程划分为三个阶段: 初始增长阶段, 指数增长阶段和稳定增长阶段, 即: 满足“慢-快-慢”的规律。据此, 模型解结果(2)中的拐点就是指玉米从指数增长阶段到稳定增长阶段的转折点。如果到达拐点的的时间越晚, 那么, 玉米的指数增长阶段就越长, 因而玉米的最终干物质积累量就越高。

2.3. 数值模拟与验证

玉米的生育期一般可划分为苗期、拔节期、抽雄期、灌浆期、成熟期, 由参考文献[19]得到玉米干物质积累量的数据, 见表 1:

Table 1. Dry matter accumulation data of maize

表 1. 玉米干物质积累量数据

t/day	20	35	50	60	81	100	133
M/g·plant ⁻¹	10	28	75	132	260	323	346

由表 1 可知, 模型(1)的初值条件为 $M(20) = 10$ 。利用 OpenLu 编程软件拟合得到(1)中的参数值为: $\alpha_1 = 0.000001104$, $\beta_1 = 0.0764$, $M_m = 348$ 。此时, 描述单株玉米干物质积累量变化的微分方程模型(1)为:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = \left(-0.000001104(t-70)^2 + 0.0764\right)M \left(1 - \frac{M}{348}\right) \\ M(20) = 10 \end{cases} \quad (4)$$

通过编写 Matlab 程序计算模型(4), 得到如图 1 所示的数值结果:

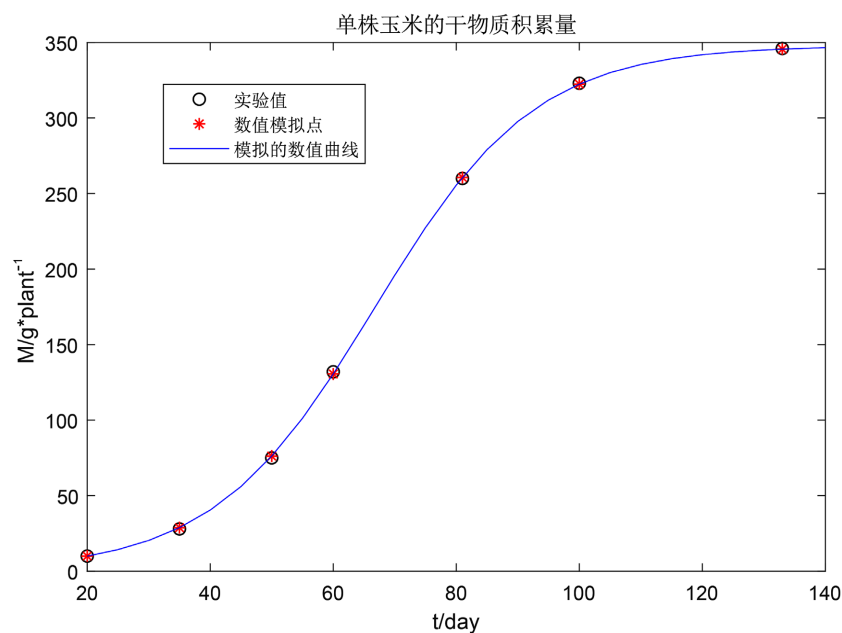


Figure 1. Numerical simulation results of initial value problem (4)

图 1. 初值问题(4)的数值模拟结果

从图 1 中可看出, 实验数据与对应的模拟数据相差不大, 且求得它们之间的相关系数 R^2 为 0.99998, 这说明通过选取的参数拟合出来的数值图像与实验数据非常吻合, 参数选取的合理性得到了验证, 因此, 用模型(4)来描述玉米的干物质积累过程是可行的。

进一步, 从图 1 中可以得到以下几点结论:

1) 玉米在前期干物质的积累速度相对缓慢, 中期比较快, 后期又开始缓慢, 呈 S 型增长趋势。
2) 玉米在 70 天左右(抽雄期)时所表现出的干物质积累能力是最强的, 内禀增长率可高达 0.0764, 干物质积累量略高于 $\frac{M_m}{2}$ 。而玉米在 140 天左右(成熟期)时干物质积累能力是最弱的, 此时内禀增长率最小, 最终的干物质积累量达到最大并趋于稳定, 很难再受时间的影响而改变。

3) 玉米的干物质积累主要集中在拔节 - 抽雄 - 灌浆期。因此, 要提高玉米的产量, 应保证玉米在这一阶段能够获得优质生长。

另外, 如果从玉米内禀增长率的大小对其干物质积累量的影响方面考虑, 那么, 可以发现, 当玉米干物质积累的内禀增长率 r_M 取最大值 0.0764 时, 最终玉米在 140 天时的干物质质量 $M(140)$ 可以积累到 346.8 g; 而当增长率 r_M 取最小值 0.07099 时, 干物质积累量 $M(140)$ 可达 345.7 g。由此说明, 玉米干物质积累的内禀增长率 r_M 与干物质积累量成正比, 即内禀增长率越大, 所收获的干物质积累量越高。

3. 马铃薯单作生长时干物质积累的非自治 Logistic 微分方程模型

马铃薯作为中国第四大重要粮食作物, 营养价值高、用途广泛, 在制作工业原料、改善膳食结构、保障粮食安全、帮助农民致富等方面占据着举足轻重的地位。干物质的积累是反映马铃薯产量的一个关键性指标之一, 弄清其干物质累积特点, 对于提高马铃薯产量意义重大。为此, 在本节中, 将通过建立合理的非自治 Logistic 微分方程模型来研究马铃薯整个生育期内的干物质积累过程。

3.1. 模型的建立

马铃薯是一类茄科作物, 它的生育期一般可大致分为苗期、花期、块茎膨大期、淀粉积累期、成熟期等五个阶段, 不同生育阶段干物质积累量有所不同, 通过分析文献[20], 得到以下几个基本事实:

(F1) 干物质生产是马铃薯作物产量形成的基础, 而干物质的积累是提高马铃薯产量及增加经济收益的关键。

(F2) 马铃薯整株的干物质积累过程呈现明显的“S”型增长规律, 具体可分为 3 个阶段: 一是从苗期至末花期, 干物质积累比较缓慢; 二是从块茎膨大期至淀粉积累前期, 干物质积累量迅速增加, 在这 50~70 天内积累能力达到最快, 几乎一半以上的干物质积累将在此期间内完成; 三是从淀粉积累后期至成熟期, 干物质积累量较为平稳, 甚至略有下降。

(F3) 到淀粉积累前期, 马铃薯的干物质积累量将会达到最大值。

据此, 我们做出如下合理假设:

(H1) 在马铃薯成熟收获前夕, 整株的干物质积累量达到最大值后保持不变。

(H2) 由于马铃薯受光照、温度等多种自然因素的影响, 以及受自身条件的限制, 不同生育期阶段整株的干物质积累能力不同, 且积累过程符合“S”型增长, 故设马铃薯干物质积累的内禀增长率是一个与时间有关的呈“先增后减”趋势的二次函数。

(H3) 马铃薯在整个生育期内干物质积累的速度与所剩的资源成正比。

基于上述几个基本事实和合理假设, 设 t 时刻马铃薯整株的干物质积累量为 $P(t)$, 单位 g/株, 最大值为 P_m , 马铃薯干物质积累的内禀增长率为 $r_p(t) = -\alpha_2(t-60)^2 + \beta_2$, 其中 α_2, β_2 为待定参数且 $\alpha_2 > 0$,

选定初值为 $P(t_0) = P_0$, 于是建立整株干马铃薯物质积累量变化的非自治 Logistic 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r_p P \left(1 - \frac{P}{P_m}\right) = \left(-\alpha_2 (t-60)^2 + \beta_2\right) P \left(1 - \frac{P}{P_m}\right), \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (5)$$

3.2. 模型的求解与定性分析

类似于前面第 2 节, 可得模型(5)的解为

$$P(t) = \frac{P_0 e^{\left(-\frac{\alpha_2}{3}(t^3-t_0^3)+60\alpha_2(t^2-t_0^2)-3600\alpha_2(t-t_0)+\beta_2(t-t_0)\right)}}{1 + \frac{P_0}{P_m} \left(e^{\left(-\frac{\alpha_2}{3}(t^3-t_0^3)+60\alpha_2(t^2-t_0^2)-3600\alpha_2(t-t_0)+\beta_2(t-t_0)\right)} - 1 \right)} \quad (6)$$

从(6)中可以看出, 函数 $P(t)$ 具有以下性质:

- 1) 存在两条渐近线, 即 $t \rightarrow t_0$ 时, $P \rightarrow P_0$; $t \rightarrow \infty$ 时, $P \rightarrow P_m$ 。
- 2) 马铃薯的干物质积累量 $P(t)$ 是时间 t 单调递增的函数。
- 3) 存在一个时间拐点, 拐点的纵坐标为 $P = \frac{P_m}{2}$ 。

对模型(5)的解结果(7)进行二阶求导得:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \left(-2\alpha_2 (t-60) + \left(-\alpha_2 (t-60)^2 + \beta_2 \right)^2 \left(1 - \frac{2P}{P_m} \right) \right) P \left(1 - \frac{P}{P_m} \right) \quad (7)$$

由 $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$, 求得一个拐点为 $\left(60, \frac{P_m}{2} \right)$ 。在这个拐点处, 马铃薯的干物质积累速度可达到最大, 即 $\left(\frac{dP}{dt} \right)_{\max} = \frac{\beta_2 P_m}{4}$, 而在超过或低于这个拐点, 马铃薯的干物质积累速度又会有所减缓。

3.3. 数值模拟与验证

刘星在文献[20]中给出了田间定位试验得到的马铃薯干物质积累量的实验数据。现将马铃薯各生育期的特点和实验数据进行比对, 选取苗期、花期、块茎膨大期、淀粉积累期、成熟期等各个阶段相应的数据, 经整理得到表 2 中的数据。

Table 2. Dry matter accumulation data of potato

表 2. 马铃薯干物质积累量数据

t/day	10	24	44	55	68	76	82	85	90
P/g·plant ⁻¹	18	22	80	140	210	250	265	270	273

从表 2 得到(5)的初值条件为 $P(10) = 18$, 再利用上述表 2 中的数据, 用 OpenLu 编程软件迭代寻优 100 次, 拟合得最佳的各个参数值为: $\alpha_2 = 0.00002908$, $\beta_2 = 0.0848$, $P_m = 296$ 。于是, 得到具体的模型(5)为:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \left(-0.00002908(t-60)^2 + 0.0848 \right) P \left(1 - \frac{P}{296} \right) \\ P(10) = 18 \end{cases} \quad (8)$$

同样地, 通过 Matlab 编程计算, 得出微分方程模型初始问题(8)的数值解, 如图 2 所示。

由图 2 可知, 拟合出来的数值曲线总体上都经过实验数据点, 且求得实验数据与模拟数据它们之间的相关系数 R^2 达 0.9996, 非常接近于 1, 这说明: 通过迭代寻优的方法选取的参数是十分合理的, 因此, 可用拟合得到的数值曲线来反映马铃薯生育期内干物质积累量的一个变化趋势。

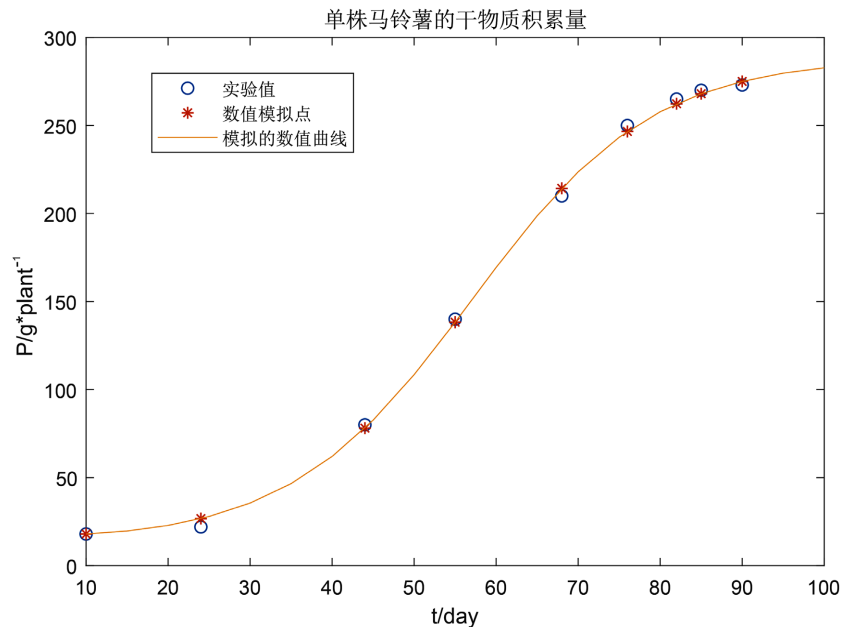


Figure 2. Simulation results of initial value problem (8)
图 2. 初值问题(8)的数值模拟结果

由图 2, 我们容易得到以下结论:

- 1) 马铃薯整株的干物质积累量符合“慢 - 快 - 慢”的 S 型曲线生长特征;
- 2) 在马铃薯处于块茎膨大期(60 天左右)时所表现出的干物质积累能力是最强的, 内禀增长率可高达 0.0848, 此时干物质积累量约为 $\frac{M_m}{2}$ 。逐渐地, 随着马铃薯生长从块茎膨大期转至淀粉积累期, 再到成熟期, 内禀增长率逐渐下降, 马铃薯的干物质积累速度也相对减弱, 最终, 当马铃薯到达成熟 - 收获生育阶段时, 干物质积累速度接近于零, 使干物质的积累量达到最大值, 且在一定时间内趋于稳定。
- 3) 马铃薯的干物质积累主要集中在块茎形成期 - 块茎膨大期 - 淀粉积累期。因此, 要提高马铃薯的产量, 应保证马铃薯在此阶段内养分充足。

另外, 如果从马铃薯内禀增长率的大小对其干物质积累量的影响方面来分析, 那么, 若马铃薯干物质积累的内禀增长率 r_p 取最大值 0.0848 时, 马铃薯在第 100 天的时候干物质积累量 $P(100)$ 可达 293.8 g; 而当 r_p 取最小值 0.0121 时, 干物质积累量 $P(100)$ 可达 47.76 g。由此我们发现, 马铃薯整株的干物质积累量受其内禀增长率 r_p 的影响, 即内禀增长率 r_p 越大, 所收获的干物质积累量就越高。

4. 玉米与马铃薯间作生长时干物质积累的二维非自治微分方程系统模型

连作障碍是指在同一片土壤连续地种植同一种作物或近源作物, 导致作物的生长发育情况异常、品质变差、产量降低的一种重茬问题。玉米和马铃薯这两种作物都不适合连年种植。连作障碍会严重地影响玉米和马铃薯的生育状况及产量增加, 已有相关研究表明: 如果合理地采用禾本科类与茄科类的间作

模式, 那么, 可以有效地克服玉米与马铃薯的连作障碍, 充分发挥两者作物的种间间作优势, 从而高效地提高作物对于地上部光、热、气等资源, 以及地下部土壤养分的利用效率, 最终达到高产高效优质的目的[21]。因此, 具有重要意义的问题是: 需要通过建立起合理数学模型来从机理上揭示间作系统的优势所在。

在本节中, 我们主要考虑玉米与马铃薯间作系统的二维微分方程组建模问题, 深入分析两者间作产生的增产效果。将基于几个基本事实和合理假设, 建立间作下玉米与马铃薯干物质积累的微分方程模型, 在理论上进行模型正平衡点的稳定性和增产优势分析, 在数值模拟上进行增长优势和生长关键时间点的分析。

4.1. 模型的建立

从参考文献[1][9]中, 我们分析提取如下重要信息:

(F1) 相比于单作, 玉米与马铃薯间作显著地提高了玉米茎叶和籽粒等地上部分对于全氮的吸收, 其表现在玉米地上部分的干物质积累速率加快。

(F2) 在玉米与马铃薯间作体系中, 玉米根系比较深固, 可以很好地吸收利用土壤水分, 间作改变了这两种作物的种间关系, 提高了玉米的活性及其根系的微生物数量, 促进了玉米植株对养分的吸收利用, 有利于植株的生长发育、病害控制, 进而提高玉米地上部干重, 增加了玉米在产量上的优势。

(F3) 在玉米与马铃薯的间作系统中, 由于玉米生长相对较快, 在马铃薯花期和块茎膨大期时, 会对马铃薯造成遮阴现象, 一定程度地减少了马铃薯的光合速率、光合产物量的累积量等。

(F4) 玉米与马铃薯这一高、矮秆作物间作栽培时, 土地当量比(LER)大于 1, 说明间作模式相比于单作更具有优势, 而且玉米的种间竞争能力要强于马铃薯, 说明了玉米更具有间作优势。

为此, 我们可以做出如下合理假设:

(H1) 在间作系统下, 玉米和马铃薯的干物质积累量仍保持单作时呈现出“S”型 Logistic 模型, 但是, 本该属于马铃薯在单作时吸收的部分养分被玉米抢占了, 马铃薯对玉米可谓起到促进作用, 而玉米对马铃薯起到一定的抑制作用。设玉米的干物质积累速率与马铃薯相对干物质积累量成正比, 马铃薯的干物质积累速率与玉米相对干物质积累量成反比。

(H2) 只考虑交错行单株玉米和单株马铃薯的干物质积累量情况。

(H3) 忽略间作对玉米和马铃薯这两种作物的内禀增长率的弱微影响, 内禀增长率依旧取单作时的关系式。

根据以上描述和假设, 设单株玉米与马铃薯在 t 时刻的干物质积累量分别为 $M(t)$ 、 $P(t)$, 单作时最大值为 M_m , P_m , 内禀增长率为 $r_M(t) = -\alpha_1(t-70)^2 + \beta_1$, $r_P(t) = -\alpha_2(t-60)^2 + \beta_2$, 促进作用影响因子为 γ , 抑制作用影响因子为 η , 且 $0 < \gamma$, $0 < \eta < 1$ 。于是, 我们有间作下玉米与马铃薯干物质积累量变化的非自治微分方程模型为:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = r_M M \left(1 - \frac{M}{M_m} + \gamma \frac{P}{P_m} \right) \\ \frac{dP}{dt} = r_P P \left(1 - \frac{P}{P_m} - \eta \frac{M}{M_m} \right) \end{cases} \quad (9)$$

4.2. 模型的正平衡点的稳定性分析

因模型(9)为非自治系统, 要构造出合适的 Lyapunov 函数来分析平衡点的稳定性存在较大的困难, 故考虑将模型(9)视为自治系统来进行分析, 即模型(9)中玉米和马铃薯的内禀增长率 $r_M(t)$, $r_P(t)$ 视为参

数, 得到相应于模型(9)的自治系统, 通过线性稳定性理论来分析其正平衡点的稳定性问题。

$$\text{记 } s(M, P) = r_M M \left(1 - \frac{M}{M_m} + \gamma \frac{P}{P_m} \right), \quad h(M, P) = r_P P \left(1 - \frac{P}{P_m} - \eta \frac{M}{M_m} \right),$$

由 $s(M, P) = 0$, $h(M, P) = 0$, 可得四个平衡点如下:

$$N_1(0, 0), N_2(0, P_m), N_3(M_m, 0), N_4 \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma\eta} M_m, \frac{1-\eta}{1+\gamma\eta} P_m \right)$$

很显然, 其中 $N_4 \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma\eta} M_m, \frac{1-\eta}{1+\gamma\eta} P_m \right)$ 是唯一的正平衡。记 $a = \frac{1+\gamma}{1+\gamma\eta}$, $b = \frac{1-\eta}{1+\gamma\eta}$, $M^* = aM_m$, $P^* = bP_m$,

下面分析 $N_4(M^*, P^*)$ 的稳定性。 $N_4(M^*, P^*)$ (9)的雅可比矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial M} & \frac{\partial s}{\partial P} \\ \frac{\partial h}{\partial M} & \frac{\partial h}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_M \left(1 - 2 \frac{M}{M_m} + \gamma \frac{P}{P_m} \right) & \frac{\gamma}{P_m} r_M M \\ -\frac{\eta}{M_m} r_P P & r_P \left(1 - 2 \frac{P}{P_m} - \eta \frac{M}{M_m} \right) \end{bmatrix}$$

在正平衡点 $N_4(M^*, P^*)$ 处的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r_M \left(1 - 2 \frac{M^*}{M_m} + \gamma \frac{P^*}{P_m} \right) & -\frac{\gamma}{P_m} r_M M^* \\ \frac{\eta}{M_m} r_P P^* & \lambda - r_P \left(1 - 2 \frac{P^*}{P_m} - \eta \frac{M^*}{M_m} \right) \end{vmatrix} = 0$$

经计算整理得到

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - \left(r_M \left(1 - 2 \frac{M^*}{M_m} + \gamma \frac{P^*}{P_m} \right) + r_P \left(1 - 2 \frac{P^*}{P_m} - \eta \frac{M^*}{M_m} \right) \right) \lambda \\ & + r_M r_P \left(\left(1 - 2 \frac{M^*}{M_m} + \gamma \frac{P^*}{P_m} \right) \left(1 - 2 \frac{P^*}{P_m} - \eta \frac{M^*}{M_m} \right) + \frac{\gamma\eta}{M_m P_m} M^* P^* \right) = 0 \end{aligned}$$

将 $M^* = aM_m$, $P^* = bP_m$ 代入上式得

$$\lambda^2 - (r_M(1-2a+\gamma b) + r_P(1-2b-\eta a))\lambda + r_M r_P ((1-2a+\gamma b)(1-2b-\eta a) + \gamma\eta ab) = 0$$

即

$$\lambda^2 + (ar_M + br_P)\lambda + a(1-\eta)r_M r_P = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(ar_M + br_P) \pm \sqrt{(ar_M + br_P)^2 - 4a(1-\eta)r_M r_P}}{2} < 0.$$

因为正平衡点 $N_4 \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma\eta} M_m, \frac{1-\eta}{1+\gamma\eta} P_m \right)$ 处的特征根 λ_1 , λ_2 都小于 0, 所以按照二维微分方程系统的

稳定性分析理论[22]可知, 正平衡点 $N_4 \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma\eta} M_m, \frac{1-\eta}{1+\gamma\eta} P_m \right)$ 是稳定的结点, 说明玉米和马铃薯在间作时

干物质积累量将在此处趋于稳定。

下面, 我们从两者产量的相对增长率方面来进行间作优势的理论分析, 可得出:

1) 玉米的相对增长率为: $\frac{M^* - M_m}{M_m} = \frac{\gamma(1-\eta)}{1+\gamma\eta} > 0$, $M^* > M_m$, 说明玉米产量增长, 呈现优势;

2) 马铃薯的相对减少率为 $\frac{P^* - P_m}{P_m} = -\frac{(1+\gamma)\eta}{1+\gamma\eta} < 0$, $P^* < P_m$, 说明马铃薯产量减少;

3) 玉米和马铃薯间作种植时总产量的相对增长率: 当 γ , η 满足条件 $0 < \eta < \frac{1}{2}$, $\gamma > \frac{\eta}{1-2\eta}$ 时,

$$\gamma(1-\eta) > (1+\gamma)\eta, \text{ 有 } \frac{M^* + P^* - (M_m + P_m)}{M_m + P_m} = \frac{\gamma(1-\eta)M_m - (1+\gamma)\eta P_m}{(1+\gamma\eta)(M_m + P_m)} \geq \frac{(1+\gamma)\eta(M_m - P_m)}{(1+\gamma\eta)(M_m + P_m)} > 0,$$

$M^* + P^* > M_m + P_m$, 由此发现, 在这在间作下玉米和马铃薯总的干物质积累量大于单作时总的干物质积累量, 呈现出了两者间作的优势。

4.3. 数值模拟与理论概述

从第 2,3 节已知, 玉米干物质积累量的最大值为 $M_m = 348$, 马铃薯干物质积累量的最大值为 $P_m = 296$ 。在选定微分方程系统(9)的初值和参数为

$$M(20) = 10, P(20) = 22.9, r_M(t) = -0.000001104(t - 70)^2 + 0.0764,$$

$$r_P(t) = -0.00002908(t - 60)^2 + 0.0848, \gamma = 0.303, \eta = 0.0778$$

的情况下, 计算得到正平衡点 $N_4(442.96, 266.55)$ 。进一步, 利用 Matlab 编程计算, 得到间作时模型(9)的数值解以及与单作时干物质积累量的一个比较, 如图 3 所示。

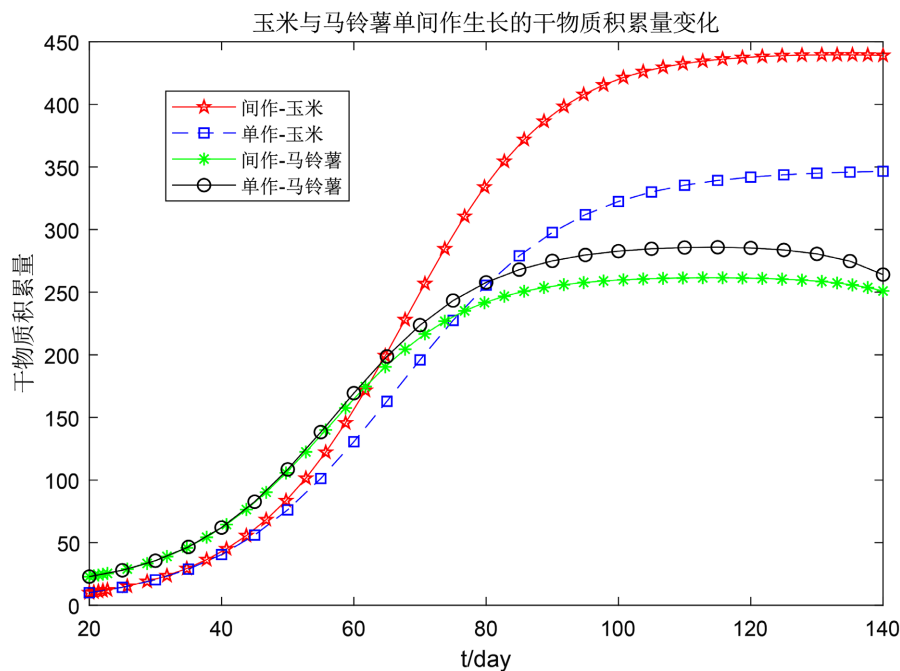


Figure 3. Comparison of dry matter accumulation between maize and potato under monoculture or intercropping growth

图 3. 玉米与马铃薯单作生长时干物质积累量的比较

从图 3 中, 我们可以看出:

1) 玉米和马铃薯无论是单作, 还是间作, 干物质积累量在整个生育期内都逐渐增长, 不同时期不同处理下玉米和马铃薯干物质积累量都表现出不同的趋势。间作玉米的干物质积累量高于单作, 而间作马铃薯的则低于单作, 这就说明间作体系促进了玉米干物质的积累, 而抑制了马铃薯干物质的积累。究其原因, 在间作生长过程中, 玉米对马铃薯生长抑制作用较强, 养分吸收方面玉米处于竞争优势, 马铃薯处于劣势, 从而导致了玉米干物质积累量增长比较迅速, 而马铃薯的相对缓慢。

2) 在间作条件下, 就玉米而言, 玉米在 140 天的时候干物质积累量为 439.1 g, 与单作时的 346.4 g 相比, 相对提高了 26.76%, 具有较明显的产量优势。就马铃薯而言, 马铃薯在 100 天的时候干物质积累量为 259.9 g, 与单作时的 282.8 g 相比, 降低幅度为 8.10%, 不利于马铃薯产量的增加。然而, 就玉米和马铃薯两者的总量而言, 增产 11.09%, 这说明了这两种作物间作起来产生了群体产量优势。

5. 结论

在本文中, 首先依据前人对于玉米和马铃薯生长特性方面的研究, 通过将经典 Logistic 模型中的常数内禀增长率改进为一个显含时间的二次函数, 从而分别建立了关于玉米和马铃薯单作生长时干物质积累的一维非自治 Logistic 微分方程模型。模型(1) (5)的数值模拟结果表明, 模拟值分别与表 1、表 2 中的实验数据高度吻合, 由此验证了这两种新建模型分别合理地模拟和解释了玉米与马铃薯在生长发育过程中干物质的积累过程。

然后, 考虑到玉米和马铃薯在间作生长时有着促进和抑制的作用, 在两种单作模型的基础上加入了合理的双线性耦合项, 建立了玉米和马铃薯间作生长时干物质积累的二维非自治微分方程模型(9)。对模型的数值模拟分析得出, 在间作系统下, 马铃薯的干物质积累量与单作相比减少了 8.10%, 玉米的提高了 26.76%, 马铃薯处于劣势, 玉米处于优势。且庆幸的是, 玉米和马铃薯两者总的干物质积累量增加了 11.09%, 这说明间作相比单作提高了群体产量优势。因此, 依据本文的模型和数值模拟结果分析, 在选择玉米和马铃薯的种植方式时, 可以优先考虑间作栽培。

综上, 本文探讨了关于自然条件下玉米和马铃薯单作生长时干物质积累的模型, 通过数据比对反映出了间作可使作物增产的优势, 后续可在间作模型的基础上进一步考虑如何引入现代农业技术, 以此来实现作物再增产的目标。

参考文献

- [1] 杜春风. 马铃薯/玉米间作栽培对土壤和作物的影响[D]: [硕士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2017.
- [2] 刘星, 张书乐, 刘国锋, 邱慧珍, 王蒂, 张俊莲, 沈其荣. 连作对甘肃中部沿黄灌区马铃薯干物质积累和分配的影响[J]. 作物学报, 2014, 40(7): 1274-1285.
- [3] 范志伟, 吴开贤, 安瞳昕, 杨圆满, 周锋, 吴伯志. 玉米马铃薯间作群体的蒸腾量和蒸腾效率研究[J]. 干旱地区农业研究, 2016, 34(5): 129-137.
- [4] 刘英超, 汤利, 郑毅. 间作玉米马铃薯土壤水氮协同吸收特征研究[J]. 中国土壤与肥料, 2020(4): 150-156.
- [5] 耿川雄, 任家兵, 马心灵, 龙光强, 鲁耀, 汤利. 基于 LCA 的不同间作体系产量优势及温室效应研究[J]. 中国生态农业学报(中英文), 2020, 28(2): 159-167.
- [6] Ebwoggu, M., Adipala, E., Ssekabembe, C.K., *et al.* (2001) Effect of Intercropping Maize and Solanum Potato on Yield of the Component Crops in Central Uganda. *African Crop Science Journal*, **9**, 83-96. <https://doi.org/10.4314/acsj.v9i1.27628>
- [7] 覃潇敏, 郑毅, 汤利, 等. 玉米与马铃薯间作对根际微生物群落结构和多样性的影响[J]. 作物学报, 2015, 41(6): 919-928.
- [8] 黄承建, 赵思毅, 王季春, 等. 马铃薯/玉米不同行数比套作对马铃薯光合特性和产量的影响[J]. 中国生态农业

学报, 2012, 20(11): 1443-1450.

- [9] 李莉. 马铃薯间作不同作物的互作效应研究[D]: [硕士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2018.
- [10] 刘春, 张春辉, 等. 基于能量模型的水稻生长模型[J]. 应用气象学报, 2013, 24(2): 240-246.
- [11] 符云锦. 农作物生长质量的非线性微分方程模型与分析[J]. 汕头大学学报, 2014, 29(4): 31-34.
- [12] 李文斌. 声频控制对水稻分蘖数生长影响的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2019: 1-28.
- [13] 梁仕军. 三种不同环境下花生生长发育的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2021.
- [14] 赵秀萍. 玉米的生育期划分及生长发育特性[J]. 养殖技术顾问, 2014(4): 85.
- [15] Ottarianoe, C. (1981) Phenotypic and Genetic Relationships between Yield Components in Maize. *Euphytica*, **30**, 601-609. <https://doi.org/10.1007/BF00038787>
- [16] 邓天福, 王霞. 基于 Richards 方程的玉米灌浆曲线模型[J]. 河南科技学院学报, 2016, 44(6): 17.
- [17] 于泽涛, 王存凯. 米产量与干物质积累过程模型中品种参数的建立方法与分析[J]. 玉米科学, 2016, 24(4): 130-136.
- [18] 乔嘉, 朱金城. 基于 Logistic 模型的玉米干物质积累过程对产量影响研究[J]. 中国农业大学学报, 2011, 16(5): 32-38.
- [19] 胡莎莎, 王飞, 李亚辉, 孔乐, 尹飞, 刘领, 付国占, 焦念元. 玉米-花生间作行比与磷肥施用对玉米干物质积累及产量的影响[J]. 贵州农业科学, 2019, 47(8): 18-22.
- [20] 刘星, 张书乐. 连作对甘肃中部沿黄灌区马铃薯干物质积累和分配的影响[J]. 作物学报, 2014, 40(7): 1274-1285.
- [21] 厉浩. 马铃薯间作玉米、蚕豆下生长发育及种间关系研究[D]: [硕士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2019: 1-32.
- [22] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分几何理论与分支[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.