Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4443-4450
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117471

Hans汉斯

正规权诱导的 Bergman 空间上的 Hankel 算子

王尔敏，施业成*

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江

收稿日期：2022年6月8日；录用日期：2022年7月5日；发布日期：2022年7月12日

摘 要

本文主要刻画当 $1 < q < p < \infty$ 时，由满足一定条件的符号函数所诱导的 **Hankel** 算子 $H_f, H_{\overline{f}}$ 从 A^p_ω 到 L^q_Ω 同时有界或紧的特征，其中 ω, Ω 是正规权。

关键词

加权 **Bergman** 空间，有界性，**Hankel** 算子

Hankel Operators on Bergman Spaces Induced by Regular Weights

Ermin Wang, Yecheng Shi*

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: Jun. 8^{th}, 2022; accepted: Jul. 5^{th}, 2022; published: Jul. 12^{th}, 2022

Abstract

Given $\omega, \Omega \in \mathcal{R}$**, for** $1 < q < p < \infty$**, we characterize those symbols** f **for which the**

* 通讯作者。

文章引用: 王尔敏, 施业成. 正规权诱导的 Bergman 空间上的 Hankel 算子[J]. 应用数学进展, 2022, 11(7): 4443-4450. DOI: 10.12677/aam.2022.117471

induced Hankel operators $H_f, H_{\overline{f}}$ are both bounded (compact) from weighted Bergman space A^p_ω to Lebesgue space L^q_Ω.

Keywords

Weighted Bergman Spaces, Boundedness, Hankel Operators

1. 前言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面上的单位圆盘. 对 $1 \le p < \infty$, 给定 $\mathbb{D}$ 上的非负可测函数 ω, 空间 L^p_ω (或记为 $L^p(\omega dA)$) 是 $\mathbb{D}$ 上所有满足

$$\|f\|_{L^p_\omega} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

的 Lebesgue 可测函数的全体, 其中 dA 是 $\mathbb{D}$ 上的标准面积测度. 我们用符号 L^p 表示经典的 p 次 Lebesgue 空间, 其范数为 $\|\cdot\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |\cdot|^p dA\right)^{\frac{1}{p}}$. 我们用 $H(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上全纯函数的全体. 加权 Bergman 空间定义为 $A^p_\omega = L^p_\omega \cap H(\mathbb{D})$. 显然 A^p_ω 是 L^p_ω 的闭子空间, A^2_ω 是一个 Hilbert 空间.

若一个径向权函数 ω 满足下列三个条件：(1) $\omega \in L^1[0,1)$; (2) 函数 $\hat{\omega}(z) = \int_{|z|}^1 \omega(s)ds$ 满足双倍条件, 即对所有的 $0 \le r < 1$, 有 $\hat{\omega}(r) \le K\hat{\omega}(\frac{1+r}{2})$, 其中 K 是与 r 无关的常数; (3)对所有的 $0 \le r < 1$, 有

$$\omega(r) \simeq \frac{\int_r^1 \omega(s)ds}{1-r}.$$

则称 ω 是一个正规权, 记为 $\omega \in \mathcal{R}$. 见文献 [1]. 给定一个径向权 ω, 我们可以通过令 $\omega(z) = \omega(|z|)$ 这种方式将 ω 定义到 $\mathbb{D}$ 上. 由正规权诱导的 Bergman 空间被很多学者加以研究, 见文献 [1–4]等.

给定 $\omega \in \mathcal{R}$, 对每一个 $z \in \mathbb{D}$, 映射 $f \mapsto f(z)$ 是 A^2_ω 上的连续线性泛函. 由 Riesz 表示定理可知, 存在唯一的函数 $B_z \in A^2_\omega$, 使得对一切的 $f \in A^2_\omega$, 都有 $f(z) = \langle f, B_z\rangle_\omega$, 其中

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\omega(z)dA(z), \quad f, g \in A^2_\omega.$$

其中 B_z称为 A^2_ω的 Bergman 核. 从 L^2_ω到 A^2_ω的正交投影 P_ω 可表示为

$$P_\omega(g)(z) = \int_{\mathbb{D}} g(\zeta)\overline{B_z(\zeta)}\omega(\zeta)dA(\zeta).$$

对任意的$1 \le p < \infty$, P_ω也是 L^p_ω 到 A^p_ω 的有界线性算子. 下面我们可以定义 A^p_ω 上的 Hankel 算子. 由符号 f 诱导的 Hankel 算子定义为

$$H^\omega_f(g) = (Id - P_\omega)(fg),$$

其中 Id 是恒等算子.

对 Hankel 算子的研究始于 [5],该文章研究了由共轭解析函数诱导的 Hankel 算子的有界性和紧性特征. 对于更一般的函数, [6]最先给出 Hankel 算子和 Bergman 度量下符号函数的平均震荡之间的联系. 其后这一思想被运用于有界对称域和强拟凸域上 Hankel 算子的研究中去, 见 [7,8]. 在 n 维复空间中单位球上, 限制 $1 < p \le q < \infty$, Pau等人 [9]研究 H_f 和 $H_{\overline{f}}$ 同时从加权 Bergman 空间 $A^p_{(1-|\cdot|^2)^\alpha}$ 到相应 Lebesgue 空间 $L^q_{(1-|\cdot|^2)^\beta}$ 为有界或紧算子的充要条件. 对 $1 < q < p < \infty$ 情形下, 相应的结果其后也已经得出, 见 [10]. 后来, 对所有的 $1 < p, q < \infty$, Hu 等人完整地刻画了 Hankel 算子是由正规权 ω 诱导的 Bergman 空间 A^p_ω 到 L^q_ω 的有界或紧算子的完整刻画. 最近, 上述结果被推广至 A^p_ω 到 L^q_Ω 情形, 其中 $1 < p, q < \infty$, 并且当 $1 < p \le q < \infty$ 时, $H_f, H_{\overline{f}} : A^p_\omega \to L^q_\Omega$ 同时有界或紧的特征也同时被刻画, 见 [11].

本文的主要目的是刻画当 $1 < q < p < \infty$ 时, 由满足一定条件的符号函数所诱导的 Hankel 算子 $H_f, H_{\overline{f}}$ 从 A^p_ω 到 L^q_Ω 同时有界或紧的特征. 精确地说, 给定 $\omega, \Omega \in \mathcal{R}$, 我们考虑由函数 $F \in L^1_\Omega$ 诱导的 $H_f, H_{\overline{f}} : A^p_\omega \to L^q_\Omega$ 同时有界或紧的充要条件. 本文将 [10]中的主要结论推广至正规权诱导的 Bergman 空间情形.

在本文中, 我们总是用 C 表示与所要考虑的函数无关的常数, 在不同的式子中每处 C 所代表的常数可能不相等. 两个量 A, B 如果满足 $A \le CB$, 则记为 $A \lesssim B$. 如果 A, B 满足 $A \lesssim B \lesssim A$, 我们就说 A, B 等价, 记为 $A \simeq B$.

2. 预备知识

在这部分, 我们给出一些预备知识. 令

$$\beta(z, \xi) = \frac{1}{2}\log\frac{1 + |\varphi_z(\xi)|}{1 - |\varphi_z(\xi)|}$$

表示$\mathbb{D}$ 上的 Bergman 距离, 其中 $\varphi_z(\xi) = \frac{\xi - z}{1 - \bar{z}\xi}$. 设 $z \in \mathbb{D}$, $r > 0$, 用 $D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z, w) < r\}$ 表示以 z为中点、 r 为半径的 Bergman 圆盘. 给定 $\omega \in \mathcal{R}$, 记

$$\breve{\omega}(z) = (1 - |z|)^2\omega(z).$$

令 $r > 0$, 存在 $\mathbb{D}$ 中的数列 $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ 使得

$$\mathbb{D} = \cup_{j=1}^\infty D(z_j, r), \quad D\left(z_j, \frac{r}{4}\right) \cap D\left(z_k, \frac{r}{4}\right) = \emptyset, \quad j \ne k.$$

上述数列称为 $\mathbb{D}$ 的一个 r-格. 若 E 是 $\mathbb{D}$ 上 Lebesgue 可测集, 我们用 χ_E 表示 E 的特征函数, 记 $|E|=\int_{\mathbb{D}}\chi_E dA$. 给定 r-格 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $R>0$, 存在常数 N 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{D(z_j,R)}\leq N.$$

设 $r>0$, L^1_{loc} 上的局部平均函数 M_r 定义为

$$M_r(f)(z)=\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)}f(\xi)dA(\xi).$$

任给定 $r>0$, 当 $1\leq p\leq\infty$ 时, M_r 是 L^p_ω 上的有界线性算子. 设 $f\in L^p_{loc}$, 定义 $G_{p,r}(f)$ 为

$$G_{p,r}(f)(z)=\inf\left\{\left(\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)}|f-h|^p dA\right)^{\frac{1}{p}}:h\in H(D(z,r))\right\}.$$

由于 $\omega\in\mathcal{R}$, 故有

$$G_{p,r}(f)(z)\simeq\inf\left\{\left(\frac{1}{\omega(D(z,r))}\int_{D(z,r)}|f-h|^p\omega dA\right)^{\frac{1}{p}}:h\in H(D(z,r))\right\}.$$

令 $f\in L^p_{loc}$, $r>0$, 记

$$MO_{p,r}(f)(z)=\left\{\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)}|f-f_{D(z,r)}|^q dA\right\}^{\frac{1}{p}}$$

其中 $f_{D(z,r)}=\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)}fdA$. 以及

$$\mathrm{Oss}_r(f)(z)=\sup_{\xi\in D(z,r)}|f(\xi)-f(z)|.$$

在 [11]中, 我们证明了如下定理：

定理A： 设 $\omega,\Omega\in\mathcal{R}$, $1<q<p<\infty$. 则对 $f\in L^1_\Omega$, 下列论述等价:

(A) $H^\Omega_f:A^p_\omega\to L^q_\Omega$ 有界;

(B) $H^\Omega_f:A^p_\omega\to L^q_\Omega$ 紧;

(C) 存在(等价于: 任意) $0<r\leq\alpha/2$, 有 $\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}G_{q,r}(f)\in L^{\frac{pq}{p-q}}$;

(D) f 具有如下分解 $f=f_1+f_2$, 其中 f_1 满足:

$$f_1\in C^1(\mathbb{D}),\ \Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}(1-|\cdot|)|\overline{\partial}f_1|\in L^{\frac{pq}{p-q}};$$

f_2 满足: 存在(等价于: 任意) $r>0$, 有

$$\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}}\in L^{\frac{pq}{p-q}}.$$

进而有

$$\|H_f^{\Omega}\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} \simeq \left\|\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}G_{q,r}(f)\right\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}}. \tag{2.1}$$

3. 主要结论

在这部分, 我们给出本文的主要定理并加以证明.

定理1: 设 $\omega, \Omega \in \mathcal{R}$, $1 < q < p < \infty$. 则对 $f \in L_\Omega^1$, 下列论述等价:

(A) $H_f^{\Omega}, H_{\overline{f}}^{\Omega} : A_\omega^p \to L_\Omega^q$ 为有界算子;

(B) $H_f^{\Omega}, H_{\overline{f}}^{\Omega} : A_\omega^p \to L_\Omega^q$ 为紧算子;

(C) 存在(等价于: 任意) $r > 0$, 有 $\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}MO_{q,r}(f) \in L^{\frac{pq}{p-q}}$;

(D) f 具有如下分解 $f = f_1 + f_2$, 其中 f_1 满足:

$$f_1 \in C^1(\mathbb{D}),\ \Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}\mathrm{Oss}_r(f_1) \in L^{\frac{pq}{p-q}};$$

f_2 满足: 存在(等价于: 任意) $r > 0$, 有

$$\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}}M_r(|f_2|^q)^{\frac{1}{q}} \in L^{\frac{pq}{p-q}}.$$

并且有

$$\|H_f^{\Omega}\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} + \left\|H_{\overline{f}}^{\Omega}\right\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} \simeq \left\|\breve{\Omega}^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}^{-\frac{1}{p}}MO_{q,r}(f)\right\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}}. \tag{3.1}$$

证明: $(B) \Rightarrow (A)$ 显然成立. 下证 $(A) \Leftrightarrow (C) \Leftrightarrow (D)$ 以及 $(C) \Rightarrow (B)$.

$(C) \Leftrightarrow (D)$. 假设存在 $r > 0$ 使得 f 满足 (C). 令 $f_1 = M_{\frac{r}{2}}(f)$, $f_2 = 1 - f_1$. 则当 $\beta(z,\xi) \le \frac{r}{2}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
|f_1(z) - f_1(\xi)| &\le |f_1(z) - M_r(f)(z)| + |M_r(f)(z) - f_1(\xi)| \\
&\le \frac{1}{|D(z,r/2)|}\int_{D(z,r/2)} |f_1(\cdot) - M_r(f)(z)|dA \\
&\qquad + \frac{1}{|D(\xi,r/2)|}\int_{D(\xi,r/2)} |f_1(\cdot) - M_r(f)(z)|dA \\
&\le C\,MO_{q,r}(f)(z).
\end{aligned}$$

所以

$$\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}}\mathrm{Oss}_r(f)(z) \lesssim \breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}}MO_{q,r}(f)(z). \tag{3.2}$$

对 f_2, 我们有

$$\begin{aligned} M_{\frac{r}{2}}(|f_2|^q)(z)^{\frac{1}{q}} &\leq M_{\frac{r}{2}}(|f - f_1(z)|^q)(z)^{\frac{1}{q}} + \mathrm{Oss}_{\frac{r}{2}}(f_1)(z) \\ &\leq C\, MO_{q,\frac{r}{2}}(f)(z) + \mathrm{Oss}_{\frac{r}{2}}(f_1)(z). \end{aligned}$$

由此和 (3.2) 可以推出

$$\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} M_{\frac{r}{2}}(|f_2|^q)(z)^{\frac{1}{q}} \lesssim \breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} MO_{q,r}(f)(z).$$

注意到 (D) 中的条件与 r 无关, 我们得出 $(C) \Rightarrow (D)$.

反之, 假设 f 具有如 (D) 中的分解: $f = f_1 + f_2$. 由$MO_{q,r}(f)(z) \lesssim \mathrm{Oss}_r(f)(z)$, 可知 f_1 满足 (C). 并且

$$\begin{aligned} MO_{q,r}(f_2)(z) &\leq M_r(|f_2|^q)(z)^{\frac{1}{q}} + M_r(|f|) \\ &\leq 2M_r(|f_2|^q)(z)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

表明 f_2 也满足 (C). 故 (D) 可推出 (C).

由于 (D) 中的条件与 r 无关, 我们可以得到 $\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}} MO_{q,r}(f) \in L^{\frac{pq}{p-q}}$ 与 r 无关.

$(A) \Leftrightarrow (C)$. 不妨设 $0 < r < \alpha$. 若 H_f^{Ω} 和 $H_{\overline{f}}^{\Omega}$ 都有界, 由 (2.1) 可知

$$\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} G_{q,r}(f)(z) \lesssim \|H_f^{\Omega}\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q}$$

以及

$$\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} G_{q,r}(\overline{f})(z) \lesssim \left\|H_{\overline{f}}^{\Omega}\right\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q}.$$

类似于文献 [12] 中命题 2.5 的证明可知

$$\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} MO_{q,r}(f)(z) \lesssim \|H_f^{\Omega}\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} + \left\|H_{\overline{f}}^{\Omega}\right\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q}. \tag{3.3}$$

反之, 由 $G_{q,r}(f)$ 的定义易知

$$G_{q,r}(f)(z) \leq MO_{q,r}(f)(z), \quad G_{q,r}(\overline{f})(z) \leq MO_{q,r}(f)(z). \tag{3.4}$$

故由定理 A 可知

$$\|H_f^{\Omega}\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} + \left\|H_{\overline{f}}^{\Omega}\right\|_{A_\omega^p \to L_\Omega^q} \lesssim \left\|\breve{\Omega}(z)^{\frac{1}{q}}\breve{\omega}(z)^{-\frac{1}{p}} MO_{q,r}(f)\right\|_{L^\infty}. \tag{3.5}$$

(3.1) 式由 (3.3) 及 (3.5) 即可得出.

$(C) \Rightarrow (B)$. 由 (C) 及 (3.4) 可知: $\Omega^{\frac{1}{q}}\omega^{-\frac{1}{p}} G_{q,r}(f) \in L^{\frac{pq}{p-q}}$. 再由定理 A 可知 $H_f^{\Omega}: A_\omega^p \to L_\Omega^q$ 为紧算子; 同理, $H_{\overline{f}}^{\Omega}: A_\omega^p \to L_\Omega^q$ 为紧算子. 定理得证.

致　谢

感谢审稿人的认真审阅.

基金项目

本论文受国家自然科学基金项目(12001258) 和岭南师范学院科研项目(ZL1925)资助.

参考文献

[1] Hu, Z.J. and Lu, J. (2019) Hankel Operators on Bergman Spaces with Regular Weights. *Journal of Geometric Analysis*, **29**, 3494-3519. https://doi.org/10.1007/s12220-018-00121-y

[2] Pavlovic, M. and Pelaez, J.A. (2008) An Equivalence for Weighted Integrals of an Analytic Function and Its Derivative. *Mathematische Nachrichten*, **281**, 1612-1623. https://doi.org/10.1002/mana.200510701

[3] Pelaez, J.A. and Rattya, J. (2013) Weighted Bergman Spaces Induced by Rapidly Increasing Weights. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **227**, 1066.

[4] Pelaez, J.A., Rattya, J. and Sierra, A.K. (2018) Berezin Transform and Toeplitz Operators on Bergman Spaces Induced by Regular Weights. *Journal of Geometric Analysis*, **28**, 656-687. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9837-9

[5] Axler, S. (1986) The Bergman Space, the Bloch Space and Commutators of Multiplication Operators. *Duke Mathematical Journal*, **53**, 315-332. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-86-05320-2

[6] Zhu, K. (1987) VMO, ESV, and Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **302**, 617-646. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0891638-4

[7] Bekolle, D., Berger, C.A., Coburn, L.A. and Zhu, K. (1990) BMO in the Bergman Metric on Bounded Symmetric Domains. *Journal of Functional Analysis*, **93**, 310-350. https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90131-4

[8] Li, H. (1992) BMO, VMO, and Hankel Operators on the Bergman Space of Strongly Pseudo Convex Domains. *Journal of Functional Analysis*, **106**, 375-408. https://doi.org/10.1016/0022-1236(92)90054-M

[9] Pau, J., Zhao, R. and Zhu, K. (2016) Weighted BMO and Hankel Operators between Bergman Spaces. *Indiana University Mathematical Journal*, **65**, 1639-1673. https://doi.org/10.1512/iumj.2016.65.5882

[10] Lv, X. and Zhu, K. (2019) Integrability of Mean Oscillation with Applications to Hankel Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **91**, Article No. 5. https://doi.org/10.1007/s00020-019-2504-8

[11] Wang, E.M. and Xu, J.J. Hankel Operators on Bergman Spaces Induced by Regular Weights. *Journal of the Iranian Mathematical Society*. In Press.

[12] Hu, Z.J. and Wang, E.M. (2018) Hankel Operators between Fock Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **90**, Article No. 37. https://doi.org/10.1007/s00020-018-2459-1