Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(8), 5293-5300
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118556

Hans汉斯

3阶Hessenberg符号模式矩阵允许代数正和要求代数正

焦　旸，田　岩*

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年7月3日；录用日期：2022年7月29日；发布日期：2022年8月8日

摘　要

本文将引入Hessenberg符号模式矩阵的概念，通过对Hessenberg符号模式矩阵的研究，将所有3阶Hessenberg符号模式矩阵进行分类。分别给出不是允许代数正、允许代数正、允许代数正且要求代数正的等价条件。

关键词

符号模式矩阵，Hessenberg符号模式矩阵，允许代数正，要求代数正

Hessenberg Sign Pattern Matrices with Order 3 that Allow Algebraic Positivity and Require Algebraic Positivity

Yang Jiao, Yan Tian*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 3rd, 2022; accepted: Jul. 29th, 2022; published: Aug. 8th, 2022

Abstract

In this paper, we introduce the concept of Hessenberg sign pattern matrix. Through the study of Hessenberg sign pattern matrices, we classify all Hessenberg sign pattern matrices with order 3. We give three equivalent conditions on Hessenberg sign pattern matrices that do not allow algebraic positivity, allow algebraic positivity, and allow algebraic positivity and require algebraic positivity respectively.

*通讯作者。

文章引用: 焦旸, 田岩. 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正和要求代数正[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5293-5300. DOI: 10.12677/aam.2022.118556

Keywords

Sign Pattern Matrix, Hessenberg Sign Pattern matrix, Allow Algebraic Positivity, Require Algebraic Positivity

1. 引言

符号模式矩阵的研究起源于研究线性动力系统的符号可解性与符号稳定性，是由诺贝尔经济学奖获得者 P.A. Samuelson 在《Foundations of Economic Analysis》[1]一书中首先提出的。在组合矩阵论中，符号模式矩阵是一个十分活跃的研究课题，它在社会学、经济学、化学、计算机科学等众多领域中具有广泛的实际应用背景。1987 年，C. Eschenbach 在 C.R. Johnson 的指导下引出并研究了符号模式允许和要求某种实矩阵的性质，C. Eschenbach，F. Hall 和李忠善及他们所在的 Georgia 州立大学的同行们对符号模式矩阵的很多性质都进行了研究[2]-[7]。2016 年，Steve Kirkland [8]等人首次提出了代数正矩阵的概念，即对于实方阵 A，如果存在实系数多项式 f 使得 $f(A)$ 是正矩阵，那么 A 称为代数正矩阵。除此之外，他们也提出了符号模式矩阵要求代数正和允许代数正这两个重要问题。2019 年，Sunil Das [9]等人刻画了星符号模式矩阵和三对角符号模式矩阵要求代数正。2021 年，Biswas A，Kundu S [10]刻画了所有 3 阶对称的符号模式矩阵要求代数正。同年，Sunil Das [11]给出了 5 阶树符号模式矩阵要求代数正的等价刻画。2022 年，Sunil Das [12]研究符号模式矩阵允许代数正的充分条件，并且给出从低阶代数正矩阵构造高阶代数正矩阵的方法。同年，田岩和焦旸[13]通过对代数正矩阵的研究，给出代数正矩阵的一些性质，可以将实矩阵进行约化，简化证明。迄今为止，很多学者和专家关于符号模式矩阵的研究已经取得了大量丰硕的成果，但是还有很多问题亟待解决，符号模式矩阵要求代数正和允许代数正仍是组合矩阵论中的两个非常重要的问题。本文研究了 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，首先引入 Hessenberg 符号模式矩阵的概念，证明所有 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵都是不可约的；其次分别讨论 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵不是允许代数正、允许代数正的等价条件；最后，从允许代数正的 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵中找到要求代数正的 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，并且给出 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正且要求代数正的充分必要条件。因此，我们将 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵分为三类：不是允许代数正、允许代数正、允许代数正且要求代数正。

2. 预备知识

符号模式矩阵是指所有元素都取自集合 $\{+,-,0\}$ 的矩阵。对于实矩阵 $A=(a_{ij})$，以 a_{ij} 的符号为元素组成的符号模式矩阵称为 A 的符号模式矩阵。对于任意符号模式矩阵 A，所有与 A 的符号相同的实矩阵组成的集合称为 A 所决定的定性矩阵类，记为 $Q(A)$。所有元素都是正实数的矩阵称为正矩阵，即矩阵中每个元素都大于零，记作 $A>0$。设 A 是实方阵，如果存在一个实系数多项式 f 使得 $f(A)>0$，那么称 A 是代数正矩阵。设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中任意矩阵都是代数正的，那么称符号模式矩阵 A 是要求代数正的。设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中存在代数正矩阵，那么称符号模式矩阵 A 是允许代数正的。设 V 是有限集合，$E\subseteq V^2$，则集合对 $D=(V,E)$ 称为一个有向图。V 中的元素称为顶点。E 中的元素称为弧。D 中首尾相连的一串弧称为有向路径。若存在一条从 a 到 b 的有向路径，也存在一条从

b 到 a 的有向路径，则称有向图 $D=(V,E)$ 的两个顶点 a 和 b 是强连通的[14]。设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵，有向图 $D(A)$ 的顶点在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中，(i,j) 为弧当且仅当 $a_{(i,j)}\neq 0$。

本文中 $A_{(i,j)}$ 表示矩阵 A 的第 i 行 j 列元素。本文讨论的矩阵都是实方阵。R 表示是实数域。

定义 2.1 符号模式矩阵 A 形如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{(i-1,i)},A_{(i,1)}\in\{+,-\}\,(i=2,3,\cdots,n)$，$A_{(i,i)}\in\{+,-,0\}\,(i=1,2,\cdots,n)$，其余位置的元素都为 0，称 A 是 Hessenberg 符号模式矩阵。

3. 主要结论

首先，我们证明 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵 A 是不可约的，给出所有 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵的具体形式；然后，分别讨论它们是否允许代数正和要求代数正；最后，将所有的 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵分为三类：不是允许代数正、允许代数正、允许代数正且要求代数正。

引理 3.1 [15]方阵 A 不可约当且仅当其有向图 $D(A)$ 强连通。

引理 3.2 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵 A 是不可约的。

证明 设 A 是 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，则

$$A_{(1,2)}A_{(2,3)}A_{(3,1)}\neq 0,$$

故 A 的有向图 $D(A)$ 中任意两个顶点 $i\neq j\in\{1,2,3\}$ 之间都存在有向路径，则 $D(A)$ 是强连通的。由引理 3.1 可知，A 是不可约的。

以下符号模式矩阵中的元素 $*\in\{+,-,0\}$，$+_0$ 表示非负，$-_0$ 表示非正。设 A 是 n 阶符号模式矩阵，取 A 中+的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_+，取 A 中−的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_-，则 $B_A=A_+-A_-^{\mathrm{T}}$。

定理 设 A 是 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，则

① A 不是允许代数正当且仅当 A 或 $-A$ 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} +_0 & + & 0 \\ + & +_0 & - \\ - & 0 & -_0 \end{pmatrix}。$$

② A 允许代数正当且仅当 A 或 $-A$ 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}。$$

③ A 允许代数正且要求代数正当且仅当 A 或 $-A$ 有如下形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ + & 0 & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & 0 & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ - & 0 & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & 0 & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

证明 设 A 是 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵，则 A 或 $-A$ 具有下列形式

$$S=\left\{\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix},\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}\right\}。$$

首先，考虑 A 不是允许代数正的充分必要条件。

① 设 A 不是允许代数正的。由引理 3.2 可知，A 不可约。我们考虑 S 中第一个符号模式，由 B_A 的定义可知，$B_A=\begin{pmatrix} +_0 & + & + \\ + & +_0 & + \\ 0 & 0 & +_0 \end{pmatrix}$。$B_A$ 的有向图 $D(B_A)$ 中的顶点 3 到任意顶点 $k\left(k\in\{1,2\}\right)$ 都不存在有向路径，所以 $D(B_A)$ 不是强连通的。由引理 3.1 可知，B_A 是可约。同理可证，S 中第二、三、四、五个符号模式对应的 B_A 都是可约的。因此，由([16]，定理 4)可知，S 中前五个符号模式符合条件。

考虑 S 中第六个符号模式，设 A 是允许代数正的，则由([8]，定理 12)可知，$A=\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix}$ 或 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix}$。所以，$A$ 不是允许代数正的，那么 $A=\begin{pmatrix} +_0 & + & 0 \\ + & +_0 & - \\ - & 0 & -_0 \end{pmatrix}$。

反之，由上述证明可知，S 中前五个符号模式对应的 B_A 都可约，根据([16]，定理 4)，A 不是允许代数正的。$A=\begin{pmatrix} +_0 & + & 0 \\ + & +_0 & - \\ - & 0 & -_0 \end{pmatrix}$ 的每行每列不同时含有+或−，所以根据([8]，定理 12)，A 不是允许代数正的。因此，①成立。

其次，讨论 A 是允许代数正的充分必要条件。

考虑 S 中第六个符号模式。由已知 A 是允许代数正的，根据([8]，定理 12)，A 的每行每列都含有+或−，所以 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix}$。

反之，设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix}$，则 $Q(A)$ 中存在矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & b & 0 \\ b & a_2 & -c \\ -c & 0 & a_3 \end{pmatrix}，其中 b,c>0。$$

存在 $\alpha=-1$ 和 $\beta=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{2}+\dfrac{\min\{a_1,a_2\}}{2}$ 以及足够大的 $\gamma\in R$，使得 $-M^2+\beta M+\gamma I>0$，所以 M 是代数正矩阵，故 A 是允许代数正的。

设 $A=\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix}$，则 $Q(A)$ 中存在矩阵 $M=\begin{pmatrix} -a & b_1 & 0 \\ c_1 & -a & -b_2 \\ -c_2 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(a,b_1,b_2,c_1,c_2>0$，c 任意)。

设 $M'=M+aI=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ c_1 & 0 & -b_2 \\ -c_2 & 0 & c' \end{pmatrix}$，其中 $c'=c+a,b_i,c_i>0,i=1,2$。那么存在 $\alpha=-1$，$\beta=\dfrac{c_1c'+b_2c_2}{2c_1}$ 和足够大的 $\gamma\in R$ 使得 $\alpha M'^2+\beta M'+\gamma I>0$，所以 M' 是代数正矩阵。根据([13]，引理 2.4)，M 是代数正的，所以 A 是允许代数正。

由([8]，定理 12)可知，易知 S 中第七个、第八个符号模式符合条件。

反之，设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}$，则 $Q(A)$ 中存在除对角线元素以外所有元素都非负的矩阵M。由([8]，定理 5)可知，M 是代数正矩阵，所以 A 是允许代数正的。

设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}$，则 $Q(A)$ 中存在实矩阵 $M=\begin{pmatrix} a_1 & b & 0 \\ -b & a_2 & c \\ c & 0 & a_3 \end{pmatrix}$，其中 $b,c>0$，$a_1<a_2<a_3$。存在 $\alpha=1$，$\beta=-a_1-a_2+\dfrac{c^2}{2b}$ 以及足够大的 $\gamma\in R$，使得 $\alpha M^2+\beta M+\gamma I>0$。所以，$M$ 是代数正的，故 A 是允许代数正。因此，②成立。

最后，给出 A 是允许代数正且要求代数正的充分必要条件。

只需考虑②中四个允许代数正的符号模式哪些是要求代数正的。

设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix}$ 是要求代数正的，则任取 $M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & -b_2 \\ -c_2 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\in Q(A)$，其中 $b_i,c_i>0(i=1,2)$，所以 M 是代数正矩阵。存在对角矩阵 $D=diag\left(\dfrac{1}{b_1},1,\dfrac{1}{b_1c_2}\right)$，使得 $\hat{M}=DMD^{-1}$，即

$$\hat{M}=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ b & a_2 & -c \\ -1 & 0 & a_3 \end{pmatrix}，其中 b,c>0。$$

由([13]，推论 2.3)可知，$\hat{M}$ 是代数正矩阵，则存在实系数多项式 $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 使得 $f(\hat{M})>0$。由 $f(\hat{M})_{(1,3)}=-\alpha c>0$ 和 $f(\hat{M})_{(3,2)}=-\alpha>0$ 可得 $\alpha<0$。不妨取 $\alpha=-1$，则

$$f(\hat{M})_{(1,2)}=\beta-a_1-a_2,\quad f(\hat{M})_{(2,1)}=\beta b-(a_1b+a_2b+c),$$
$$f(\hat{M})_{(2,3)}=-\beta c+a_2c+a_3c,\quad f(\hat{M})_{(3,1)}=-\beta+a_1+a_3。$$

当 $f(\hat{M})_{(1,2)}$，$f(\hat{M})_{(2,1)}$，$f(\hat{M})_{(2,3)}$，$f(\hat{M})_{(3,1)}$ 都大于零时，可得 $a_1<a_3$，$a_2<a_3$。当 $a_3>0$ 时，$a_1,a_2\le 0$；当 $a_3=0$ 时，$a_1,a_2<0$。因此，A 的形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ + & 0 & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & 0 & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ + & - & - \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

再考虑②中的第三个符号模式。设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}$ 是要求代数正的，则任意 $M\in Q(A)$ 是代数正矩阵。因为 M 中除对角线元素以外所有元素都非负，由([8]，定理 5)可知，A 符合条件。

考虑②中最后一个符号模式。设 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}$ 是要求代数正的，则任意矩阵 $M\in Q(A)$ 是代数正矩阵。设

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ -c_1 & a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\in Q(A)\text{，其中 } b_i,c_i>0\ \ (i=1,2)\text{。}$$

存在对角矩阵 $D=diag\left(\frac{1}{b_1},1,\frac{1}{b_1c_2}\right)$ 使得 $\hat{M}=DMD^{-1}$，即

$$\hat{M}=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -b & a_2 & c \\ 1 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\text{，其中 } b,c>0\text{。}$$

由([13]，推论 2.3)可知 $\hat{M}$ 是代数正矩阵，则存在实系数多项式 $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$，使得 $f(\hat{M})>0$。由 $f(\hat{M})_{(1,3)}=\alpha c>0$ 和 $f(\hat{M})_{(3,2)}=\alpha>0$，可得 $\alpha>0$。不妨取 $\alpha=1$，则

$$f(\hat{M})_{(1,2)}=\beta+a_1+a_2\text{，}\ f(\hat{M})_{(2,1)}=-\beta b-(a_1b+a_2b-c)\text{，}$$

$$f(\hat{M})_{(2,3)}=\beta c+a_2c+a_3c\text{，}\ f(\hat{M})_{(3,1)}=\beta+a_1+a_3\text{。}$$

当 $f(\hat{M})_{(1,2)}$，$f(\hat{M})_{(2,1)}$，$f(\hat{M})_{(2,3)}$，$f(\hat{M})_{(3,1)}$ 都大于 0 时，可得 $a_1<a_3$，$a_2<a_3$。当 $a_3>0$ 时，$a_1,a_2\le 0$；当 $a_3=0$ 时，$a_1,a_2<0$。因此，A 的形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ - & 0 & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & 0 & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & + \end{pmatrix},\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & - & + \\ + & 0 & 0 \end{pmatrix}\text{。}$$

反之，证明③中的前五个符号模式是要求代数正，只需考虑符号模式

$$A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & - \\ - & 0 & * \end{pmatrix}\text{，其中 } A_{(1,1)},A_{(2,2)}<A_{(3,3)}\text{。}$$

任取 $\hat{M}\in Q(A)$，则存在对角矩阵 D，使得 $M=D\hat{M}D^{-1}$，即

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ b & a_2 & -c \\ -1 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\text{，其中 } b,c>0\text{，}\ a_1,a_2<a_3\text{。}$$

存在 $\alpha=-1$，$\beta=\frac{c}{2b}+\frac{a_3}{2}+\frac{1}{2}\min\{a_1,a_2\}$ 以及足够大的 $\gamma\in R$，使得 $\alpha M^2+\beta M+\gamma I>0$。

因此，M 是代数正的。根据([13]，推论 2.3)可知，$\hat{M}$ 是代数正的，则 A 是要求代数正的。

考虑③中的符号模式 $A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ + & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}$，任取 $M\in Q(A)$，则 M 除对角线元素外所有元素非负。由([8]，定理 5)可知，M 是代数正的，则 A 是允许代数正且要求代数正矩阵。

讨论③中的后五个符号模式，只需考虑符号模式

$$A=\begin{pmatrix} * & + & 0 \\ - & * & + \\ + & 0 & * \end{pmatrix}，其中 A_{(1,1)}, A_{(2,2)} < A_{(3,3)}。$$

任取 $\hat{M}\in Q(A)$，则存在对角矩阵 D，使得 $M = D\hat{M}D^{-1}$，则

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -b & a_2 & c \\ 1 & 0 & a_3 \end{pmatrix}，其中 b,c>0， a_1,a_2<a_3。$$

存在 $\alpha=1$，$\beta=-a_1-a_2+\dfrac{c}{2b}$，和足够大的 $\gamma\in R$，使得 $\alpha M^2+\beta M+\gamma I>0$。所以，$M$ 是代数正的。根据([13]，推论 2.3)可知，$\hat{M}$ 是代数正的，故 A 是允许代数正且要求代数正的。因此，③成立。

4. 结论

本文主要通过对所有 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵的研究，分别给出 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵不是允许代数正、允许代数正以及要求代数正的等价条件。在此基础之上，给出 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正且要求代数正的充分必要条件。本文对于符号模式矩阵的允许代数正和要求代数正的研究可以提供一定的思路和方法。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目(LQ2020021)。

参考文献

[1] Samuelson, P.A. (1947) Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, Cambridge, MA.

[2] Shan, H. and Shao, J. (2004) Matrices with Totally Signed Powers. *Linear Algebra and Its Applications*, **376**, 215-224. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00643-8

[3] Shao, J. (1999) On Sign Inconsistent Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **296**, 245-257. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00130-5

[4] Shao, J. (2000) On the Digraphs of Sign Solvable Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **33**, 115-126. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00107-5

[5] Shao, J. and Ren, L. (2004) Some Properties of Matrices with Signed Null Spaces. *Discrete Mathematics*, **279**, 423-435. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00286-3

[6] Shao, J. and Shan, H. (2002) The Solution of a Problem on Matrices Having Signed Generalized Inverses. *Linear Algebra and Its Applications*, **345**, 43-70. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(01)00452-9

[7] Shao, J. and Shan, H. (2005) The Determinantal Regions of Complex Sign Pattern Matrices and Ray Pattern Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **395**, 211-228. https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.08.023

[8] Kirkland, S., Qiao, P. and Zhan, X. (2016) Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **504**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.049

[9] Das, S. and Bandopadhyay, S. (2019) On Some Sign Patterns of Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **562**, 91-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.007

[10] Biswas, A. and Kundu, S. (2021) On Algebraically Positive Matrices with Associated Sign Patterns. *Resonance*, **27**,

1211-1235. https://doi.org/10.1007/s12045-022-1415-1

[11] Das, S. (2021) Classifications of Some Algebraically Positive, Diagonalizable and Stable Matrices with their Sign Patterns. Thesis, Indian Institute of Technology Guwahati, Guwahati.

[12] Das, S. (2021) Sign Patterns That Allow Algebraic Positivity. arXiv preprint arXiv:2112.00442.

[13] 田岩, 焦旸. 代数正矩阵的若干研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(2): 152-158.

[14] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[15] Brualdi, R.A. and Ryser, H.J. (1991) Combinatorial Matrix Theory. Cambridge University Press, New York, 55 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325708

[16] Abagat, J.L. and Pelejo, D.C. (2019) On Sign Pattern Matrices That Allow or Require Algebraic Positivity. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **35**, 331-356. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3862