Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(8), 5122-5127
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118537

Hans汉斯

Fock空间亚正规的Toeplitz算子

邓开予

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年7月1日；录用日期：2022年7月27日；发布日期：2022年8月5日

摘 要

本文主要通过Fock空间上Toeplitz算子符号函数的零点来刻画其亚正规性。首先介绍了以$\overline{(z-a)}(z-b)$为符号的Toeplitz算子亚正规性的充分必要条件，其次描述了分别以$\bar{z}z^2+\delta|z|^2$和$\bar{z}z^2+\gamma\bar{z}$为符号的Toeplitz算子亚正规性的必要条件。

关键词

Fock空间，Toeplitz算子，亚正规，零点

Hyponormal Toeplitz Operators on the Fock Space

Kaiyu Deng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 1st, 2022; accepted: Jul. 27th, 2022; published: Aug. 5th, 2022

Abstract

In this paper, we mainly characterize the hyponormality of Toeplitz operator on Fock space in terms of the zeros of symbolic functions. Firstly, we introduce sufficient and necessary conditions for the hyponormality of Toeplitz operators with symbol $\overline{(z-a)}(z-b)$. Next we find the necessary conditions for the hyponormality of Toeplitz operators with symbol $\bar{z}z^2+\delta|z|^2$ and $\bar{z}z^2+\gamma\bar{z}$.

Keywords

Fock Space, Toeplitz Operators, Hyponormal, Zero Point

文章引用: 邓开予. Fock 空间亚正规的 Toeplitz 算子[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5122-5127.
DOI: 10.12677/aam.2022.118537

1. 引言

正规算子在算子理论研究中具有十分重要的意义。随着对正规算子的研究逐渐深入，许多学者将正规性的概念推广得到亚正规性等概念。此外，Toeplitz 算子在除数学外等许多领域上也扮演着十分重要的角色。本文的主要研究内容是 Fock 空间上亚正规 Toeplitz 算子符号函数的零点分布。

设 $\mathrm{d}A$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Lebesgue 面积测度，可以用极坐标表示为

$$\mathrm{d}A(z)=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\ \left(z=re^{i\theta}\right)。$$

对于 $\alpha>0$，记 $L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 是 $\mathbb{C}$ 上所有满足下式的 Lebesgue 可测函数 f 构成的 Hilbert 空间，且

$$\|f\|=\left(\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^2\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

其中 $\mathrm{d}\mu_\alpha(z)=\dfrac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}A(z)$。对于 $f,g\in L^2(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha)$，其上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\mu_\alpha(z)。$$

Fock 空间 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 由 $L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 中所有整函数构成，是 $L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 的闭子空间。$\{e_n(z)\}_{n\geq0}$ 是 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间的正规正交基，其中 $e_n(z)=\sqrt{\dfrac{\alpha^n}{n!}}z^n$，$n\geq0$。对于任意的 $z,w\in\mathbb{C}$，$\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间上的再生核定义为 $K(z,w)=\mathrm{e}^{\alpha z\overline{w}}$。

令 P 为 $L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 到 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 的正交投影。对任意 $f\in L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 和 $z\in\mathbb{C}$，

$$Pf(z)=\langle f,K(w,z)\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(w)\mathrm{e}^{\alpha\overline{w}z}\mathrm{d}\mu_\alpha(w)。$$

记 $\mathcal{D}$ 为由 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间中所有再生核函数的有限线性组合张成的线性子空间，显然有 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 中稠密。假设 f 是 $\mathbb{C}$ 上满足

$$\int_{\mathbb{C}}|f(w)K(w,z)|\mathrm{d}\mu_\alpha(z)<\infty\ (z\in\mathbb{C})$$

的 Lebesgue 可测函数。以 $f\in L^2\left(\mathbb{C},\mathrm{d}\mu_\alpha(z)\right)$ 为符号的 Toeplitz 算子 $T_f:\mathbb{F}_\alpha^2\to\mathbb{F}_\alpha^2$ 可以被稠定义为

$$T_f(\varphi)=P(\varphi f)\ (\varphi\in\mathcal{D})。$$

如果 Hilbert 空间上的有界线性算子 S 满足 $S^*S-SS^*\geq0$，那么称算子 S 是亚正规的。目前，Toeplitz 算子的亚正规性已经受到了许多学者的关注，人们对亚正规 Toeplitz 算子的研究也取得了一定的成果。在 Hardy 空间中有许多结果，见[1] [2] [3] [4]。其中，Cowen 利用符号函数的性质得到了著名的 Cowen 定理。定理刻画了 Toeplitz 算子的亚正规性，见[4]。此外，Zhu 通过 Toeplitz 算子符号函数的零点也描述了其亚正规性，见[5]。2008 年，Nakazi 利用符号函数零点得出了一个亚正规 Toeplitz 算子的充分必要条件，见[6]。在 Bergman 空间中，亚正规 Toeplitz 算子同样也是众多学者研究的重点问题，见[7]-[14]。特别的，1992 年，Sadraoui 根据符号函数边界条件给出了亚正规 Toeplitz 算子的必要条件，见[7]。除此之外，Ahern 和 Cuckovic 探究并得到了以调和函数为符号函数的亚正规 Toeplitz 的必要条件，见[12]。对于 Fock 空间上亚正规 Toeplitz 算子的研究，目前也有一些成果，见[15] [16] [17] [18] [19]。

参考文献[19]中给出了在 Fock 空间中以

$$\varphi(z)=z^n+\lambda|z|^s,\ \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N},\ s\in(0,\infty),\ n<2\left[\frac{s}{2}\right],$$

为符号的Toeplitz算子亚正规的充分必要条件为$\lambda=0$。此外还分别给出了 Fock 空间中以$\psi(z)=\bar{z}z^2+\delta|z|^2$和$\phi(z)=\bar{z}z^2+\gamma\bar{z}$为符号的 Toeplitz 算子亚正规的充分条件和必要条件。本文在此基础上进一步刻画δ和γ的特征。

2. 一个充分必要条件

这一部分研究了 Fock 空间$\mathbb{F}_\alpha^2$上以$\varphi(z)=\overline{(z-a)}(z-b)$为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性。以下是一些准备工作。

引理 2.1 设p,q为非负整数，则有

$$P\left(\bar{z}^q z^p\right)=\begin{cases}\alpha^{-q}\dfrac{p!}{(p-q)!}z^{p-q}, & p\ge q;\\ 0, & p<q.\end{cases}$$

证明由简单计算可得。

下面为本文的主要结果。

定理 2.2 设$\varphi(z)=\overline{(z-a)}(z-b)$，其中$a,b\in\mathbb{C}$。则$T_\varphi$作用在$\mathbb{F}_\alpha^2$空间上是亚正规的当且仅当$a=b$。

证明：当$a=b$时，则有$\varphi(z)=|z-a|^2$。显然T_φ是自伴的，特别的，T_φ是正规的，进而是亚正规的，充分性得证。

假设T_φ是亚正规的，运用 Toeplitz 算子的基本性质，直接计算得到

$$T_\varphi^*T_\varphi-T_\varphi T_\varphi^*=\left(|a|^2-|b|^2\right)\left(T_{\bar{z}}T_z-T_zT_{\bar{z}}\right)+2\operatorname{Re}(b-a)\left(T_{\bar{z}}T_{|z|^2}-T_{|z|^2}T_{\bar{z}}\right)\tag{2.1}$$

任取$f\in\mathbb{F}_\alpha^2$，则f有幂级数展开式$f=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k$。再根据引理 2.1，得到以下两个等式

$$\left\langle\left(T_{\bar{z}}T_z-T_zT_{\bar{z}}\right)f,f\right\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^2\frac{k!}{\alpha^{k+1}},$$

$$\left\langle\left(T_{\bar{z}}T_{|z|^2}-T_{|z|^2}T_{\bar{z}}\right)f,f\right\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}f_{k+1}\bar{f}_k\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+2}}。$$

将上面两个等式带入(2.1)式得到

$$\left\langle\left(T_\varphi^*T_\varphi-T_\varphi T_\varphi^*\right)f,f\right\rangle=\left(|a|^2-|b|^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^2\frac{k!}{\alpha^{k+1}}+2\operatorname{Re}(b-a)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{f}_kf_{k+1}\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+2}}\tag{2.2}$$

由于T_φ是亚正规的，则有

$$\left(|a|^2-|b|^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^2\frac{k!}{\alpha^{k+1}}-2|b-a|\sum_{k=0}^{\infty}|f_kf_{k+1}|\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+2}}\ge 0\tag{2.3}$$

特别地，取$f=z^k+\lambda z^{k+1}$ (λ为任意复数，k为任意自然数)带入(2.3)式得

$$\left(|a|^2-|b|^2\right)\left(\frac{k!}{\alpha^{k+1}}+|\lambda|^2\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+2}}\right)-2|b-a|\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+2}}|\lambda|\ge 0\tag{2.4}$$

将上述不等式左端整理成关于$|\lambda|$的二次函数，并化简得

$$\left(|a|^2-|b|^2\right)\frac{k+1}{\alpha}|\lambda|^2-2|b-a|\frac{k+1}{\alpha}|\lambda|+\left(|a|^2-|b|^2\right)\geq 0 \tag{2.5}$$

若 $|a|^2-|b|^2\geq 0$，此二次型的对称轴为 $\dfrac{|b-a|}{|a|^2-|b|^2}\geq 0$，可得

$$\begin{aligned}\Delta&=4|b-a|^2\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^2-4\left(|a|^2-|b|^2\right)^2\frac{k+1}{\alpha}\\&=4\frac{k+1}{\alpha}\left[|b-a|^2\frac{k+1}{\alpha}-\left(|a|^2-|b|^2\right)^2\right]\leq 0\end{aligned}$$

对任意 $k\geq 0$ 成立。当 $k\to\infty$ 时，有 $a=b$。

若 $|a|^2-|b|^2<0$，对称轴为 $\dfrac{|b-a|}{|a|^2-|b|^2}<0$，由 λ 的任意性，(2.5)式左端小于 0。综合以上讨论得，$a=b$。

3. 两个必要条件

这部分介绍了 Fock 空间 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 上以 $\psi(z)=\bar{z}z^2+\delta|z|^2$ 和 $\phi(z)=\bar{z}z^2+\gamma\bar{z}$ 为符号的亚正规 Toeplitz 算子的必要条件。

定理 3.1 设 $\psi(z)=\bar{z}z^2+\delta|z|^2$，其中 $\delta\in\mathbb{C}$。如果 T_ψ 在 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间上是亚正规的，

则 $|\delta|\leq\dfrac{731\sqrt{10}}{840\sqrt{\alpha}}\approx\dfrac{2.752}{\sqrt{\alpha}}$。

证明：由引理 2.1 可得，

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(T_\psi^*T_\psi-T_\psi T_\psi^*\right)f,f\right\rangle\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-(k+3)}|f_k|^2(3k+1)(k+1)!+2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-(k+3)}\mathrm{Re}\left(\delta\bar{f}_kf_{k+1}\right)(k+2)!\end{aligned}$$

其中 $f=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k\in\mathbb{F}_\alpha^2$。

如果 T_ψ 是亚正规的，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-k}|f_k|^2(3k+1)(k+1)!-2|\delta|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-k}|f_kf_{k+1}|(k+2)!\geq 0 \tag{3.1}$$

特别的，令 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{\alpha}R\right)^k}{k!}z^k$，其中 $R\in\mathbb{R}$。代入上式化简得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(3k^2+7k+4\right)\frac{R^{2k}}{k!}-2|\delta|\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\alpha}(k+2)\frac{R^{2k+1}}{k!}\geq 0 \tag{3.2}$$

此外，(3.2)式等价于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[3k(k-1)+10k+4\right]\frac{R^{2k}}{k!}-2|\delta|\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\alpha}(k+2)\frac{R^{2k+1}}{k!}\geq 0 \tag{3.3}$$

进一步可以将(3.3)式写成

$$\left[3R^4+10R^2+4-2\sqrt{\alpha}|\delta|R\left(R^2+2\right)\right]\mathrm{e}^{R^2}\geq 0,$$

等价于

$$|\delta| \le \frac{3R^4+10R^2+4}{\left(2R^3+4R\right)\sqrt{\alpha}},$$

特别地，当 $R=\frac{\sqrt{10}}{4}$ 时，计算可得 $|\delta| \le \frac{731\sqrt{10}}{840\sqrt{\alpha}} \approx \frac{2.752}{\sqrt{\alpha}}$。

此定理得到的必要条件比参考文献[19]的结果更精细。

下面将符号函数换成 $\phi(z)=\overline{z}z^2+\gamma\overline{z}$，并探究 Toeplitz 算子 T_ϕ 为亚正规的必要条件。

定理 3.2 设 $\phi(z)=\overline{z}z^2+\gamma\overline{z}$，其中 $\gamma\in\mathbb{C}$。如果 T_ϕ 在 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间上是亚正规的，则 $|\lambda| \le \frac{\sqrt{18-2\sqrt{51}}}{\alpha} \approx \frac{1.928}{\alpha}$。

证明：同定理 2.2 相似的计算方法，可以得到

$$T_\phi^* T_\phi - T_\phi T_\phi^* = T_{\overline{z}z^2}^* T_{\overline{z}z^2} - T_{\overline{z}z^2} T_{\overline{z}z^2}^* + 2\operatorname{Re}\gamma\left(T_{\overline{z}z^2}^* T_{\overline{z}} - T_{\overline{z}} T_{\overline{z}z^2}^*\right) + |\gamma|^2\left(T_{\overline{z}}^* T_{\overline{z}} - T_{\overline{z}} T_{\overline{z}}^*\right)。$$

令 $a_{ij}=\left\langle\left(T_\phi^* T_\phi - T_\phi T_\phi^*\right)e_j, e_i\right\rangle$，其中 $i,j\ge 0$。应用引理 2。1 通过简单计算可以得到，当 $j<2$ 时，

$$a_{00}=4\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1}, a_{20}=-\overline{\gamma}\alpha^{-2}\sqrt{2}, a_{11}=14\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1}, a_{31}=-\overline{\gamma}\alpha^{-2}\sqrt{6};$$

当 $j\ge 2$ 时，

$$a_{jj}=\alpha^{-3}\left(3j^2+7j+4\right)-|\gamma|^2\alpha^{-1},$$

$$a_{j-2,j}=-\gamma\alpha^{-2}\sqrt{j(j-1)},$$

$$a_{j,j-2}=-\overline{\gamma}\alpha^{-2}\sqrt{j(j-1)}。$$

由此可以得到算子 $T_\phi^* T_\phi - T_\phi T_\phi^*$ 的矩阵表示，并将其记作 A，那么有

$$A=\begin{pmatrix} 4\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1} & 0 & -\overline{\gamma}\alpha^{-2}\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 14\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1} & 0 & -\overline{\gamma}\alpha^{-2}\sqrt{2} & \cdots \\ -\gamma\alpha^{-2}\sqrt{2} & 0 & 30\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1} & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma\alpha^{-2}\sqrt{6} & 0 & 52\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

如果 T_ϕ 在 $\mathbb{F}_\alpha^2$ 空间上是亚正规的，那么矩阵 A 是正定矩阵。矩阵 A 的任意顺序主子式都是非负的。特别地，矩阵 A 的一阶顺序主子式和三阶顺序主子式非负，所以有

$$4\alpha^{-3}-|\gamma|^2\alpha^{-1}\ge 0,$$

以及

$$-\alpha^{-3}|\gamma|^6+50\alpha^{-5}|\gamma|^4-624\alpha^{-7}|\gamma|^2+1680\alpha^{-9}\ge 0。$$

结合两个不等式得到 $|\lambda| \le \frac{\sqrt{18-2\sqrt{51}}}{\alpha} \approx \frac{1.928}{\alpha}$。

相同的，这个必要条件也比参考文献[19]更接近于充分必要条件。定理 3.1 和定理 3.2 的充分必要条件解决起来是需要十分具有创新性的技术。

参考文献

[1] Nakazi, T. and Takahashi, K. (1993) Hyponormal Toeplitz Operators and Extremal Problems of Hardy Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **338**, 753-767. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1162103-7

[2] Brown, A. (1953) On a Class of Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 723-728. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1953-0059483-2

[3] Farenick, D.R. and Lee, W.Y. (1997) On Hyponormal Toeplitz Operators with Polynomial Andcirculant-Type Symbols. *Integral Equations & Operator Theory*, **29**, 202-210. https://doi.org/10.1007/BF01191430

[4] Cowen, C.C. (1988) Hyponormality of Toeplitzoperators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **103**, 809-809. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0947663-4

[5] Zhu, K. (1995) Hyponormal Toeplitz Operators with Polynomial Symbols. *Integral Equations Operator Theory*, **21**, 376-381. https://doi.org/10.1007/BF01299971

[6] Nakazi, T. (2008) Hyponormal Toeplitz Operators and Zeros of Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, 2425-2428. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-08752-2

[7] Lu, Y. and Shi, Y. (2009) Hyponormal Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **65**, 115-129. https://doi.org/10.1007/s00020-009-1712-z

[8] Simanek, B. (2019) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Algebraic Symbol. *Analysis and Mathematical Physics*, **9**, 1613-1626. https://doi.org/10.1007/s13324-018-00279-2

[9] Sadraoui, H. (1992) Hyponormality of Toeplitz Operators and Composition Operators. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette.

[10] Sung, H.I. (2005) Hyponormal Toeplitzoperators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42**, 387-403. https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.2.387

[11] Hwang, I.S. (2008) Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45**, 1027-1041. https://doi.org/10.4134/JKMS.2008.45.4.1027

[12] Ahern, P. and Cuckovic, Z. (1996) A Mean Value Inequality with Applications to Bergman Space Operators. *Pacific Journal of Mathematics*, **173**, 295-305.

[13] Fleeman, M. and Liaw, C. (2017) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Symbol Acting on the Bergman Space. *Operators and Matrices*, **13**, 61-83.

[14] Cuckovic, Z. and Curto, R.E. (2016) A New Necessary Condition for the Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of Operator Theory*, **79**, 287-300.

[15] Zhu, K. (2012) Analysis on FockSpaces. Vol. 263, Springer New, York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8801-0

[16] Gupta, A. and Singh, S.K. (2017) Necessary Conditions for Hyponormality of Toeplitz Operators on the Fock Space. *Mathematics for Applications*, **6**, 151-159.

[17] Ko, E. and Lee, J. (2018) Hyponormality of Toeplitz Operators on the Fock Spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **64**, 1825-1843. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1557156

[18] Ma, P., Yan, F., Zheng, D. and Zhu, K. (2019) Products of Hankel Operators on the Fock Space. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 2644-2663. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.01.003

[19] Cui, P., Feng, L. and Lu, Y. (n.d.) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Algebraical Symbols on the Fockspace.