Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(8), 5780-5786
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118609

Hans汉斯

正交变换在多元函数积分学中的应用及其数学思想方法

贾瑞玲，孙铭娟，张冬燕

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年7月17日；录用日期：2022年8月11日；发布日期：2022年8月19日

摘 要

多元函数积分学是在一元函数积分基本思想的发展和应用中形成的，是数学分析的一个重要教学模块。其计算往往存在着一定的难度和技巧，这困扰了不少学生。正交变换是高等代数的核心内容之一，也是解题的重要方法。很多学者对正交变换在积分学中的应用也进行了相关研究并取得了一定的成果，基于此，本文主要研究当积分区域为矩形或长方体时，如何巧用正交变换计算重积分；并挖掘了正交变换在解决这些问题时所蕴含的数学思想方法，这对学生思维观和方法论的形成都非常重要。

关键词

正交变换，数学思想，科学思维，重积分，曲面积分

Application of Orthogonal Transformation in Integral Calculus of Multivariate Function and Its Mathematical Thinking Method

Ruiling Jia, Mingjuan Sun, Dongyan Zhang

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Jul. 17th, 2022; accepted: Aug. 11th, 2022; published: Aug. 19th, 2022

Abstract

Integral calculus of multivariate function is formed in the development and application of the basic idea of single variable integral calculus, which is an important teaching module of mathematical analysis. Its calculation often has certain difficulty and skill, which troubles many students.

文章引用: 贾瑞玲, 孙铭娟, 张冬燕. 正交变换在多元函数积分学中的应用及其数学思想方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5780-5786. DOI: 10.12677/aam.2022.118609

Orthogonal transformation is one of the core contents of advanced algebra and it is also an important method to solve problems. Many scholars have also carried out related research on the application of orthogonal transformation in integral and achieved certain results. Based on this, the paper mainly studies how to skillfully use orthogonal transformation to calculate multiple integral when the integral region is rectangular or cuboid. It also explores the mathematical thinking method of orthogonal transformation in solving these problems, which is very important to the formation of students' thinking concept and methodology.

Keywords

Orthogonal Transformation, Mathematical Thinking, Scientific Thinking, Double Integral, Surface Integral

1. 引言

数学分析与高等代数是地方高校数学专业的基础课，前者属于分析学范畴，后者属于代数学范畴；再加上课程体系和内容的不同，学生很容易将这两门课程割裂开学习，并将其看成是对立的。事实上，尽管这两门课程所属的科系不同、内容不同，但也有不少知识点具有相通性[1] [2] [3] [4] [5]，可进行交互式、渗透式学习。

比如高等代数中的正交变换是处理多元函数积分学某些问题的强有力工具，具有不可替代的作用。事实上，不少学者对这部分内容也进行了研究。李建东和杨艳[6]利用二次型和正交变换的相关知识解决积分区域为球体的重积分的计算问题。王庆东和谢勰[7]借助正交变换的刚体变换性质，证明了对面积的曲面积分和重积分在正交变换下的不变性，并挖掘隐藏在其背后的数学方法论意义。张喜善和周雪艳[8]基于正交变换解决了单位圆盘上的二重积分的计算和椭球体的体积。邹晓范、姚云飞等人也针对重积分研究了类似问题[9] [10] [11] [12]。基于前人的研究基础，本文主要研究当积分区域为矩形区域或长方体时，如何巧用正交变换计算重积分。

本文安排如下：第二部分给出正交变换的基本知识、二重积分的变量代换公式和对面积的曲面积分的计算公式，为后面内容做好铺垫。第三部分是本文的核心，详细地分析并解决了某个特殊的重积分问题，由此归纳总结，将其推广到重积分的一般情形。第四部分介绍了当积分曲面为不规则曲面时，如何巧用正交变换在解决这类问题。第五部分挖掘了正交变换在解决这些问题时所蕴含的数学思想方法，这对培养学生的思维方法和科学精神非常重要，同时有助于培养他们观察、分析、探究、归纳得出一般规律的学习能力；也是数学课程融入思政教育的一种体现。第六部分对全文内容进行总结和概括。

2. 预备知识

2.1. 正交变换

定义 1 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，若它保持向量的内积不变，即对任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，则称 σ 是正交变换。

定理 1 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，则下面四个命题等价

1) σ 是正交变换；

2) σ 保持向量的长度不变，即对 $\forall\alpha\in V$，有 $\left|\sigma(\alpha)\right|=|\alpha|$；

3) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 R^n 的一组标准正交基，则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 R^n 的一组标准正交基；

4) σ 在任意一组标准正交基下的矩阵都是正交矩阵。

有关正交变换的详细内容可参看教材[13]。

2.2. 二重积分的变量代换公式

定理 2 若 $f(x,y)$ 是 xoy 面内的闭区域 D 上的连续函数，记变换 $T:\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在 D 上有关于 x 和 y 的连续偏导数，通过 T 把 D 变换为 uov 平面上的区域 D^*，且变换 T 是一一的，又设 $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\text{。}$$

2.3. 对面积的曲面积分的计算公式

定理 3 设积分曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出，曲面光滑或分片光滑，它在 xoy 面内的投影区域为 D_{xy}，且 Σ 与投影区域 D_{xy} 一一对应。设函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

二重积分的变换代换公式和对面积的曲面积分的计算公式可参看教材[14]，这里不再详述。

3. 正交变换在重积分中的应用

这部分内容主要涉及到高等代数中的正交变换、数学分析中的重积分。

例 1 设一元函数 $f(u)$ 在 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ 上连续，证明：

$$\iint_{|x|+|y|\le\sqrt{2}} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{2}u\right)\mathrm{d}u\text{。}$$

分析 第一：从要证明的等式看，是将等式左端的二重积分化为二次积分后进一步再化为定积分，注意到被积函数结构的变化，是通过变换进行的，由此确定证明的思路是选择合适的变量代换化二重积分为二次积分。

第二：注意到等式左端的积分区域为边长为 2 的菱形(中心在原点，本质上也是正方形)，而等式右端的积分区域可理解为边长为 2 的正方形。正方形区域上的二重积分化二次积分的公式隐藏了此线索。

第三：这里的难点是变换的选择。中心在原点的边长为 2 的菱形的面积为 4，而边长为 2 的正方形的面积也为 4，故考虑用正交变换。

第四：比较等式两端，隐藏的另一个线索是被积函数的变量关系式。根据被积函数 $f(x+y)$ 和 $f\left(\sqrt{2}u\right)$ 特点，作正交变换 $T:\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，可使两个被积函数建立相应的关系。

证明 根据上述分析，做正交变换 $T:\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-1$，且 $-1\le u,v\le 1$。记 $D^*=\{(u,v)|-1\le u,v\le 1\}$ 结合 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和二重积分的变量代换公式，有

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\le\sqrt{2}} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D^*} f\left(\sqrt{2}u\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*} f\left(\sqrt{2}u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{2}u\right)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=2\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{2}u\right)\mathrm{d}u\end{aligned}。$$

注 1 提炼上述解题思路和方法，可将题目推广到更一般的情形。

推论 1 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-c,c]$ 上连续，证明：$\iint_D f(ax+by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1} f(cu)\,\mathrm{d}u$，其中 $D=\{(x,y)|-c\le ax+by\le c,-c\le bx-ay\le c\}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}>0$。

分析 与例 1 类似，不再详述。

证明 做正交变换 $T:\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-1$，且 $-1\le u,v\le 1$。结合 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和二重积分的变量代换公式，有

$$\begin{aligned}\iint_D f(ax+by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{[-1,1;-1,1]} f(cu)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{[-1,1;-1,1]} f(cu)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\int_{-1}^{1} f(cu)\,\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=2\int_{-1}^{1} f(cu)\,\mathrm{d}u\end{aligned}。$$

推论 2 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-k,k]$ 上连续，证明：

$$\iiint_\Omega f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}V=4\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u，$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z)|-k\le ax+by+cz\le k,-1\le a_1x+b_1y+c_1z\le 1,-1\le a_2x+b_2y+c_2z\le 1\}$，$k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，且向量 $\alpha=\frac{1}{k}(a,b,c)$，$\beta=(a_1,b_1,c_1)$，$\gamma=(a_2,b_2,c_2)$ 是三维空间 R^3 的一组标准正交基。

请读者仿照例 1 和推论 1 完成推论 2 的证明。

例 2 计算 $I=\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$。

分析 与例 1 类似，略。

解 作正交变换 $T:\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-1$，且 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le u,v\le\frac{1}{\sqrt{2}}$。记 $D^*=\left\{(u,v)\middle|-\frac{1}{\sqrt{2}}\le u,v\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，结合 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 和二重积分的变量代换公式，得

$$I=\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}\frac{2uv}{\sqrt{\sqrt{2}u+3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2u}{\sqrt{\sqrt{2}u+3}}\mathrm{d}u\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}v\,\mathrm{d}v=0。$$

注 2　1) 例 2 也可采用轮换对称性计算，具体如下：

记 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+y+3}}$，$g(x,y)=\dfrac{y^2}{\sqrt{x+y+3}}$，则 $f(y,x)=g(x,y)$。又积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，故 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$I=\iint_D\big(f(x,y)-g(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\text{。}$$

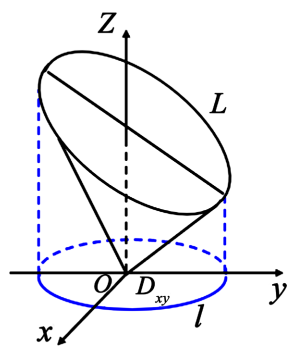
2) 对比之下，本文给出的求解过程就稍显繁琐了，这里作者的本意是从不同的视角介绍正交变换在重积分中的应用，对重积分提供一种行之有效的计算方法，这也有利于学生深刻地理解正交变换及其在重积分中的应用。

4. 正交变换在曲面积分中的应用

例 3　求曲面 Σ 的面积 S，其中 Σ 为锥面 $3(x^2+y^2)=z^2$ 被平面 $x+y+z=2a\,(a>0)$ 所截得的部分。

分析　根据题目可知，这里的曲面 Σ 是锥面 $3(x^2+y^2)=z^2$ 上的一部分曲面。

解　易知 $S=\iint_\Sigma \mathrm{d}S$。根据对面积的曲面积分的计算方法，则 $S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$z_x=\dfrac{3x}{z}$，$z_y=\dfrac{3y}{z}$，D_{xy} 是 Σ 在 xoy 面内的投影区域。计算得 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=2$，故 $S=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，转化为求投影区域 D_{xy} 的面积。



记 $l=\partial D_{xy}$，锥面 $3(x^2+y^2)=z^2$ 与平面 $x+y+z=2a$ 的交线为 $L:\begin{cases}3(x^2+y^2)=z^2\\x+y+z=2a\end{cases}$，消去 z 得，$H:x^2+y^2+2ax+2ay-xy-2a^2=0$，$H$ 即为 L 在 xoy 面内的投影柱面，故

$$l:\begin{cases}x^2+y^2+2ax+2ay-xy-2a^2=0\\z=0\end{cases},$$

即 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2+2ax+2ay-xy-2a^2\le 0\right\}$。尽管找到了区域 D_{xy}，但不易计算出它的面积。注意到 $x^2+y^2+2ax+2ay-xy-2a^2$ 中含有交叉项 xy，为此作正交变换 $T:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，

在变换 T 下 D_{xy} 变为 $D_{uv}=\left\{(u,v)\middle|\dfrac{(u+2\sqrt2)^2}{12a^2}+\dfrac{v^2}{4a^2}\le 1\right\}$，利用正交变换的性质，则

$$\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = S_{D_{xy}} = S_{D_{uv}} = \pi \cdot \sqrt{12a^2}\sqrt{4a^2} = 4\sqrt{3}\pi a^2 ,$$

故 Σ 的面积 $S = 2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\sqrt{3}\pi a^2$。

注 3 1) 易知 D_{uv} 是椭圆盘，根据正交变换的性质，故 D_{xy} 也是椭圆盘。

2) 本题的计算思路是首先将对面积的曲面积分转化为二重积分计算，然后选取合适的正交变换计算这个二重积分，故其本质还是正交变换在重积分中的应用。这里没有对曲面 Σ 作正交变换，是因为 Σ 本身不太规则，那么在正交变换下 Σ 变为 Σ' 还是不规则曲面，依然无法直接求出其面积。

5. 正交变换在积分学中的应用所蕴含的数学思想方法

5.1. 由特殊到一般的思想方法

由特殊到一般就是通过解决某个特定的问题，对该问题深入研究，分析归纳，类比猜想，逐渐过渡到对这类问题的了解和认识，再逐渐形成对这类问题的总体认识，掌握规律，构建理论体系。这种由浅入深，由现象到本质，由特殊到一般的解决问题的过程是科学研究的一个重要方法，也符合人类的认知规律。由特殊到一般再由一般到特殊反复解决问题的过程在数学分析和高等代数的学习中起着重要的作用，对学生思维观和方法论的形成极为重要。

比如以背景引例－分析论证－构建理论－应用实践－拓展延伸为基本要素的教学方法，在分析论证的过程中，老师充分调动学生的主观能动性，让他们从特殊情况讨论再化归为一般方法的思路，使学生在认识问题、分析问题、解决问题中养成科学思维习惯，这也与教育部 2020 年颁发的《高等学校课程思政建设指导纲要》相符合。从例 1 到推论 1 再到推论 2 就是由特殊到一般的具体体现。

5.2. 变换的思想方法

变换是数学中解决复杂问题的常用方法，也是进行理论思维的有效手段，更是某些知识点之间相互转化的桥梁。它是指在研究和解决数学问题时，采取迂回的手段达到目的的一种方法，也就是把要解决的问题先进行信息变换，使之转化为便于处理的形式。例 3 中的正交变换就充分体现了这种思想。

5.3. 辩证法思想

在由特殊到一般的思想方法中也蕴含着由现象到本质、由局部到整体的辩证法思想。如果能够将辩证思维恰当的运用到数学分析和高等代数的学习中，可使学生透过现象看本质，深刻理解知识，同时也能培养他们的数学核心素养。

6. 结束语

本文结合自己的教学实际，从整体上把握知识结构，搭建知识体系，以系统的、联系的、整体的观点详细分析题目的结构特征，将数学思想方法渗透在知识的形成和应用过程中，引导学生去猜想、去探索、去发现，让他们真实地感受到正交变换在积分学中的应用以及高等代数与数学分析这两门课程之间的联系，从而培养其自主探究能力和创新精神。

当然随着近代数学的发展，再加上正交变换其本身故有的特点，它在数学领域发挥着越来越重要的作用，同时高等代数与数学分析这两门课程之间的相互渗透也更为突出。

基金项目

信息工程大学教育教学研究课题(JXYJ2022C010)。

参考文献

[1] 凌征球, 龚国勇, 龚文振. 高等代数在数学分析解题中的某些应用[J]. 玉林师范学院学报, 2010, 31(5): 34-37.

[2] 陈仁莲. 有关数学分析在高等代数中的应用[J]. 数学学习与研究, 2016(23): 18.

[3] 高中喜, 李厚彪, 高建. 微积分与线性代数教学的渗透与融合[J]. 高等数学研究, 2017, 20(2): 57-58+63.

[4] 董立华, 周小双. 数学分析与高等代数有关问题和方法的相互渗透[J]. 榆林学院学报, 2011, 21(6): 18-20.

[5] 程克玲. 高等代数在数学分析极值问题中的应用分析[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2020, 33(1): 83-84+87.

[6] 李建东, 杨艳. 正定二次型在重积分计算中的应用[J]. 吕梁学院学报, 2013, 3(2): 77-78.

[7] 王庆东, 谢勰. 正交变换的应用及其数学方法论意义[J]. 高等数学研究, 2008, 11(1): 82-84.

[8] 张喜善, 周雪艳. 正交变换在多元函数积分中的应用[J]. 山西财经大学学报, 2011, 33(S2): 87.

[9] 邹晓范. 正交变换在多元函数积分中的应用[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2003, 21(4): 494-496.

[10] 谭继智. 正交变换在积分中的应用[J]. 大连大学学报, 1997, 7(2): 148-151.

[11] 方巧, 秦正辉, 李永忠, 等. 正交变换在重积分中的应用[J]. 内江师范学院学报, 2008, 23(S1): 220-221.

[12] 姚云飞. 正交变换在重积分中某些应用[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(9): 139-144.

[13] 王萼芳, 石生明. 高等代数(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[14] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.