

# 若干有向卡氏积图类广义3-弧强连通度的精确值

喻俊燃

绍兴文理学院, 数理信息学院, 浙江 绍兴

收稿日期: 2022年7月5日; 录用日期: 2022年7月31日; 发布日期: 2022年8月9日

---

## 摘要

无向图 $G$ 的广义 $k$ -边连通度的定义是1985年由Hager引入的, 这个定义后来又被人们推广到有向图中, 并相应定义了有向图中的广义 $k$ -弧强连通度。近年来, 广义 $k$ -弧强连通度的研究得到了很多重要的结果。在本文中, 我们给出了某些有向卡氏积图类的3-弧强连通度的精确值。

## 关键词

有向树连通度, 笛卡尔乘积, 树连通度

---

# Precise Values for the Generalized 3-Arc-Connectivity of Cartesian Product of Some Digraph Classes

Junran Yu

Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Jul. 5<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jul. 31<sup>st</sup>, 2022; published: Aug. 9<sup>th</sup>, 2022

---

## Abstract

The definition of generalized  $k$ -edge connectivity of undirected graph  $G$  was introduced by Hager in 1985. This concept was extended to directed graph and the definition of generalized  $k$ -arc-connectivity was proposed. In recent years, the study of generalized  $k$ -arc-connectivity has achieved many important results. In this paper, we give precise values for the generalized 3-arc-connectivity of Cartesian product of some digraph classes.

## Keywords

### Directed Tree Connectivity, Cartesian Product, Tree Connectivity

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在未特别声明的情况下, 本篇论文涉及到的图均指有限、无环的并且没有平行弧的简单有向图, 未解释的符号及术语引自文献[1][2]。

用  $V(D)$  与  $A(D)$  分别表示有向图  $D$  的顶点集与弧集, 一个有向图  $D$  是对称的, 如果它可以由将对应的无向底图的边替换为两个相反方向的弧得到, 也即  $D = \overline{G}$ 。圈有向图有两种, 若在有向图  $D$  中, 对  $D$  中每对不同的顶点  $x$  的和  $y$ ,  $xy$  或者  $yx$  在图  $D$  的弧集里, 这样的具有  $n$  个顶点的圈有向图记为  $\overline{C}_n$ 。若在有向图  $D$  中, 对  $D$  中每对不同的顶点  $x$  的和  $y$ ,  $xy$  和  $yx$  均在图  $D$  的弧集里, 这样的具有  $m$  个顶点的圈有向图记为  $\overline{C}_m$ 。

无向图  $G = (V, E)$  的广义  $k$ -连通度  $\kappa_k(G)$  的概念由 Hager [3] 于 1985 年引入 ( $2 \leq k \leq |V|$ )。给定图  $G$  及其顶点子集  $S \subseteq V$  ( $S$  中至少含有 2 个顶点), 当  $G$  中的子树  $T$  满足  $S \subseteq V(T)$  时, 称这个树  $T$  为一个  $S$ -斯坦纳树, 或者简称其为  $S$ -树。当两个  $S$ -树  $T_1$  和  $T_2$  满足  $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$  并且  $V(T_1) \cap V(T_2) = S$  时, 我们称  $T_1$  和  $T_2$  为内部不交的。广义局部连通度  $\kappa_S(G)$  [3] 定义为  $G$  中内部不交  $S$ -树的最大个数。进一步, 我们定义广义  $k$ -连通度:

$$\kappa_k(G) = \min \{ \kappa_S(G) \mid S \subseteq V(G), |S| = k \},$$

其中  $k$  满足  $2 \leq k \leq n$ 。当两个  $S$ -树  $T_1$  和  $T_2$  满足  $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$  时, 我们称  $T_1$  和  $T_2$  为弧不交的。类似的, 广义局部边连通度  $\lambda_S(G)$  定义为  $G$  中边不交  $S$ -树的最大个数。相应的, 我们定义  $\lambda_k(G)$  为:

$$\lambda_k(G) = \min \{ \lambda_S(G) \mid S \subseteq V(G), |S| = k \},$$

其中  $\lambda_S(G)$  为  $G$  中弧不交  $S$ -树的最大个数[4]。其他有关无向图树连通度的结果可参考[5]。

为了将广义连通度的概念推广到有向图上, Sun 和 Yeo 引入了有向图的树连通度的概念[6], 给定是  $n$  阶有向图  $D = (V(D), A(D))$  及其  $k$  元顶点子集  $S$  ( $2 \leq k \leq n$ ) 且根节点  $r \in S$ 。一棵有向  $(S, r)$ -斯坦纳树或者简称为  $(S, r)$ -树  $T$  是一颗根节点在  $r \in S$  并且  $S \subseteq V(T)$  的外向树。两个  $(S, r)$ -树  $T_1$  和  $T_2$  被称为弧不相交的, 若  $A(T_1) \cap A(T_2) = \emptyset$ 。两个弧不相交的  $(S, r)$ -树  $T_1$  和  $T_2$  被称为内部不相交, 若  $V(T_1) \cap V(T_2) = S$ 。定义  $\kappa_{S,r}(D)$  是  $D$  中内部不相交的  $(S, r)$ -树的最大数目。定义  $D$  的广义  $k$ -点强连通度为:

$$\kappa_k(D) = \min \{ \kappa_{S,r}(D) \mid S \subseteq V, |S| = k, r \in S \}.$$

作为  $k$ -边连通度的自然对应, Sun 和 Yeo [6] 引入了广义  $k$ -弧强连通度的概念。给定  $n$  阶有向图  $D = (V(D), A(D))$  及其  $k$  元顶点子集  $S$  ( $2 \leq k \leq n$ )。定义  $\lambda_{S,r}(D)$  为  $D$  中弧不相交的  $(S, r)$ -树的最大数目。 $D$  的广义  $k$ -弧强连通度定义为:

$$\lambda_k(D) = \min \{ \lambda_{S,r}(D) \mid S \subseteq V(D), |S| = k, r \in S \}.$$

关于有向图树连通度极值结果, Sun 研究了有向图树连通度相关的极值问题[7], 给出了极小广义  $(k, \ell)$ -点(弧)强连通有向图的定义: 这类图的广义  $k$ -点(弧)强连通度至少为  $\ell$ , 但去掉任意一条弧后, 广义  $k$ -点(弧)强连通度至多为  $\ell-1$ 。并且在某些情形下对极小广义  $(k, \ell)$ -点(弧)强连通有向图分别进行了刻画。其他有关无向图树连通度的结果可参考综述文章[8]。

两个有向图  $G$  和  $H$  的卡氏积  $G \square H$  是具有顶点集

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(x, x') \mid x \in V(G), x' \in V(H)\}$$

和弧集

$$A(G \square H) = \{(x, x')(y, y') \mid xy \in A(G), x' = y' \text{ 或 } x = y, x'y' \in A(H)\}$$

的有向图。

根据定义, 我们可以证明  $G$  和  $H$  的卡氏积  $G \square H$  是强连通的当且仅当  $G$  和  $H$  都是强连通的[9]。

令  $G$  和  $H$  是顶点集分别是  $V(G) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  和  $V(H) = \{v_j \mid 1 \leq j \leq m\}$  的有向图。我们用符号  $G(v_j)$  来表示  $G \square H$  中当  $1 \leq j \leq m$  时由顶点集  $\{(u_i, v_j) \mid 1 \leq i \leq n\}$  生成的有向子图, 并且用  $H(u_i)$  来表示  $G \square H$  中当  $1 \leq i \leq n$  时由顶点集  $\{(u_i, v_j) \mid 1 \leq j \leq m\}$  生成的有向子图。容易看出,  $G(v_j) \cong G$  并且  $H(u_i) \cong H$ 。具体例子见下图 1。

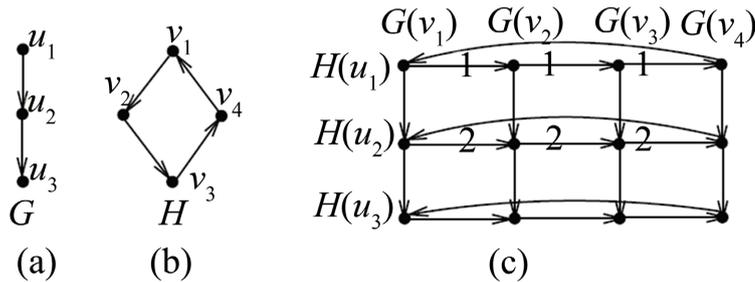


Figure 1.  $G, H$  Cartesian products  
图 1.  $G$  和  $H$  的卡氏积

## 2. 主要结果

引理 2.1. [4] 令  $D$  为一个  $n$  阶有向图,  $k$  为一个整数且  $k \geq 2$ , 则

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}(D) &\leq \lambda_k(D), \\ \kappa_k(D') &\leq \kappa_k(D), \lambda_k(D') \leq \lambda_k(D), \\ \kappa_k(D) &\leq \lambda_k(D) \leq \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}, \end{aligned}$$

其中  $D'$  是  $D$  的一个生成有向子图。

定理 2.2. 对于任意给定的两个正整数  $n$  和  $m$ , 我们有  $\lambda_3(\overline{C_n \square C_m}) = 2$ 。

证明: 由引理 2.1 可知,  $\lambda_3(\overline{C_n \square C_m}) \leq \min\{\delta^+(\overline{C_n \square C_m}), \delta^-(\overline{C_n \square C_m})\} = 2$ , 故只需在卡氏积图  $\overline{C_n \square C_m}$  找出 2 颗弧不交的  $(S, r)$ -树  $T_1$  和  $T_2$  即可。

令  $S = \{x, y, z\}$ , 根据  $x, y, z$  在顶点子集中的分布情况, 不难看出只需考虑  $x, y, z$  当  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  时分别在不同的  $\overline{C_n}(v_i)$  和  $\overline{C_m}(v_j)$  当中即可, 其他的情形的讨论是类似的。不失一般性我们可以假设  $x = (u_1, v_1), y = (u_2, v_2), z = (u_3, v_3)$ 。由于  $\overline{C_n}$  和  $\overline{C_m}$  都是强连通的, 故  $\overline{C_n \square C_m}$  也是强连通的, 根据已知事实任意强连通有向图的任意顶点都能做外(内)分支的根点, 故不失一般性我们可以设  $x$  为根点, 如下图 2

所示，我们可以得到两颗包含  $S$  的弧不交的  $(S, x)$ -树  $T_1$  和  $T_2$ ，它们的顶点集与弧集分别为：

$$V(T_1) = \{x, y, z, (u_1, v_2), (u_2, v_3)\}; A(T_1) = \{x(u_1, v_2), (u_1, v_2)y, y(u_2, v_3), (u_2, v_3)z\}.$$

$$V(T_2) = \{x, y, z, (u_2, v_1), (u_3, v_2)\}; A(T_2) = \{x(u_2, v_1), (u_2, v_1)y, y(u_3, v_2), (u_3, v_2)z\}.$$

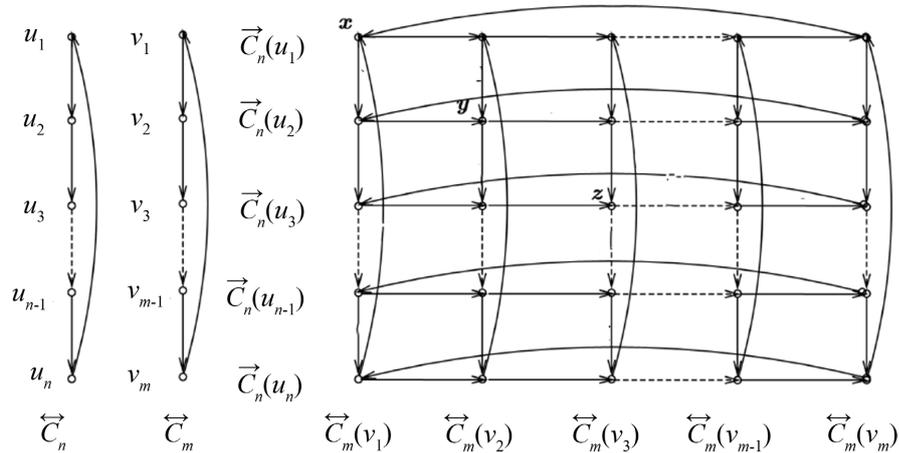


Figure 2.  $\vec{C}_n, \vec{C}_m$  and their Cartesian products

图 2.  $\vec{C}_n$  和  $\vec{C}_m$  的卡氏积图

容易看出  $T_1$  和  $T_2$  是弧不交的。从而有

$$2 \leq \lambda_3(\vec{C}_n \square \vec{C}_m) \leq \min\{\delta^+(\vec{C}_n \square \vec{C}_m), \delta^-(\vec{C}_n \square \vec{C}_m)\} = 2$$

证毕。 □

定理 2.3. 对于任意给定的两个正整数  $n$  和  $m$ ，我们有  $\lambda_3(\vec{C}_n \square \vec{C}_m) = 3$ 。

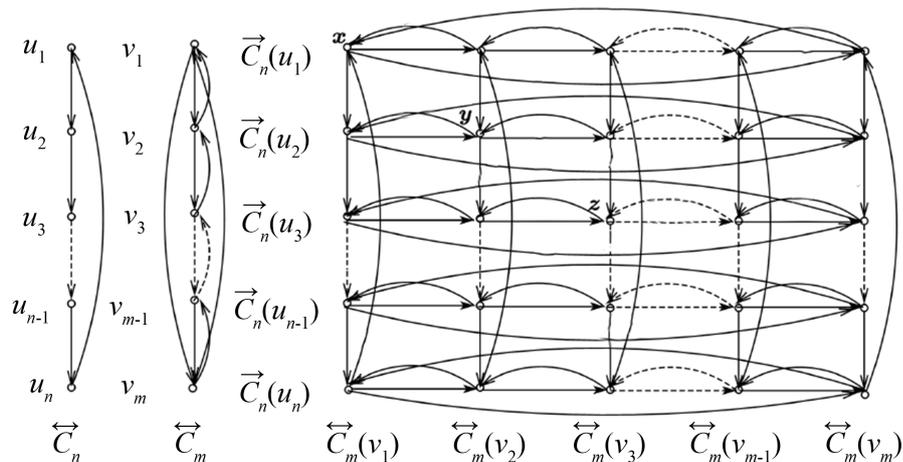


Figure 3.  $\vec{C}_n, \vec{C}_m$  and their Cartesian products

图 3.  $\vec{C}_n$  和  $\vec{C}_m$  的卡氏积图

证明：由引理 2.1 可知， $\lambda_3(\vec{C}_n \square \vec{C}_m) \leq \min\{\delta^+(\vec{C}_n \square \vec{C}_m), \delta^-(\vec{C}_n \square \vec{C}_m)\} = 3$ ，故只需在卡氏积图  $\vec{C}_n \square \vec{C}_m$  找出 3 颗弧不交的  $(S, r)$ -树  $T_1, T_2$  和  $T_3$  即可。

令  $S = \{x, y, z\}$ , 根据  $x, y, z$  在顶点子集中的分布情况, 不难看出只需考虑  $x, y, z$  当  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  时分别在不同的  $\overrightarrow{C}_n(v_i)$  和  $\overrightarrow{C}_m(v_j)$  当中即可, 其他的情形的讨论是类似的。不失一般性我们可以假设  $x = (u_1, v_1), y = (u_2, v_2), z = (u_3, v_3)$ 。由于  $\overrightarrow{C}_n$  和  $\overrightarrow{C}_m$  都是强连通的, 故  $\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m$  也是强连通的, 根据已知事实任意强连通有向图的任意顶点都能做外(内)分支的根点, 故不失一般性我们可以设  $x$  为根点, 如上 **图 3** 所示, 我们可以得到 3 颗包含  $S$  的弧不交的  $(S, x)$ -树  $T_1, T_2$  和  $T_3$ , 它们的顶点集与弧集分别为:

$$V(T_1) = \{x, y, z, (u_1, v_2), (u_2, v_3)\}; A(T_1) = \{x(u_1, v_2), (u_1, v_2)y, y(u_2, v_3), (u_2, v_3)z\}.$$

$$V(T_2) = \{x, y, z, (u_2, v_1), (u_3, v_2)\}; A(T_2) = \{x(u_2, v_1), (u_2, v_1)y, y(u_3, v_2), (u_3, v_2)z\}.$$

$$V(T_3) = \{x, y, z, (u_1, v_{m-1}), (u_1, v_m), (u_2, v_m), (u_2, v_{m-1}), \dots, (u_2, v_3), (u_3, v_{m-1}), (u_3, v_{m-2}), \dots, (u_3, v_4)\}.$$

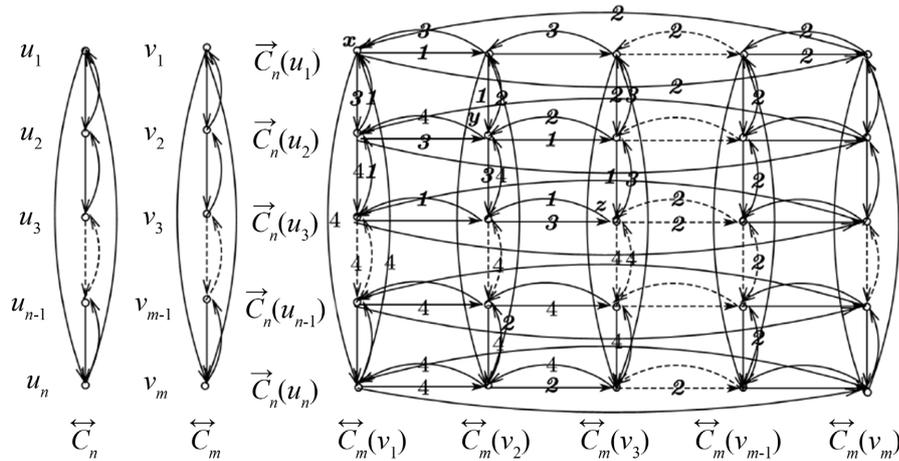
$$A(T_3) = \{x(u_1, v_m), (u_1, v_m)(u_2, v_m), (u_2, v_m)(u_2, v_{m-1}), \dots, (u_2, v_3)y, (u_1, v_m)(u_1, v_{m-1}), (u_1, v_{m-1})(u_2, v_{m-1}), (u_2, v_{m-1})(u_3, v_{m-1}), (u_3, v_{m-1})(u_3, v_{m-2}), \dots, (u_3, v_4)z\}.$$

容易看出  $T_1, T_2$  和  $T_3$  是弧不交的。从而有

$$3 \leq \lambda_3(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m) \leq \min\{\delta^+(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m), \delta^-(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m)\} = 3$$

证毕。 □

**定理 2.4.** 对于任意给定的两个正整数  $n$  和  $m$ , 我们有  $\lambda_3(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m) = 4$ 。



**Figure 4.**  $\overrightarrow{C}_n, \overrightarrow{C}_m$  and their Cartesian products

**图 4.**  $\overrightarrow{C}_n$  和  $\overrightarrow{C}_m$  的卡氏积图

**证明:** 由引理 2.1 可知,  $\lambda_3(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m) \leq \min\{\delta^+(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m), \delta^-(\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m)\} = 4$ , 故只需在卡氏积图  $\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m$  找出 4 颗弧不交的  $(S, r)$ -树  $T_1, T_2, T_3$  和  $T_4$  即可。

令  $S = \{x, y, z\}$ , 根据  $x, y, z$  在顶点子集中的分布情况, 不难看出只需考虑  $x, y, z$  当  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  时分别在不同的  $\overrightarrow{C}_n(v_i)$  和  $\overrightarrow{C}_m(v_j)$  当中即可, 其他的情形的讨论是类似的。不失一般性我们可以假设  $x = (u_1, v_1), y = (u_2, v_2), z = (u_3, v_3)$ 。由于  $\overrightarrow{C}_n$  和  $\overrightarrow{C}_m$  都是强连通的, 故  $\overrightarrow{C}_n \square \overrightarrow{C}_m$  也是强连通的, 根据已知事实任意强连通有向图的任意顶点都能做外(内)分支的根点, 故不失一般性我们可以设  $x$  为根点, 如上 **图 4** 所示, 我们可以得到 4 颗包含  $S$  的弧不交的  $(S, x)$ -树  $T_1, T_2, T_3$  和  $T_4$ , 它们的顶点集与弧集分别为:

$$V(T_1) = \{x, y, z, (u_1, v_2), (u_2, v_3)\}; A(T_1) = \{x(u_1, v_2), (u_1, v_2)y, y(u_2, v_3), (u_2, v_3)z\}.$$

$$\begin{aligned}
V(T_2) &= \{x, y, z, (u_2, v_1), (u_3, v_2)\}; A(T_2) = \{x(u_2, v_1), (u_2, v_1)y, y(u_3, v_2), (u_3, v_2)z\}. \\
V(T_3) &= \{x, y, z, (u_1, v_{m-1}), (u_1, v_m), (u_2, v_m), (u_2, v_{m-1}), \dots, (u_2, v_3), (u_3, v_{m-1}), (u_3, v_{m-2}), \dots, (u_3, v_4)\}. \\
A(T_3) &= \{x(u_1, v_m), (u_1, v_m)(u_2, v_m), (u_2, v_m)(u_2, v_{m-1}), \dots, (u_2, v_3)y, (u_1, v_m)(u_1, v_{m-1}), \\
&\quad (u_1, v_{m-1})(u_2, v_{m-1}), (u_2, v_{m-1})(u_3, v_{m-1}), (u_3, v_{m-1})(u_3, v_{m-2}), \dots, (u_3, v_4)z\}. \\
V(T_4) &= \{x, y, z, (u_n, v_1), (u_n, v_2), (u_{n-1}, v_2), (u_{n-2}, v_2), \dots, (u_3, v_2), (u_n, v_m), \\
&\quad (u_{n-1}, v_m), \dots, (u_3, v_m), (u_3, v_{m-1}), \dots, (u_3, v_4)\}. \\
A(T_4) &= \{x(u_n, v_1), (u_n, v_1)(u_n, v_2), (u_n, v_2)(u_{n-1}, v_2), \dots, (u_3, v_2)y, (u_n, v_1)(u_n, v_m), \\
&\quad (u_n, v_m)(u_{n-1}, v_m), \dots, (u_4, v_m)(u_3, v_m), (u_3, v_m)(u_3, v_{m-1}), \dots, (u_3, v_4)z\}.
\end{aligned}$$

容易看出  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  和  $T_4$  是弧不交的。从而有

$$4 \leq \lambda_3(\overline{C_n} \square \overline{C_m}) \leq \min\{\delta^+(\overline{C_n} \square \overline{C_m}), \delta^-(\overline{C_n} \square \overline{C_m})\} = 4$$

证毕。 □

### 3. 总结和展望

本文给出了若干有向卡氏积图类广义 3-弧强连通度的精确值, 即给出了  $\lambda_3(\overline{C_n} \square \overline{C_m}) = 2$ ,  $\lambda_3(\overline{C_n} \square \overline{C_m}) = 3$ ,  $\lambda_3(\overline{C_n} \square \overline{C_m}) = 4$ 。进一步, 我们还可以研究其他有向卡氏积图类广义 3-弧强连通度精确值, 同时考虑在此情况下能否同时给出这些有向卡氏积图类广义 3-点强连通度的精确值, 例如  $\kappa_3(\overline{C_n} \square \overline{C_m})$  的精确值。除此之外, 还可以研究这些有向卡氏积图类广义  $k$ -弧强连通度  $\lambda_k(G \square H)$  随着  $k$  取值不同的变化规律, 是否能给出一个统一的取值公式。

### 参考文献

- [1] Bang-Jensen, J. and Gutin, G. (2009) *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2nd Edition, Springer, London. <https://doi.org/10.1007/978-1-84800-998-1>
- [2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) *Graph Theory*. Springer, Berlin.
- [3] Hager, M. (1985) Pendant Tree-Connectivity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **38**, 179-189. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(85\)90083-8](https://doi.org/10.1016/0095-8956(85)90083-8)
- [4] Li, X., Mao, Y. and Sun, Y. (2014) On the Generalized (Edge-)Connectivity of Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **58**, 304-319.
- [5] Li, X. and Mao, Y. (2016) *Generalized Connectivity of Graphs*. Springer, Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33828-6>
- [6] Sun, Y. and Yeo, A. (2022) Directed Steiner Tree Packing and Directed Tree Connectivity. *Journal of Graph Theory*, **101**, 1-21. <https://doi.org/10.1002/jgt.22858>
- [7] Sun, Y.F. (2022) Extremal Results for Directed Tree Connectivity. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **45**, 839-850. <https://doi.org/10.1007/s40840-021-01237-1>
- [8] Sun, Y. (2022) Steiner Type Packing Problems in Digraphs: A Survey, arXiv:2206.12092v1.
- [9] Hammack, R.H. (2018) *Digraphs Products*. In: Bang-Jensen, J. and Gutin, G., Eds., *Classes of Directed Graphs*, Springer, London. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-71840-8\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71840-8_10)