

惯性广义Mann-Halpern算法及其应用

许云霞

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年7月26日; 录用日期: 2022年8月19日; 发布日期: 2022年8月29日

摘要

本文主要研究Hilbert空间中非扩张映射的不动点问题。提出了一种惯性广义Mann-Halpern算法。在一定条件下证明了算法的强收敛性。将算法应用于求解Fermat-Weber定位问题, 并给出数值实验结果。相比较已有算法, 该算法在参数的选取上更具灵活性。

关键词

非扩张映射, 不动点问题, 惯性算法, 广义Mann-Halpern算法

Inertial Generalized Mann-Halpern Algorithm and Its Application

Yunxia Xu

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jul. 26th, 2022; accepted: Aug. 19th, 2022; published: Aug. 29th, 2022

Abstract

We considered the fixed point problem of nonexpansive mapping in Hilbert space. We proposed an inertial generalized Mann-Halpern algorithm. Giving certain conditions,

we proved the strong convergence of the algorithm. Then we applied the algorithm to solve the Fermat-Weber location problem, and gave a numerical experiment. Compared with algorithms had been proposed before, our algorithm has the flexibility on choosing parameters.

Keywords

Nonexpansive Mapping, Fixed Point Problem, Inertial Algorithm, Generalized Mann-Halpern Algorithm

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究非扩张映射 T 的不动点问题. \mathcal{H} 代表 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ 分别代表 \mathcal{H} 上的内积及其诱导范数. 设 $C \subset \mathcal{H}$ 是非空闭凸集, $T : C \rightarrow C$ 是非扩张映射.

Mann 在文献 [1] 中提出了经典的 Mann 算法, 对于 $x_0 \in C$, $\alpha \in (0, 1)$, 其迭代形式为:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Reich 在文献 [2] 中提出了一般形式的 Mann 算法, 对于 $x_0 \in C$, $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, 其迭代形式为:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

在一定条件下证明了 $\{x_n\}$ 弱收敛到 T 的不动点. 详见文献 [2].

Halpern 在文献 [3] 中提出了 Halpern 算法, 对于 $x_0, u \in C$, $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, 其迭代形式为:

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

证明了 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的不动点的必要条件是: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Wittmann 在文献 [4] 中证明了算法(3)中序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的不动点的充分条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \text{ 且 } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty.$$

另一方面, 惯性算法最早是由 Polyak 在文献 [5] 中提出的, 该算法在加快收敛速率方面起着重要作用. 下一步迭代由前两步迭代得到, 即

$$x_{n+1} = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

其中 $x_0, x_1 \in C$, $\{\theta_n\} \subset [0, 1)$. 近年来, 对惯性算法有着大量研究, 例如, 惯性前后分裂算法 [6], 惯性投影算法 [7], 惯性 Mann 算法 [8–12] 等.

Mainge 在文献 [8] 中提出了惯性 Mann 算法, 对于 $x_0, x_1 \in C$, $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, 其迭代形式为:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n)T w_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

在一定条件下, 证明了算法(5)的弱收敛性. 详见文献 [8].

Tan 等人在文献 [12] 中提出了修正的惯性 Mann-Halpern 算法, 对于 $x_0, x_1, u \in C$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0, 1)$, 其迭代形式为:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ y_n = \beta_n w_n + (1 - \beta_n)T w_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

在一定条件下, 证明了算法(6)具有强收敛性. 详见文献 [12].

本文在文献 [12] 的基础上, 提出惯性广义 Mann-Halpern 算法, 迭代形式为:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ y_n = s_n w_n + t_n T w_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x_0, x_1, u \in C$, $\{\theta_n\} \subset [0, 1)$, $\{s_n\}, \{t_n\}, \{\alpha_n\} \subset (0, 1)$. 算法(7) 在参数的选取上更加灵活: 当 $s_n + t_n \equiv 1$ 时, 该算法退化成算法(6). 在一定条件下, 我们将证明算法的强收敛性.

2. 预备知识

本节主要给出一些定理证明中需要用到的引理和基本概念.

定义1. 映射 $T: C \rightarrow C$, 如果对任意 $x, y \in C$, 都有

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|,$$

则称 T 是 C 上的非扩张映射. 如果存在 $x \in C$, 使得 $x = Tx$, 则称 x 是 T 的不动点, 记 T 的所有不动点构成的集合为 $\text{Fix}(T)$.

注1. 本文中, 如无特殊说明, 均假设 T 是非扩张映射, 并且 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

定义2. \mathcal{H} 的共轭空间 $\mathcal{H}^* := \{g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ 为 } \mathcal{H} \text{ 上的连续线性泛函}\}$. 设 $x \in \mathcal{H}$, 序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$, 如果对任意 $g \in \mathcal{H}^*$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$, 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x , 记成 $x_n \rightharpoonup x, (n \rightarrow \infty)$; 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0,$$

则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x , 记成 $x_n \rightarrow x, (n \rightarrow \infty)$.

引理1. (文献 [13]推论4.15) 设 $C \subset \mathcal{H}$ 是非空闭凸集, $T : C \rightarrow C$ 是非扩张映射, 则 $\text{Fix}(T)$ 是闭凸集.

引理2. (文献 [13]引理2.37) 设 $\{x_n\}$ 是 \mathcal{H} 中的有界序列, 则 $\{x_n\}$ 存在弱收敛的子列.

引理3. (文献 [14]引理2.1) 对任意 $x, y \in \mathcal{H}$, 以下事实成立:

$$(1) \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle;$$

$$(2) \|ax + by\|^2 = a(a + b)\|x\|^2 + b(a + b)\|y\|^2 - ab\|x - y\|^2, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

引理4. (文献 [15]引理8) 设 $\{b_n\}, \{\eta_n\}$ 是非负实数列, $\{\delta_n\}, \{\xi_n\}$ 是实数列, $\{\gamma_n\} \subset (0, 1)$, 并且

$$b_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)b_n + \gamma_n\delta_n, \text{ 及 } b_{n+1} \leq b_n - \eta_n + \xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

若

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty, (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0,$$

$$(3) \{\eta_n\} \text{ 的任意满足 } \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{n_k} = 0 \text{ 的子列 } \{\eta_{n_k}\} \text{ 蕴含 } \limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_{n_k} \leq 0,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

引理5. (文献 [13]推论4.18) 设 $C \subset \mathcal{H}$ 是非空闭凸集, $T : C \rightarrow C$ 是非扩张映射, $\{x_n\} \subset C, x \in \mathcal{H}$. 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_n \rightharpoonup x$, 且 $(x_n - Tx_n) \rightarrow 0$, 则 $(I - T)x = 0$.

引理6. (文献 [16]命题1.78) 设 $C \subset \mathcal{H}$ 是非空闭凸集, $\bar{x} \in \mathcal{H}, \bar{y} \in C$, 则 \bar{y} 是 \bar{x} 在 C 上的投影当且仅当

$$\langle \bar{x} - \bar{y}, y - \bar{y} \rangle \leq 0, \forall y \in C.$$

3. 主要结果

算法1. 假设 $\{\theta_n\} \subset [0, 1), \{s_n\}, \{t_n\}, \{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, 满足 $s_n + t_n \leq 1$. 对于 $x_0, x_1, u \in C$, 算法迭代形式为:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ y_n = s_n w_n + t_n T w_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

定理1. 设 $C \subset \mathcal{H}$ 是非空闭凸集, $T : C \rightarrow C$ 是非扩张映射, 且 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. 对于 $x_0, x_1, u \in C$, 序列 $\{x_n\}$ 由算法1迭代产生, 并且以下条件成立

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} = 0,$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - s_n - t_n) < \infty,$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - s_n - t_n}{\alpha_n} = 0.$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的不动点 p , 并且 $p = P_{\text{Fix}(T)}u$.

证明. 第一步: 先证明 $\{x_n\}$ 有界. 取 $p \in \text{Fix}(T)$, 则

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n)y_n - p\| \\ &= \|\alpha_n(u - p) + (1 - \alpha_n)(y_n - p)\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|y_n - p\|. \end{aligned} \quad (9)$$

上式中

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|s_n w_n + t_n T w_n - p\| \\ &= \|s_n(w_n - p) + t_n(T w_n - p) + (s_n + t_n - 1)p\| \\ &\leq s_n \|w_n - p\| + t_n \|T w_n - p\| + (1 - s_n - t_n) \|p\| \\ &\leq s_n \|w_n - p\| + t_n \|w_n - p\| + (1 - s_n - t_n) \|p\| \\ &= (s_n + t_n) \|w_n - p\| + (1 - s_n - t_n) \|p\| \\ &\leq \|w_n - p\| + (1 - s_n - t_n) \|p\|. \end{aligned} \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式中, 可得

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n) \|w_n - p\| + \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n)(1 - s_n - t_n) \|p\|. \quad (11)$$

上式中

$$\|w_n - p\| = \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - p\| \leq \|x_n - p\| + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式中, 可得

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| + (1 - \alpha_n)(1 - s_n - t_n) \|p\| \\ &= (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \left[\|u - p\| + (1 - \alpha_n) \frac{\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} \right] + (1 - \alpha_n)(1 - s_n - t_n) \|p\|. \end{aligned}$$

在上式中, 令 $M = 2 \max \left\{ \|u - p\|, \sup_{n \geq 0} (1 - \alpha_n) \frac{\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} \right\}$, 由 $(1 - \alpha_n) < 1$ 和条件(2) 可知 $M < \infty$, 则

$$\alpha_n \left[\|u - p\| + (1 - \alpha_n) \frac{\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|}{\alpha_n} \right] \leq \alpha_n M.$$

所以

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n M + (1 - \alpha_n)(1 - s_n - t_n) \|p\|.$$

由凸组合性质可知

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \max \left\{ \|x_n - p\|, M \right\} + (1 - \alpha_n)(1 - s_n - t_n) \|p\|.$$

再由 $(1 - \alpha_n) < 1$, 可知

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \max \left\{ \|x_n - p\|, M \right\} + (1 - s_n - t_n) \|p\|.$$

将上式关于 n 进行归纳, 可得

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \max \left\{ \|x_0 - p\|, M \right\} + \sum_{j=0}^n (1 - s_j - t_j) \|p\|. \tag{13}$$

结合条件(3)可知

$$\sum_{j=0}^n (1 - s_j - t_j) \|p\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - s_n - t_n) \|p\| < \infty,$$

故由(13)式可知 $\{\|x_{n+1} - p\|\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 有界.

进一步, 因为 $\|w_n\| \leq \|x_n\| + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|$, 所以 $\{w_n\}$ 有界, 由 T 是非扩张映射知 $\|Tw_n - p\| \leq \|w_n - p\|$, 从而 $\{Tw_n\}$ 有界.

由 $\{y_n\}$ 定义和 $s_n + t_n \leq 1$ 知 $\|y_n\| \leq s_n \|w_n\| + t_n \|Tw_n\| \leq \max \left\{ \|w_n\|, \|Tw_n\| \right\}$, 从而 $\{y_n\}$ 有界, 再由 T 是非扩张映射知 $\{Ty_n\}$ 有界.

第二步: 再证明 $\{x_n\}$ 强收敛到 $p = P_{\text{Fix}(T)}u$. 因为

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n - p\|^2 \\ &= \|(1 - \alpha_n)(y_n - p) + \alpha_n(u - p)\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|y_n - p\|^2 + 2\langle \alpha_n(u - p), x_{n+1} - p \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|y_n - p\|^2 + 2\alpha_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

(14)式中第一个不等式由引理3事实(1)得到, 且

$$\begin{aligned}
 \|y_n - p\|^2 &= \|s_n w_n + t_n T w_n - p\|^2 \\
 &= \|s_n(w_n - p) + t_n(T w_n - p) + (s_n + t_n - 1)p\|^2 \\
 &\leq \|s_n(w_n - p) + t_n(T w_n - p)\|^2 + 2\langle (s_n + t_n - 1)p, y_n - p \rangle \\
 &= s_n(s_n + t_n)\|w_n - p\|^2 + t_n(s_n + t_n)\|T w_n - p\|^2 - s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 \\
 &\quad + 2\langle (s_n + t_n - 1)p, y_n - p \rangle \\
 &\leq s_n \|w_n - p\|^2 + t_n \|T w_n - p\|^2 - s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 + 2(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle \\
 &\leq s_n \|w_n - p\|^2 + t_n \|w_n - p\|^2 - s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 + 2(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle \\
 &= (s_n + t_n)\|w_n - p\|^2 - s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 + 2(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle \\
 &\leq \|w_n - p\|^2 - s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 + 2(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle. \tag{15}
 \end{aligned}$$

(15)式中第一个不等式由引理3事实(1)得到, 第三个等式由引理3事实(2)得到.

将(15)式带入(14)式中, 可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|w_n - p\|^2 - (1 - \alpha_n)s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 \\
 &\quad + 2(1 - \alpha_n)(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle + 2\alpha_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle. \tag{16}
 \end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}
 \|w_n - p\|^2 &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - p\|^2 = \|x_n - p + \theta_n(x_n - x_{n-1})\|^2 \\
 &= \|x_n - p\|^2 + \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle. \tag{17}
 \end{aligned}$$

将(17)式带入(16)式中, 可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n)\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2(1 - \alpha_n)\theta_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle \\
 &\quad - (1 - \alpha_n)s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2 + 2(1 - \alpha_n)(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle + 2\alpha_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle. \tag{18}
 \end{aligned}$$

在(18)式中令 $b_n = \|x_n - p\|^2$, $\eta_n = (1 - \alpha_n)s_n t_n \|w_n - T w_n\|^2$, $\gamma_n = \alpha_n$,

$$\delta_n = \frac{(1 - \alpha_n)}{\alpha_n} \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \frac{2(1 - \alpha_n)}{\alpha_n} \theta_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle + \frac{2(1 - \alpha_n)}{\alpha_n} (s_n + t_n - 1) \langle p, y_n - p \rangle + 2 \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle.$$

令 $\xi_n = \alpha_n \delta_n$, 则

$$\begin{aligned}
 \xi_n &= (1 - \alpha_n)\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2(1 - \alpha_n)\theta_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle \\
 &\quad + 2(1 - \alpha_n)(s_n + t_n - 1)\langle p, y_n - p \rangle + 2\alpha_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle.
 \end{aligned}$$

从而(18)式可改写成

$$b_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)b_n + \gamma_n\delta_n, \text{ 及 } b_{n+1} \leq b_n - \eta_n + \xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ 知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty.$$

在 ξ_n 中, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ 和第一步结论 $\{x_n\}$ 有界, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\alpha_n \langle u - p, x_{n+1} - p \rangle = 0.$$

由条件(2)知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2(1 - \alpha_n)\theta_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle = 0.$$

由条件(3)知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n - t_n) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n - 1) = 0$, 结合第一步结论 $\{y_n\}$ 有界, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2(1 - \alpha_n)(s_n + t_n - 1) \langle p, y_n - p \rangle = 0.$$

综合可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

结合引理4, 至此该引理的条件(1),(2)已满足, 接下来求证条件(3)满足即可.

事实上, 任取 $\{\eta_n\}$ 的子列 $\{\eta_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{n_k} = 0$. 由 $\{\alpha_n\}, \{s_n\}, \{t_n\} \subset (0, 1)$ 和 η_n 定义, 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_{n_k} - Tw_{n_k}\| = 0. \tag{19}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| = 0$, 可知

$$\|w_{n_k} - x_{n_k}\| = \|x_{n_k} + \theta_{n_k}(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) - x_{n_k}\| = \theta_{n_k} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty). \tag{20}$$

因为 $\{x_n\}$ 有界, 所以 $\{x_{n_k}\}$ 有界, 所以由引理2知存在 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 满足

$$x_{n_{k_j}} \rightarrow \bar{x}, (j \rightarrow \infty) \text{ 及 } \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_k} - p \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_{k_j}} - p \rangle.$$

由(20)式可知, $w_{n_{k_j}} \rightarrow \bar{x}, (j \rightarrow \infty)$, 所以由(19)式和引理5知 $\bar{x} = T\bar{x}$, 即 $\bar{x} \in \text{Fix}(T)$.

因为 $p = P_{\text{Fix}(T)}u$, 所以结合引理1和引理6可知 $\langle u - p, \bar{x} - p \rangle \leq 0$. 所以

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_k} - p \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_{k_j}} - p \rangle = \langle u - p, \bar{x} - p \rangle \leq 0.$$

接下来, 证明 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_{k+1}} - p \rangle \leq 0$. 因为

$$\begin{aligned} \|y_{n_k} - w_{n_k}\| &= \|s_{n_k} w_{n_k} + t_{n_k} T w_{n_k} - w_{n_k}\| = \|t_{n_k} (T w_{n_k} - w_{n_k}) + (s_{n_k} + t_{n_k} - 1) w_{n_k}\| \\ &\leq t_{n_k} \|T w_{n_k} - w_{n_k}\| + (1 - s_{n_k} - t_{n_k}) \|w_{n_k}\|. \end{aligned}$$

所以由(19)式, $t_{n_k} \subset (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - s_n - t_n) = 0$ 以及 $\{w_{n_k}\}$ 有界可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k} - w_{n_k}\| = 0. \tag{21}$$

因为 $\|y_{n_k} - x_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - w_{n_k}\| + \|w_{n_k} - x_{n_k}\|$, 所以由(20)式和(21)式可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k} - x_{n_k}\| = 0. \tag{22}$$

又因为

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = \|\alpha_{n_k} u + (1 - \alpha_{n_k}) y_{n_k} - x_{n_k}\| \leq \alpha_{n_k} \|u - x_{n_k}\| + (1 - \alpha_{n_k}) \|y_{n_k} - x_{n_k}\|.$$

所以由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\{x_{n_k}\}$ 有界和(22)式可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = 0.$$

所以

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u - p, x_{n_{k+1}} - p \rangle \leq 0.$$

再结合定理条件(2), 条件(4)和 δ_n 定义

可知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_{n_k} \leq 0.$$

至此证得引理4的条件(3)满足.

综上, 由引理4可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p.$$

至此, 完成证明. □

注2. 下面给出满足定理条件的参数取值示例:

取 $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $s_n = t_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}$, $0 \leq \theta_n \leq \bar{\theta}_n$, 其中

$$\bar{\theta}_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+2}, & x_n = x_{n-1}; \\ \min \left\{ \frac{n-1}{n+2}, \frac{10}{(n+1)^2 \|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1}. \end{cases}$$

4. 算法在 Fermat-Weber 定位问题中的应用

本节主要考虑 \mathcal{H} 中如下 Fermat-Weber 定位问题: 即寻找 $x \in \mathbb{R}^d$, 求解

$$\min_x \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\| \right\}, \quad (\text{FW})$$

其中, $\omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$ 是权重, $a_i \in \mathbb{R}^d$ 是给定的锚点.

求解问题(FW)常用的算法是 Weiszfeld 算法, 该算法最早由 Weiszfeld 在文献 [17]中提出, 在优化和定位领域有着大量的研究, 至今仍在讨论和使用, 具体可参考文献 [17,18]. 在文献 [18]中, 作者构造了不动点迭代算法并进行了收敛性分析, 关于非扩张映射 T 的具体算法如下:

$$\begin{cases} T(\cdot) = \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|\cdot - a_i\|} / \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|\cdot - a_i\|}, \\ x_{n+1} = T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (23)$$

作为特例, 我们考虑 \mathbb{R}^3 空间中, $m = 8$ 的情形, 令 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$, 取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

取权重 $\omega_i \equiv 1, i = 1, 2, \dots, 8$. 此时问题(FW)描述的是 \mathbb{R}^3 空间中, 求到正方体8个顶点距离和最小的点的坐标, 由立体几何知识易知, 最优解是 $x^* = (5, 5, 5)^T$.

接下来, 利用算法1(记作A1)求解该问题. $s_n, t_n, \alpha_n, \bar{\theta}_n, \theta_n$ 等参数取值同注2, 非扩张映射 T 同(23)式, 初始值 x_0, x_1 由 Matlab 函数 `10 * rand(3, 1)` 随机产生, 取 $u = 0.5(x_0 + x_1)$, 最大迭代次数取 1000 次, 误差判定准则为 $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 10^{-3}$. 在 Matlab R2020b 环境下, A1与文献 [12]算法(记作A2)的数值对比结果见图1, 图2.

其中, A2参数选取为, $\beta_n = \frac{1}{100(n+1)^2}, \alpha_n = \frac{1}{n+1}, u = 0.9x_0, 0 \leq \theta_n \leq \bar{\theta}_n$,

$$\bar{\theta}_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+3}, & x_n = x_{n-1}, \\ \min \left\{ \frac{n-1}{n+3}, \frac{10}{(n+1)^2 \|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1}, \end{cases}$$

其余同A1.

在初始点相同, 误差判定准则相同的前提下, 从图1可以看出, A1, A2都收敛于最优解 $x^* = (5, 5, 5)^T$. 从图2可以看出, A1的迭代次数比A2少, 这体现了A1相比较之前的算法具有一定的优势.

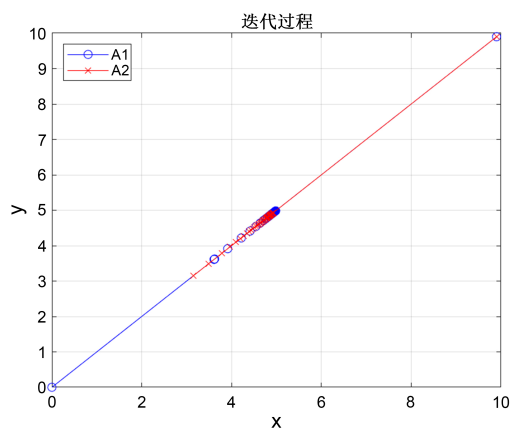


Figure 1. Iteration process

图 1. 迭代过程图

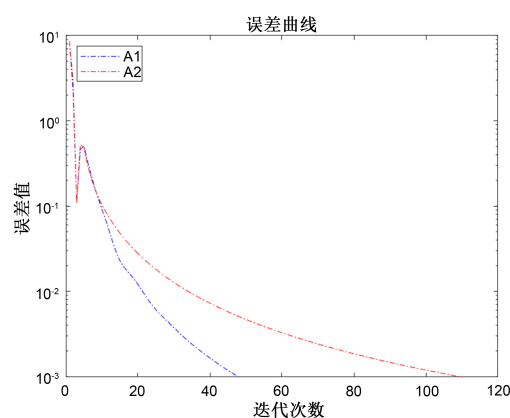


Figure 2. Error comparison

图 2. 误差对比图

5. 总结与展望

本文提出了 Hilbert 空间中的惯性广义 Mann-Halpern 算法, 在一定条件下证明了该算法的强收敛性. 将算法应用于求解具体问题, 利用数值实验进行了说明, 并与文献 [12] 中的算法进行了数值对比, 体现了该算法具有一定的优势, 从而在实际应用中具有更强的灵活性. 在未来的研究中, 我们还将研究该算法的收敛速率.

参考文献

- [1] Mann, W.R. (1953) Mean Value Methods in Iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 993-993. <https://doi.org/10.2307/2031845>
- [2] Reich, S. (1979) Weak Convergence Theorems for Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **67**, 274-276. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(79\)90024-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90024-6)
- [3] Halpern, B. (1967) Fixed Points of Nonexpanding Maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 957-961. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0>
- [4] Wittmann, R. (1992) Approximation of Fixed Points of Nonexpansive Mappings. *Archiv der Mathematik*, **58**, 486-491. <https://doi.org/10.1007/BF01190119>
- [5] Polyak, B.T. (1964) Some Methods of Speeding up the Convergence of Iteration Methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**, 1-17. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90137-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90137-5)
- [6] Tan, B., Zhou, Z. and Qin, X. (2020) Accelerated Projection-Based Forward-Backward Splitting Algorithms for Monotone Inclusion Problems. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **10**, 2184-2197. <https://doi.org/10.11948/20190363>

-
- [7] Tan, B., Xu, S. and Li, S. (2020) Modified Inertial Hybrid and Shrinking Projection Algorithms for Solving Fixed Point Problems. *Mathematics*, **8**, Article 236. <https://doi.org/10.3390/math8020236>
- [8] Maingé, P.E. (2008) Convergence Theorems for Inertial KM-Type Algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **219**, 223-236. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.07.021>
- [9] Combettes, P.L. and Glaudin, L.E. (2017) Quasi-Nonexpansive Iterations on the Affine Hull of Orbits: From Mann's Mean Value Algorithm to Inertial Methods. *SIAM Journal on Optimization*, **27**, 2356-2380. <https://doi.org/10.1137/17M112806X>
- [10] Shehu, Y. and Gibali, A. (2020) Inertial Krasnoselskii-Mann Method in Banach Spaces. *Mathematics*, **8**, Article 638. <https://doi.org/10.3390/math8040638>
- [11] Artsawang, N. and Ungchittrakool, K. (2020) Inertial Mann-Type Algorithm for a Nonexpansive Mapping to Solve Monotone Inclusion and Image Restoration Problems. *Symmetry*, **12**, Article 750. <https://doi.org/10.3390/sym12050750>
- [12] Tan, B., Zhou, Z. and Li, S. (2020) Strong Convergence of Modified Inertial Mann Algorithms for Nonexpansive Mappings. *Mathematics*, **8**, Article 462. <https://doi.org/10.3390/math8040462>
- [13] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2011) Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9467-7_1
- [14] Kanzow, C. and Shehu, Y. (2017) Generalized Krasnoselskii-Mann-Type Iterations for Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces. *Computational Optimization and Applications*, **67**, 595-620. <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9902-0>
- [15] He, S. and Yang, C. (2013) Solving the Variational Inequality Problem Defined on Intersection of Finite Level Sets. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 942315. <https://doi.org/10.1155/2013/942315>
- [16] Mordukhovich, B.S. and Nam, N.M. (2013) An Easy Path to Convex Analysis and Applications. In: Krantz, St.G., Ed., *Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics*, Springer, Cham, 1-218. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-02406-1>
- [17] Weiszfeld, E. (1937) Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, **43**, 355-386.
- [18] Beck, A. and Sabach, S. (2015) Weiszfeld's Method: Old and New Results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **164**, 1-40. <https://doi.org/10.1007/s10957-014-0586-7>