

跟上探索自行车比赛骑手的步伐

陆骋阳, 林雨菲, 张家怡, 张慧增*

杭州师范大学, 浙江 杭州

收稿日期: 2022年7月3日; 录用日期: 2022年7月29日; 发布日期: 2022年8月5日

摘要

本文旨在为攀登者、短跑运动员、拳击运动员、轮滑运动员、计时赛专家这五类不同的自行车计时赛参赛对象设计最佳的比赛方案,使他们在比赛过程中的能量分配尽可能地合理,并且冲线的时间达到最短。为了实用起见,我们还要将得到的方案应用到三种不同的比赛实况中去,分别是2021年东京奥运会计时赛、UCI世界锦标赛计时赛以及一条我们自行设计的计时赛路线。此外,为了更加贴合实际,我们需要在模型中添加一些能够反映不同干扰因素参数,以此优化我们的模型。而在本文中,我们利用逐步回归法、插值法,成功地帮助参赛骑手选择了比赛最佳策略。首先,我们对骑速、机能指标与能耗等指标进行了相关性分析,通过逐步回归建立了能耗方程,结合能耗方程与相关资料,我们定义出了五种类型骑手的功率配置。其次,我们对题干中所提到的三种计时赛图进行了取点,选择构建了车手的骑行速度关于时间的函数。针对功率与位置关系的刻画,我们综合考虑了力、速度、功率、时间、位置的关系,建立了微分方程模型进行求解。我们发现随着车手的路程增加,其功率先呈现迅速增长的趋势,但增长速率越来越缓,再以保持不变的功率行驶。我们通过计时赛程在减速时能减到适合转弯的速度的确保以及第三阶段计算出来的位移小于赛程图中的位移的验证,检验出模型是适合三种计时赛程的。接下来,考虑到实际问题中还有风力的干扰,且车队中处于前排的车手会受到阻力的影响,我们在问题二微分方程模型建立的基础上,增加风力和速度的比例系数,得到新的微分方程模型。总的来说,在车手们互相轮换的机制下,风力对车队速度没有造成显著性影响。然后,考虑到整条赛道转弯处的夹角是不同的,并且骑手们对分裂时机比赛策略的选择以及对突发情况的临时处理的策略都可能会导致动力目标的错过。综合考虑骑手 $p-t$ 功率分布,我们的结论是:所求解出的骑手 $p-t$ 功率分布与目标功率分布是存在一定差异的。最后,考虑到团体计时赛的实际比赛情况,第四名冲线骑手的速度、功率都是适中的。我们对上述已经得到的微分方程模型进行了扩展,确定出了能量与时间的关系。根据绘制的能量示意图,我们得出了结论为骑手在第二阶段匀速的时间最长,并且能量分配最合理。综合来看,该模型具有较强的灵活性和推广性。我们也可以通过提高拟合精度和添加新的影响因素来改进模型。

关键词

微分方程模型, 插值法, 逐步回归法, 相关性分析

Keeping Up with the Exploration of Cycling Race Riders

*通讯作者。

Chengyang Lu, Yufei Lin, Jiayi Zhang, Huizeng Zhang*

Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang

Received: Jul. 3rd, 2022; accepted: Jul. 29th, 2022; published: Aug. 5th, 2022

Abstract

We aim to design optimal race scenarios for five different categories of cycling time trial participants: climbers, sprinters, boxers, rollerbladers and time trial specialists, giving them the best possible energy distribution during the race and the shortest possible time to the line. For purposes of practice, we also apply the solutions to three different race scenarios: the Tokyo 2021 Olympic Games time trial, the UCI World Championship time trial and a time trial course of our own design. In addition, in order to better fit the reality, we need to add some parameters that reflect different disturbing factors in the model to make the model optimal. In this paper, we use stepwise regression method and interpolation method to successfully help the riders to choose the best strategy for the race. Firstly, we analyzed the correlation between riding speed, functional index and energy consumption, established the energy consumption equation by stepwise regression, and combined the energy consumption equation with relevant information, defining the power configuration for five types of riders. Secondly, we made an interpolation of the three time trial graphs mentioned in the question and chose to construct the rider's riding speed as a function of time. For the portrayal of the power-position relationship, we integrated the relationship between force, speed, power, time and position, building a differential equation model to solve it. We found that as the rider's distance increases, its power first shows a rapid growth trend, but the growth rate becomes slower and slower, and then travels at constant power. We tested that the model was suitable for the three-time trials by ensuring that the time trial can be reduced to a speed suitable for turning when decelerating and by verifying that the displacement calculated in the third stage is smaller than the displacement in the race diagram. Next, considering that there is wind interference in the actual problem and the riders in the front row of the team will be affected by the drag, the new differential equation model is obtained by increasing the scale coefficients of wind and speed on the basis of the differential equation model of problem 2. In general, under the mechanism of riders rotating with each other, wind has no significant effect on team speed. Taking into account that the pinch angles at the turns are different throughout the course and that the riders' choices of split timing race strategies and strategies for ad hoc handling of unexpected situations may lead to missed power targets. Considering the rider p-t power distribution together, we concluded that the solved rider p-t power distribution was somewhat different from the target power distribution. In conclusion, considering the actual race situation of the team time trial, the speed and power of the fourth rider crossing the line are moderate. We extended the differential equation model already obtained above to determine the relationship between energy and time. Based on the energy schematic, it was concluded that the rider had the longest time at constant speed in the second stage and the most reasonable energy distribution. Taken together, the model is highly flexible and generalizable. We can also improve the model by improving the fitting accuracy and adding new influencing factors.

Keywords**Differential Equation Model, Interpolation Method, Stepwise Regression Method, Correlation Analysis**

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 问题描述与分析

自行车公路赛有许多种类型,其中包括标准计时赛、团队计时赛和个人计时赛。在自行车公路赛中,骑手的成功机会与赛事类型、赛道和骑手的能力有关。骑手在不同时间下产生的功率不同,因此我们可以用能量曲线来表示骑手能产生给定能量的时间。此外,骑手产生的能量越多,他在减少能量和恢复能量之前能够维持的时间也越短。随着能量的不断输出,骑手会越来越疲劳。

本文主要研究如下问题:

在一场自行车计时赛中,有五类参赛对象:攀登者、短跑运动员、拳击运动员、轮滑运动员以及计时赛专家,我们的目的是为他们设计一种骑行的方案,使得他们在各自的比赛过程中,能够合理利用体内剩余能量,并且比赛全过程达到最短。现在需要考虑到不同的计时赛情形,我们首先提供了两种规范的计时赛赛道,我们需要验证设计的骑行方案放在这些具体情形中同样有效。之后,我们需要自行规划一条赛道,其中应当包括多个弯道,用来进一步验证模型的准确性。而对于比赛的真实情况,我们还应该考虑多种阻碍自行车前进的因素,比如风力、天气的影响等等,来保证模型的严谨性。最后我们还要对自己建立的模型进行评估,这便完成了整个问题。

首先,我们建立了一个能应用于任何类型骑手以及各种计时赛课程的模型,这是因为建立的模型需要具备实际的使用价值,其不能因为参赛对象的改变而改变;其次,我们确定了模型对天气条件和偏离目标功率分布的敏感度,这是通过一定的扰动来判断我们的模型的结果是否具有普遍性,以便于后续推广至更一般的情形;最后,我们根据规律推广了上面已经建立的模型。

2. 模型假设

首先,我们假设竞赛自行车的质量为 6.8 kg,男运动员的体重为 70 kg,女运动员的体重为 60 kg,运动员呼吸和循环系统在氧的代谢下产生的能量为 $630 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$;

其次,我们假设大部分的道路是直道,遇到弯道时运动员先进入减速阶段,拐弯后重新进入加速阶段;

最后,我们假设六名骑手能量的平均值是第四名冲线选手的能量。

在建立具体模型之前,我们需要对相关物理量的符号、含义以及单位进行说明(如表 1)。

3. 符号说明

Table 1. Notations

表 1. 符号说明

参数	含义	单位
τ^{-1}	选手和自行车整体所受阻力和骑行速度的比例系数	$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$
γ^{-1}	风力 R 和速度 v 的比例系数	$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$
F	选手的最大冲力	N
m	选手的体重	kg
M	自行车的质量	kg
v_0	选手的初速度	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
σ	选手呼吸系统和循环系统在氧的代谢下单位时间产生的能量	J
E_0	赛前贮存在体内的能量	J

4. 基于微分方程的自行车计时赛模型

4.1. 定义功率配置

由于骑手在骑行过程中能量消耗的分配与速度有着很大的关联，所以我们定量地分析了骑手能量的消耗。我们根据数据文献与能耗方程[1]并定义功率配置如表 2。

Table 2. Power profiles for different types of riders of different genders

表 2. 不同类型、不同性别骑手的功率配置

骑手类型	男骑手功率配置	女骑手功率配置
攀登者	336 W	220 W
短跑运动员	340 W	230 W
拳击运动员	353 W	239 W
轮滑运动员	365 W	245 W
计时赛专家	370 W	260 W

4.2. 微分方程的建立

由于自行车运动员需要在最短的时间里完成比赛，于是我们要构建自行车速度 v 关于时间 t 的函数。由路程定义我们得到[2]

$$s(v(t)) = \int_0^t v(t) dt \quad (1)$$

其中我们设初速度 v_0 为 0。

我们记自行车运动员的动力随时间变化的函数为 $f(t)$ ，于是由牛顿第二定律得

$$f(t) - \frac{v}{\tau} = m \frac{dv}{dt} \quad (0 \leq f(t) \leq F) \quad (2)$$

其中 τ^{-1} 为选手和自行车这一整体所受阻力和骑行速度的比例系数。

假设骑手体内剩余的能量为 $E(t)$ ，则

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - fv \quad (E(t) \geq 0) \quad (3)$$

其中 σ 为选手呼吸系统和循环系统在氧的代谢下单位时间产生的能量。

而对于骑手的最大冲力 F ，根据模型一的功率配置，我们可以利用功率的计算公式推出 F 的值，那么对于每一种类型的骑手，我们都可以将 F 视为已知量。

我们将一场赛道比较直的赛程分为 3 个阶段(如图 1 所示)：第一阶段使自行车在短时间内尽可能地获得较快的速度，第二阶段是保持第一阶段的末速度行驶，最后阶段将所有的能量全部用完。

为了使模型具有更好的适用性，我们考虑了赛道有部分偏转的情况。对于实际的情形，车手在转弯时会进行减速，以确保车身安全，为使骑行时间尽可能短且减少车手自身的能量消耗。我们认为自行车运动员应先依靠惯性进行减速，减速到合适速度时再保持匀速率运动，过了弯道之后重新加速，这里的加速方式与初始阶段相同，然后在直道区匀速，如此反复下去。[3]

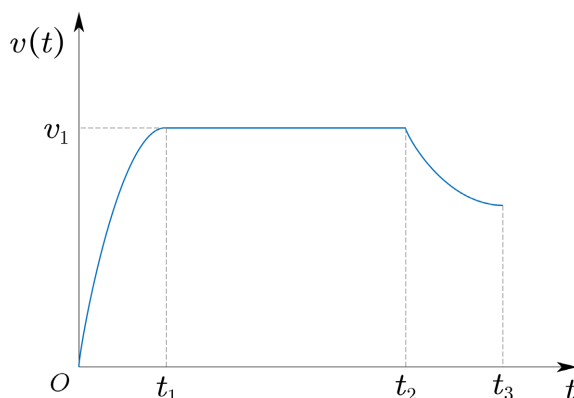


Figure 1. Schematic diagram of the course stages
图 1. 赛程阶段示意图

根据上面的式子，我们可以推导出有关第一阶段 $v(t)$ 的表达式，即

$$v(t) = F\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4)$$

注意到 t_1 时刻是初始阶段和第二阶段的连接点，对于第二阶段来讲，根据骑手的功率配置，自行车的行驶速度是已知的，另外， F ， τ 对于每一种类型的骑手都是常量，由此，我们可以借助 Matlab 对上述超越方程进行求解，解出 τ 。

又因为

$$v(t) = \tau \left(mv'(t) + \frac{v(t)}{\tau} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5)$$

于是两边积分得到

$$s_1 = \int_0^{t_1} v(t) dt = \int_0^{t_1} \tau \left(mv'(t) + \frac{v(t)}{\tau} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt \quad (6)$$

对于减速阶段，我们同样可以得到有关时间和骑行速度的函数，即

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2(t) + \frac{v^2(t)}{\tau} \quad (7)$$

而根据中间阶段的末速度可以推出速度的表达式

$$v(t) = \sqrt{\left(v_1^2 - \sigma\tau \right) e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau}} + \sigma\tau} \quad (t_2 \leq t \leq t_3) \quad (8)$$

表达式中的参数均可以由之前的过程求出，所以关于速度的函数可求。

4.3. 模型的数据处理与图像绘制

在处理完数学表达式之后，我们利用图像对上述部分方程的根进行估值，确定其大致范围，再用 Matlab 进行计算。我们首先利用题中变量之间构建的等量关系求解出 τ 的值，再根据部分假设中提到的常数值逐个地导出对于不同选手的函数关系，其中我们考虑到运动员的冲力也是关于时间的函数式，因而得到之后的两种曲线，后续我们将根据以下计算出的表达式来合理安排团队赛的最佳能量分配。相关计算结果如表 3 所示。

Table 3. Riders' τ values and velocity and power curves with different types and genders
表 3. 不同类型、不同性别骑手的 τ 值和速度、功率曲线

骑手类型	τ 值	速度、功率曲线
男攀登者	0.6696	$v = \begin{cases} 15 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.6696}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 15(1 - e^{-26.88}), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[225(1 - e^{-26.88})^2 - 421.848 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.6696}} + 421.848}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$ $P = \begin{cases} 336 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.6696}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 336(1 - e^{-26.88}), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$
女攀登者	0.4545	$v = \begin{cases} 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.4545}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 10(1 - e^{-39.6}), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[100(1 - e^{-39.6})^2 - 286.335 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.4545}} + 286.335}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$ $P = \begin{cases} 220 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.4545}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 220(1 - e^{-39.6}), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$
男短跑运动员	0.9524	$v = \begin{cases} 18 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.9524}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 18(1 - e^{-19}), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[324(1 - e^{-19})^2 - 600.012 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.9524}} + 600.012}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$ $P = \begin{cases} 340 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.9524}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 340(1 - e^{-19}), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$
女短跑运动员	0.6250	$v = \begin{cases} 12 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.625}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 12(1 - e^{-28.8}), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[144(1 - e^{-28.8})^2 - 393.75 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.625}} + 393.75}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$ $P = \begin{cases} 230 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.625}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 230(1 - e^{-28.8}), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$

Continued

$$v = \begin{cases} 19 \left(1 - e^{-\frac{t}{1.0215}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 19 \left(1 - e^{-17.62} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[361 \left(1 - e^{-17.62} \right)^2 - 643.545 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{1.0215}} + 643.545}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

男拳击运动员 1.0215

$$P = \begin{cases} 353 \left(1 - e^{-\frac{t}{1.0215}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 353 \left(1 - e^{-17.62} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 14 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.8187}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 14 \left(1 - e^{-21.99} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[196 \left(1 - e^{-21.99} \right)^2 - 515.781 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.8187}} + 515.781}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

女拳击运动员 0.8187

$$P = \begin{cases} 239 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.8187}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 239 \left(1 - e^{-21.99} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 20 \left(1 - e^{-\frac{t}{1.0929}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 20 \left(1 - e^{-16.47} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[400 \left(1 - e^{-16.47} \right)^2 - 688.527 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{1.0929}} + 688.527}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

男轮滑运动员 1.0929

$$P = \begin{cases} 365 \left(1 - e^{-\frac{t}{1.0929}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 365 \left(1 - e^{-16.47} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 15 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.9202}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 15 \left(1 - e^{-19.56} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[225 \left(1 - e^{-19.56} \right)^2 - 579.726 \right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.9202}} + 579.726}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

女轮滑运动员 0.9202

$$P = \begin{cases} 245 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.9202}} \right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 245 \left(1 - e^{-19.56} \right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Continued

$$v = \begin{cases} 22\left(1 - e^{-\frac{t}{1.3095}}\right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 22\left(1 - e^{-13.75}\right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[484\left(1 - e^{-13.75}\right)^2 - 824.985\right] e^{\frac{2(t-t_2)}{1.3095}} + 824.985}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

男计时赛专家 1.3095

$$P = \begin{cases} 370\left(1 - e^{-\frac{t}{1.3095}}\right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 370\left(1 - e^{-13.75}\right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 16\left(1 - e^{-\frac{t}{0.9816}}\right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 16\left(1 - e^{-18.34}\right), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[256\left(1 - e^{-18.34}\right)^2 - 618.408\right] e^{\frac{2(t-t_2)}{0.9816}} + 618.408}, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

女计时赛专家 0.9816

$$P = \begin{cases} 260\left(1 - e^{-\frac{t}{0.9816}}\right), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 260\left(1 - e^{-18.34}\right), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

在得到曲线的具体函数和相应的变量取值范围后，我们借助 Origin 软件进行图像绘制，我们会发现这些函数的增减趋势是和之前的模型相符合的，从而我们验证了微分方程模型的准确性，这说明以上函数能够刻画出自行车手骑行时的一些状态量，同时我们借助的函数自变量是时间这一物理量，这样的速度、功率曲线有助于分析自行车该何时控制车速。另外，从下面的图像中我们可以看出，初始阶段、减速阶段的时间和中间阶段的时间相比是比较短的。这里我们需要做一点说明，由于中间阶段的时间长短是由具体赛道决定的，所以在以下绘制图像的过程中，我们选择 t_2 的值是 45，方便后续研究图像的一些直观性质。不同骑手的速度图像如图 2 所示。

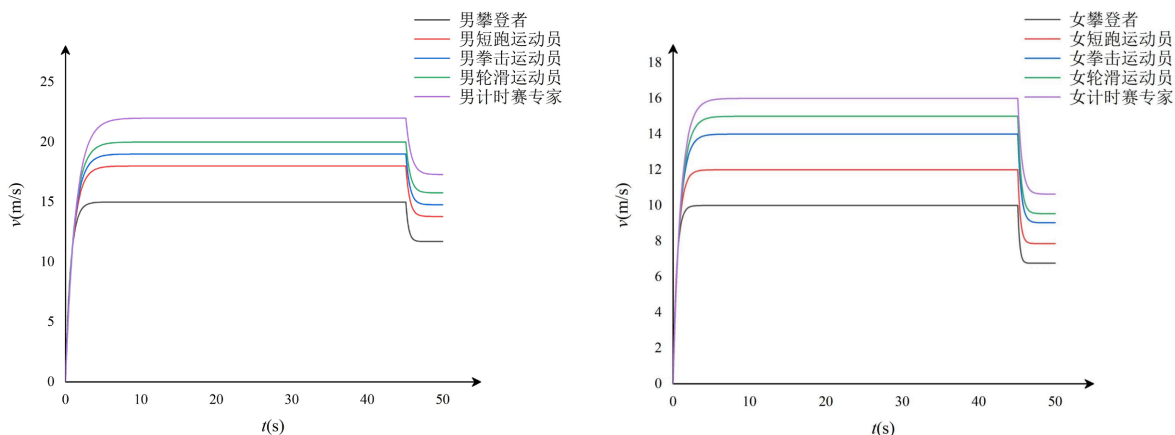


Figure 2. Velocity images of different riders
图 2. 不同骑手的速度图像

根据我们原先的设定，车手在减速阶段耗尽体内能量向前冲刺，考虑到在此阶段没有冲力，所以功率为 0 W，在以下作图的过程中，我们选择略去减速阶段的图像。不同骑手的功率图像如图 3 所示。

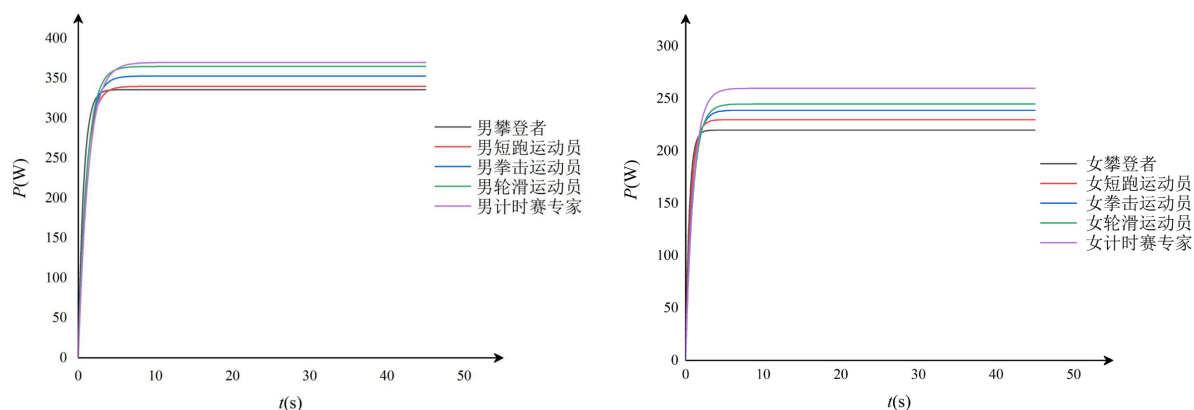


Figure 3. Power images of different riders
图 3. 不同骑手的功率图像

4.4. 模型的应用与实际情况分析

在处理完两条曲线方程之后，我们将模型应用到实际的赛道当中。在引入三个具体情境之前，我们首先对赛道的大致模型作一个抽象解释(如图 4 所示)。

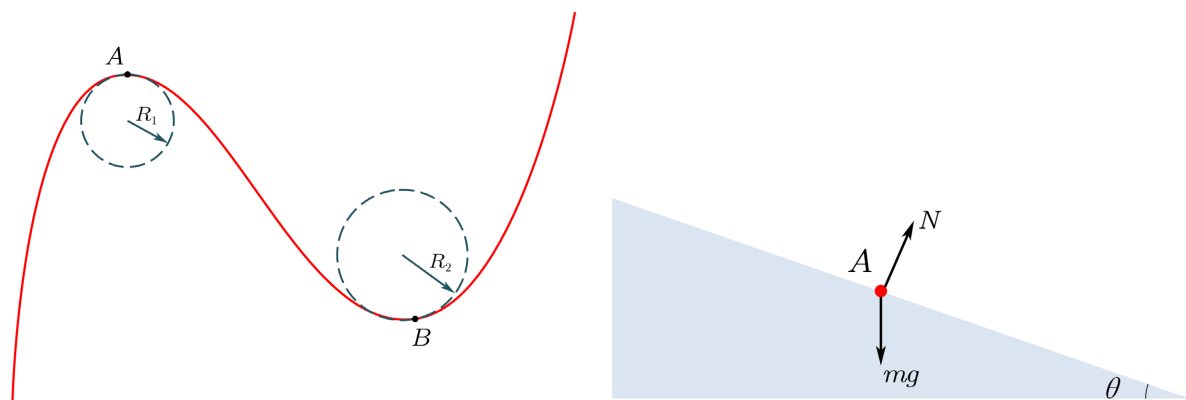


Figure 4. Schematic diagram of the general model and stress analysis of the track
图 4. 赛道的大致模型与受力分析示意图

当即将进入弯道之前，车手一定会进行减速，以确保安全驶入弯道。在通过弯道的过程中，我们假定选手的车速暂时保持不变，以便后续的讨论。考虑到弯道是存在一定的倾斜角的，我们规定其值为 20 度，并且列出方程组进行受力分析，从而待定车手的速度值。于是有

$$\begin{cases} N \cos \theta = (m + M) g \\ N \sin \theta = (m + M) \frac{v^2}{R} \end{cases} \quad (9)$$

其中半径 R 的值是由弯道处的曲率半径决定的。根据第一个式子解出支持力的大小，再代入第二个方程，于是速度可求，结果如表 4 所示。

Table 4. Turning velocity of different types of riders and different genders
表 4. 不同类型、不同性别骑手的弯道速度

骑手类型	男骑手弯道速度	女骑手弯道速度
攀登者	10 m/s	7 m/s
短跑运动员	14 m/s	9 m/s
拳击运动员	15 m/s	11 m/s
轮滑运动员	17 m/s	13 m/s
计时赛专家	19 m/s	15 m/s

为了验证此模型的普遍适用性, 我们接下来计算出当车手需要减速时经历的时间。另外, 考虑到在每个直道上行驶的时间是由具体情况决定的, 所以 $t_2 - t_1$ 的具体取值可以由车手进行控制, 于是我们接下来考虑每一段直道是否可以满足车手的减速时间需要。这时我们根据上面得到的速度 - 时间图像(如图 2 所示)来进一步进行积分运算, 解出减速时滑过的距离为多少, 然后和图上的每一段进行比较。如果图上距离大于减速需求距离, 那么证明模型适用。通过计算, 运动员的减速时滑过的距离如表 5 所示。

Table 5. Deceleration demand distance for different types of riders and different genders
表 5. 不同类型、不同性别骑手的减速需求距离

骑手类型	男骑手	女骑手
攀登者	76 m	68 m
短跑运动员	79 m	72 m
拳击运动员	84 m	75 m
轮滑运动员	87 m	79 m
计时赛专家	93 m	82 m

接下来我们把上述模型应用到各种计时赛课程当中。首先以 2021 年东京奥运会计时赛场地为例(如图 5 所示)。考虑到我们的模型涉及了赛程这个物理量, 而实际比赛场地赛道曲折难以刻画, 所以我们决



Figure 5. Schematic diagram of the time trial track for the Tokyo Olympics in 2021
图 5. 2021 年东京奥运会计时赛场地示意图

定对场地的地图进行插点处理，即在赛道略有转角的位置进行描点，在坐标纸上绘制出大致轨迹，由曲线拟合来进一步计算出任一点与初始点的距离。由于插入的点比较密集，所以两个点之间的欧氏距离可以近似地看成是沿着赛道的距离。

观察上图容易发现，该赛道中间路段比较平直，这适合保持选手在第二阶段的冲力发挥。而对于初始阶段来说，就图上来看，起点距离第一个弯道的赛程远大于起步所需。再从速度图像来看，其能够很快由匀速降至转弯速度值，故符合条件。另外，该赛程的结束阶段呈环状分布，两个环状各有 4 个弯道，我们视中间路段为小幅度偏转，那么运动员可以维持匀速骑行的状态，因此这一部分也符合我们上述建立的数学模型。在此作出一点说明，为了描述赛道的具体走向，我们着重考虑了上面地图中的有大幅度偏转角的几个点位，这是由拟合曲线中一些点的曲率半径决定的。

接下来我们分析了 2021 年 UCI 世界锦标赛计时赛的赛程(如图 6 所示)。与上面一样地，我们对地图作了插点处理(一共 42 个，其中靠近终点的第 19 个点与 30 号点位重合)。根据图上比例尺，我们分别计算出了前半段赛程和结尾处环状路线的赛程，可以看出，前面的赛程与上面是类似的，偏转不大；环状区域我们同样选择了弯道模型进行刻画，均得出了“图上弯道前距离大于减速需求距离”的结论。

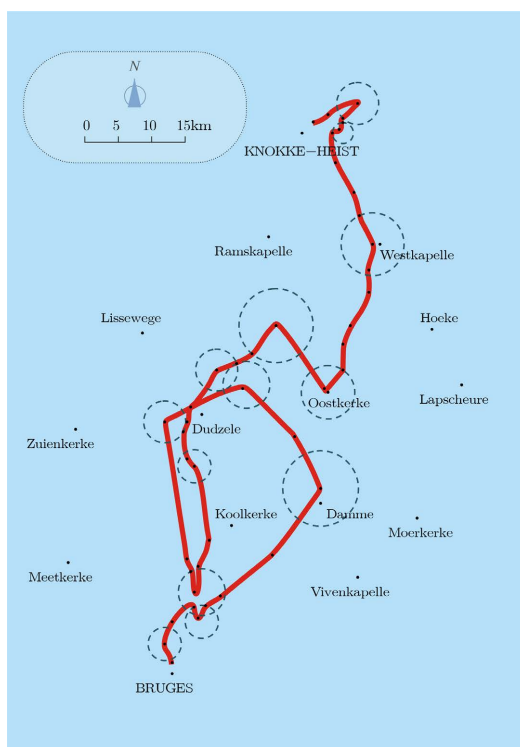


Figure 6. 2021 UCI World Championship time trial route diagram
图 6. 2021 年 UCI 世界锦标赛计时赛路线示意图

最后我们自己设计了一张比赛路线图(如图 7 所示)，赛程大致为环形分布，四周各有一个大幅度转角，其中地图下方有一处不平凡的道路下坡。然后我们对路线进行如下处理：与上面一样地，我们对关键位置进行描点，根据图中标注的各点距离，我们同样对上述两种距离进行了比较。与之前不同的是，在标注“6 km”的志愿点附近，设计了一段直的坡段。于是我们作出这样一个设定：让运动员在坡段进行不耗能的滑行，当然滑行前必须减速，所以我们通过比较志愿点附近的距离得到该坡段适合运动员减速，故我们的模型在此处仍然适用。

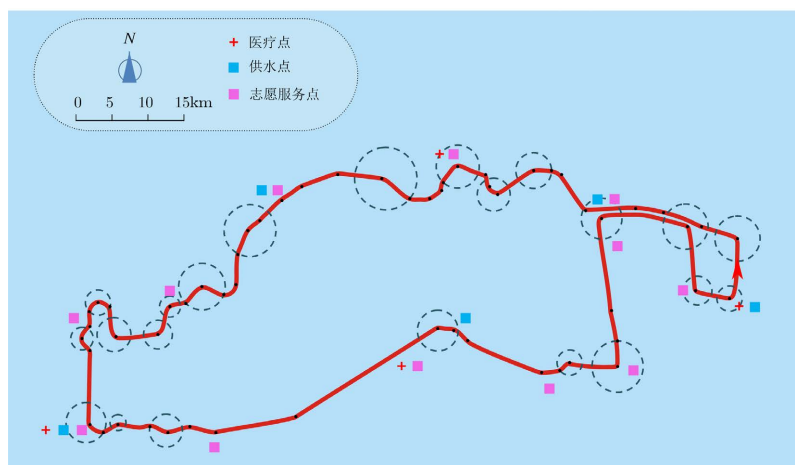


Figure 7. Self-designed race route diagram
图 7. 自行设计的赛程路线示意图

5. 基于天气因素影响的微分方程模型的改进

5.1. 多种潜在因素影响的模型

前文我们设置了风力 R 和速度 v 的比例系数, 考虑到实际问题中风力的干扰使车队中处于前排的运动员会受到阻力的影响。根据以上关系, 我们得到下列方程

$$F = \frac{dv}{dt} + v \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (10)$$

上式是一个一阶线性微分方程 Cauchy 问题, 我们推导出

$$v(t) = \frac{F}{\tau^{-1} + \gamma^{-1}} \left(1 - e^{-t(\tau^{-1} + \gamma^{-1})} \right) \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (11)$$

由此, 我们可以得到中间阶段的函数关系, 即

$$v(t) = \frac{F}{\tau^{-1} + \gamma^{-1}} \left(1 - e^{-t_1(\tau^{-1} + \gamma^{-1})} \right) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (12)$$

对于减速阶段, 我们通过逐个添加影响参数, 对能量 - 时间函数进行求导, 得到骑行速度和车手能量之间的关系, 即

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - v \left[\frac{dv}{dt} + v(\tau^{-1} + \gamma^{-1}) \right] \quad (E(t) \geq 0, t_2 \leq t \leq t_3) \quad (13)$$

进而有

$$v \left[\frac{dv}{dt} + v(\tau^{-1} + \gamma^{-1}) \right] = \sigma \quad (t_2 \leq t \leq t_3) \quad (14)$$

综合上述函数表达式, 就成功刻画了天气等多种潜在的影响。我们发现在这样的条件下得到的函数图像与之前的增减趋势是类似的, 因此, 我们可以在两个比例系数后面增添更多的参数使得模型的刻画更加地符合实际情况。于是对于多种影响因素 $\tau, \gamma, k_1, k_2, \dots, k_n$, 可以得到

$$v(t) = \begin{cases} \frac{F \left(1 - e^{-t(\tau^{-1} + \gamma^{-1} + k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_n^{-1})} \right)}{\tau^{-1} + \gamma^{-1} + k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_n^{-1}}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{F \left(1 - e^{-t_1(\tau^{-1} + \gamma^{-1} + k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_n^{-1})} \right)}{\tau^{-1} + \gamma^{-1} + k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_n^{-1}}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \sqrt{\left[v_1^2 - \sigma(\tau + \gamma + k_1 + k_2 + \dots + k_n) \right]} e^{-\frac{2(t-t_2)}{\tau + \gamma + k_1 + k_2 + \dots + k_n}} + \sigma(\tau + \gamma + k_1 + k_2 + \dots + k_n), & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (15)$$

5.2. 天气和环境等微小差异的影响力分析

这里我们从函数增减性的角度进行有关分析，上述函数对时间进行求导后会发现：在初始阶段，速度函数是单调递增并且上凸的，这说明变化率会越来越小，而且指数上的影响参数并没有起到主导作用；由于第二阶段的速度是定值，所以不做讨论；在减速阶段，通过添加参数，利用导数可知图像单调递减且下凸，因此这些微小差异并没有造成较大的数值变动，即没有显著性影响。

6. 基于实际比赛情况的偏离目标功率分布的敏感度分析

在公路自行车比赛中，我们需要考虑到整条赛道转弯处的夹角是不同的，因此所求解出的 $P-t$ 功率分布与目标功率分布是存在一定差异的。此外，自行车公路计时赛对骑手有氧耐力水平要求较高，计时赛要求骑手在长时间内保持较高的有氧耐力心率。但是调查发现，大多数自行车运动员能够在一小时之内保持在最大心率 94% 的范围之中，同时人体无氧呼吸产生的乳酸不会超过无氧域的要求限制。在整个过程中骑手所消耗的能量是有限制的，也存在攻击性的累积和超过能量曲线极限的限制。假如骑手在比赛的后阶段一直保持自己骑行的最大速度，产生的能量就会越来越多，超出能量曲线的限制，需要额外时间恢复，骑手也会越来越疲惫。因此在实际比赛过程中，骑手后期不可能保持自己的最大速度，骑行功率必定会与目标功率存在差异。

在实际比赛中，很多骑手的实力是旗鼓相当的。为了赢得比赛，骑手们往往会采取一定的比赛策略。例如，计时赛对骑手的转弯技术要求较高。如果转弯太快很容易出现危险，而转弯太慢则会浪费时间。骑手由直道转入弯道之前要进行充分的准备，他们会观察好直道和弯道转换时的地形，会根据弯道的半径大小、坡道的振幅等选择相应的弯道技术。同时他们也会对自己的车位、比赛进程、体力等进行分析，采取最适合自己的方法进行转弯，而转弯最快的方法不一定是最适合骑手的方法。再比如，在计时赛中，骑手们会出现位置并排或十分接近的情况，这个时候骑手们也会采取一些战略。他们会根据赛路特点，再结合自身情况，选择分裂时间，对一些突发情况的临时处理的策略不同也会导致预期分裂时间有所不同。因此，比赛策略的实施，骑手们可能会错过动力目标，即与目标功率分布产生偏移。[4]

7. 基于微分方程模型的团队计时赛最佳能量设计

记骑手体内剩余的能量为 $E(t)$ ，初始条件为 $E(t) = E_0$ ，则

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - f \cdot v \quad (E(t) \geq 0) \quad (16)$$

上文中已经推导出了有关第一阶段的表达式：

$$v(t) = F \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (17)$$

再联立式子 $F = f$ ，可得到下式：

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - F^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (18)$$

在初始条件下由运动员赛前已贮存的能量和体内代谢产生的能量，我们可以得到第一阶段的能量表示：

$$E(t) = E_0 - (F^2 \tau - \sigma)t + F^2 \tau^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (19)$$

我们可以根据图像得到，第一阶段的能量呈上升趋势。

记骑手的冲力随时间变化的函数为 $f(t)$ ，上文已经给出了牛顿第二定律表达式

$$f(t) - \frac{v}{\tau} = m \frac{dv}{dt} \quad (0 \leq f(t) \leq F) \quad (20)$$

以及体内贮存的能量的变化率

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - fv \quad (E(t) \geq 0) \quad (21)$$

再结合初始条件可以得到第二阶段的体内能量表示：

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{v^2(t)}{2} - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(t) dt \quad (22)$$

可见第二阶段的能量呈现下降趋势。第三阶段的能量变为 0，车手依靠惯性进行冲刺。

基于上述分析和模型建立，在比赛过程中车手体内能量曲线可以用下图 8 表示。

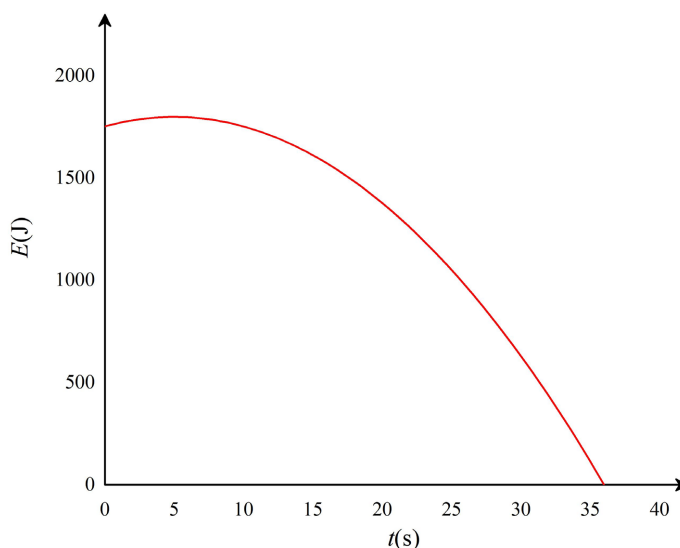


Figure 8. The energy curve of different riders
图 8. 车手体内能量曲线

对于团队六名骑手的总能量的刻画，我们可以通过对第四名骑手能量的研究，从而研究团队能量。骑手以最大冲力在短时间内获得尽可能高的速度之后，会有很长一段时间保持匀速状态进行骑行。所谓最佳能量设计，其实就是能量分配得最合适。匀速骑行的时间越长，即 $t_2 - t_1$ 差值最大，能量分配得最合

适, 能量是最佳的。其中的原因是选手在中间阶段可以通过位置的轮换以减小空气阻力等诸多因素对车队的每个车手的干扰, 因此我们可以近似地看成在匀速阶段, 6 位选手总行驶距离相差不大, 如果在这一阶段的时间差值大, 则说明在该阶段的能量利用率高。[5]

8. 模型分析

模型的优点有: 我们所建立的微分方程模型几乎适用于任何计时赛和任何类型骑手; 该模型具有较好的通用性和可扩展性。如果需要考虑其他因素的影响, 可以对微分方程进行修改, 对模型进行升级。例如本文添加了多种影响因素 $\tau, \gamma, k_1, k_2, \dots, k_n$ 进行拓展; 并且在讨论具体赛道时, 我们对地图上的路线进行插值处理, 较为精确地描绘了赛程的轨迹。

模型的缺点有: 对于团队计时赛骑手的能量, 我们考虑了较为理想的情况; 在考虑能耗的主要影响因素的时候, 我们最终去除了运动员某些自身的因素(如去脂体重等等), 这些对后续函数图像会产生小幅度波动的影响。

9. 总结

我们定义出了五种类型骑手的功率配置, 确定出了骑手在赛道上的位置和骑手的功率之间的关系。因此我们得到结论: 天气条件对我们建立的模型是有一定影响的, 骑手在比赛的后阶段不可能一直保持自己骑行的最大速度, 所求解出的骑手 $P-t$ 功率分布与目标功率分布是存在一定差异的。匀速骑行的时间越长, 即 $t_2 - t_1$ 差值最大, 能量分配得最合适, 能量是最佳的。

参考文献

- [1] 刘春辉, 盛蕾, 汤强. 自行车不同骑速能量消耗特征研究[J]. 南京体育学院学报(自然科学版), 2012, 11(2): 1-3. <https://doi.org/10.15877/j.cnki.nsin.2012.02.013>
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [3] 衣春林, 李美贞. 赛跑最优速度的数学模型与应用[J]. 山东工商学院学报, 2003(3): 108-112.
- [4] 李洪伟. 浅析自行车公路计时赛项目的技术特点[J]. 产业与科技论坛, 2019, 18(3): 69-70.
- [5] Mike (2019) Male to Female, What's the Power Difference on the Bike. *Journal of Sport and Health*, **13**, 160-162.

附录

比例系数计算部分代码(以“攀登者”为例):

```
clear
y=inline('22.4*x*(1-exp(-18/x))-15','x');
[x0,yx]=fzero(y,1,[]);
disp("")
disp([blanks(7),'x0',blanks(9),'yx'])
disp([x0,yx])
result:
          x0          yx
0.6696          0
```

```
clear
y=inline('22*x*(1-exp(-18/x))-10','x');
[x0,yx]=fzero(y,1,[]);
disp("")
disp([blanks(7),'x0',blanks(9),'yx'])
disp([x0,yx])
result:
          x0          yx
0.4545          0
```