

基于变分正则化的乘性噪声图像去噪综述

申梦婷, 唐利明*

湖北民族大学, 湖北 恩施

收稿日期: 2022年8月21日; 录用日期: 2022年9月15日; 发布日期: 2022年9月26日

摘要

为研究变分正则化乘性噪声去除的发展及现状, 本文首先根据保真项的不同特征将模型分为方差 - 均值、最大后验概率、I-散度及混合保真项乘性噪声去噪模型。其次分别对此进行了详细介绍并从保真项及正则项的角度出发对模型进行了总结。接着通过实验对不同类型的保真项模型的效果进行直观展示, 并给出恢复图像的峰值信噪比值及实验运行时间。最后提出了自适应参数的设定、求解速度的改善、图像的分解去噪、特定图像去噪等几个方面关于乘性噪声去除未来发展的趋向和展望。

关键词

图像去噪, 乘性噪声, 变分正则化, 最大后验概率, 峰值信噪比

Based on Variational Regularization of the Multiplicative Noise Image Denoising Review

Mengting Shen, Liming Tang*

Hubei Minzu University, Enshi Hubei

Received: Aug. 21st, 2022; accepted: Sep. 15th, 2022; published: Sep. 26th, 2022

Abstract

In order to study the development and current situation of variational regularization multiplicative noise removal, this paper first divides the models into variance mean, maximum a posteriori estimate, I-divergence, and hybrid fidelity multiplicative noise removal models according to the different characteristics of fidelity terms. Then it introduces them in detail and summarizes the

*通讯作者。

models from the perspective of fidelity terms and regularization terms. Then through experiments the effect of model fidelity term for different types of visual presentation, and restore the image peak signal-to-noise ratio value and test running time. Finally, the trend and prospect of multiplicative noise removal in the future are put forward, such as the setting of adaptive parameters, the improvement of solution speed, image decomposition denoising and specific image denoising.

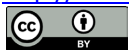
Keywords

Image Denoising, Multiplicative Noise, Variational Regularizational, Maximum a Posteriori Estimate, Peak Signal to Noise Ratio

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着信息科学技术的发展,高级数字图像处理广泛应用于遥感、医学等诸多领域,进而引发了学者们对数字图像处理技术的研究。系统完整的图像处理技术,需要考虑到图像从获取、传输、输出等各个环节,而在这多个环节中通常会不可避免地会对图像产生干扰,进而破坏图像信息,因此就产生了一种处理图像干扰的技术——图像去噪。在图像去噪的研究中,将这种对图像原有信息产生破坏的干扰称为噪声,图像去噪的目的就是最大程度地从观测图像(含噪声图像)中得到清晰的恢复图像。本文所综述的乘性噪声通常存在于雷达孔径图像、核磁共振图像、超声图像中,并与图像的信号强度有关,对后续研究产生重要影响,因此乘性噪声的去除尤为重要。

在图像去噪的过程中首先需要对噪声进行分类,一般地,根据噪声来源以及噪声与信号之间的关系,我们可将噪声分为加性噪声和乘性噪声。其中乘性噪声与图像信号强度呈现相关关系,并随着图像信号的变化而变化。对于含乘性噪声的图像,可表示为式(1):

$$f = un \quad (1)$$

其中 f 表示观测图像, u 表示原图像, n 表示噪声。

目前针对乘性噪声的去除方法大致可以分为四类。基于滤波器的方法[1] [2]、基于偏微方程的方法[3] [4] [5]、基于网络的方法[6] [7] [8]以及本文所综述的基于变分正则化的方法。综合比较这四类方法,基于滤波的算法考虑了部分图像及噪声的数学信息,具有一定的理论基础,相对用时较短,但得到的恢复图像质量相对较低。基于深度学习的方法相较基于滤波的方法缺少理论基础可解释性差,但在实验结果上有优越性。基于变分正则化的图像去噪方法,相比基于滤波器的方法考虑了更多的图像结构及噪声信息,可以更加准确地恢复图像,相比深度学习的方法有较强的理论性及可解释性,能够被大众广泛理解接受。变分正则化图像去噪方法通常是关于建立相应的包含图像保真项以及正则项的能量泛函,再通过变分原理[9]、偏微分等算法进行求解,最终得到极小化后的图像。

2003年 Rudin 等人提出了第一个变分正则化乘性噪声去除模型 RLO [10],在模型中假定图像的噪声服从均值为 1,方差为 σ^2 的高斯分布建立保真项,利用梯度投影法进行求解,数值算法复杂度高。2008年 Aubert 等人提出了 AA 模型[11],模型假设图像中的噪声服从均值为 1,方差为 σ^2 的伽马分布并利用最大后验概率得到保真项,但由于保真项非凸,故存在求解难度大且对初始值敏感等问题。Shi 等人提出

的 SO 模型[12]通过对式(1)进行对数变换将乘性去噪问题转化为加性去噪问题,有效解决了 AA 模型非凸且对初始值敏感的问题,但对数变换会在求解过程中产生误差从而造成恢复图像的质量不高的不良结果。Huang 等人提出了 HNW 模型[13],该模型在 SO 模型的基础上加入一个拟合保真项对经对数变换而产生的图像误差进行修正,一定程度上解决了图像因对数变换而产生的相对误差。与上述方法不同,Dong 等人在 AA 模型的基础上引入基于噪声统计性质的二次罚参数项提出了 DZ 模型[14],解决了 AA 模型非凸难以求解的问题;除此之外,还有 Steidl 等人提出的 I-div 模型[15]等将会在文章的第二节进行详细介绍。

本文将从保真项的角度出发,对基于变分正则化的乘性噪声去噪模型进行综述。本文的剩余组织如下为:第二节将根据模型保真项的类型对乘性噪声去噪模型进行重点介绍及总结;第三节根据保真项的类型通过实验对模型的效果进行直观展示;第四节综合前几个部分的内容对乘性噪声趋向去噪提出一些自己的看法,以及对未来此方向的发展进行展望。

2. 乘性噪声去噪模型及总结

基于变分正则化的乘性噪声去噪模型一般由保真项和正则项两部分组成,根据保真项或正则项的不同可将模型进行分类。在本文中依据模型保真项的不同对乘性噪声去噪模型进行分类。将变分正则化乘性噪声去噪模型分为方差-均值模型、基于 MAP 模型、散度模型及混合模型四类模型,并在本节进行详细介绍。

2.1. 方差 - 均值模型

2003 年 Rudin 等人提出了变分正则化去除乘性噪声的 RLO 模型[10],该模型假定图像中所含乘性噪声的概率分布服从均值为 1,方差为 σ^2 的高斯分布即:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} - 1 \right) dx = 0 \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} - 1 \right)^2 dx = \sigma^2 \quad (3)$$

其中 f 表示观测图像(噪声图像), u 表示原图像(清晰图像),式(3)为均值约束条件,式(4)为方差约束条件,根据这两个条件建立模型的保真项,正则项使用全变分(TV)正则项,其模型可表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \lambda_1 \int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} - 1 \right) dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} - 1 \right)^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (4)$$

其中 λ_1 、 λ_2 为模型的正则化参数。使用梯度投影法[16]对模型能量泛函进行极小化,从而实现乘性高斯噪声的去除。

RLO 模型的提出对变分正则化去除乘性噪声的研究起着重要作用,为后续模型建立提供思路,但就模型本身而言也存在一些不足。从模型正则项的角度分析,TV 正则项虽然保护图像边缘,但是会产生严重的阶梯效应,以及会有角点模糊的现象出现。在模型的求解过程中由于模型本身的非凸性,虽然在文章中作者对解的存在性及唯一性做了相关证明,但由于其非凸所带来的对初始值敏感及收敛速度慢的情况仍然存在。从模型的实验结果上分析,RLO 模型在噪声水平较大时去噪效果不太理想。针对 RLO 模型产生的这些问题,后续研究基于保真项或正则项做了相应改进并得到了相对好的实验结果。

2.2. 基于 MAP 模型及总结

对于 RLO 模型保真项存在的相关问题,诸多学者通过研究发现可以利用最大后验概率(MAP)推断的

方法解决。MAP 是充分利用先验信息对后验进行极大似然估计得到的结果, 该结果为设计复杂可解释的正则化项提供直观方法[17]。因此诸多学者在 MAP 框架下推理得到变分正则化去除乘性噪声模型的保真项, 但因为直接利用噪声概率分布所得保真项的非凸性, 所以基于 MAP 的保真项不大相同。本文根据 MAP 以及改变模型凸性变换所用的方法, 将基于 MAP 的模型分为 MAP 模型、MAP-对数变换模型及 MAP-根次松弛模型三类, 并分别对其进行详细阐述。

2.2.1. MAP 模型

Aubert 等人在 2008 年提出了 AA 模型[11], 该模型是在 MAP 框架下得到的乘性噪声去噪模型。AA 模型保真项假设噪声服从伽马分布, 相比 RLO 模型更适用于受乘性噪声污染的图像, 正则项与 RLO 模型一致。由于后续大多数模型基于 AA 模型进行改进, 故对 AA 模型的保真项的确立进行详细介绍。

首先在建立保真项时, AA 模型做了一些假定, 假定 F 、 U 、 N 、 S 分别观测图像集合、原图像集合、噪声集合、像素集合, 假定 f 、 u 、 n 、 s 是 F 、 U 、 N 、 S 中的随机变量, 恢复图像 U 遵循 Gibbs 先验, 概率密度函数为噪声为:

$$g_u(u) = \frac{1}{Z} e^{-\gamma\phi(u)} \quad (5)$$

Z 为常数, $\phi(u)$ 是非负函数, 噪声为均值为 1, 方差为 σ^2 的伽马噪声, 图像是 L 种不同图像的总和, 则噪声 n 的概率密度 $g_n(n)$ 函数可以表示为:

$$g_n(n) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} n^{L-1} e^{-Ln} \quad (6)$$

根据去噪原理, 从观测图像中依据噪声先验最大可能地恢复原图像即

$$\text{MAX } P(U|F) \quad (7)$$

进一步使用贝叶斯公式则可以变换式(8)为

$$\text{MAX } P(U|F) = \frac{P(F|U)P(U)}{P(F)} \quad (8)$$

而通过模型的假设可以得到 $P(F|U)$ 与 $g_{F|U}$ 的关系为:

$$g_n\left(\frac{f}{u}\right) \frac{1}{u} = g_{F|U}\left(\frac{f}{u}\right) \quad (9)$$

将式(6)代入可得:

$$g_{F|U}\left(\frac{f}{u}\right) = \frac{1}{u} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \left(\frac{f}{u}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lf}{u}} = \frac{L^L}{u^L \Gamma(L)} f^{L-1} e^{-\frac{f}{u}} \quad (10)$$

根据式(6)~(11)对式(8)进行求解, 化简可得:

$$-\log P(U|F) = -\log P(F|U) + \log P(U) - \log P(F) \quad (11)$$

代入相应的概率密度函数即:

$$P(U|F) = L \left(\log P(U) + \frac{F}{U} \right) + \gamma\phi(U) \quad (12)$$

至此就可得到模型的保真项为 $\int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right) dx dy$, 这一项由噪声的概率密度分布决定, 不同的概率

密度分布就会有不同的保真项。

在保真项的基础上添加 TV 正则项为 AA 模型即:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right) dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (13)$$

其中 λ 为正则化参数。不难发现, AA 模型是一个非凸的模型, 但作者在文献[11]中对模型解的存在性和唯一性进行了证明。在模型的求解过程中, 作者先使用变分法写出模型能量泛函的欧拉-拉格朗日方程, 接着使用梯度下降法求极小化后的能量泛函, 最终得到去噪后的恢复图像。AA 模型可解释性以及直观性的建模方式, 为基于模型的乘性噪声去除开拓了新的道路, 但客观分析, AA 模型也存在些许不足。从保真项的角度分析, AA 模型假定噪声分布并使用 MAP 推导的方法对乘性噪声的去除有更好的效果。然而模型却是非凸的, 尽管其作者对模型解的存在性和唯一性做出了相关证明, 但在实验的过程中模型存在对初始参数敏感和收敛速度慢等问题。从正则项的角度分析, AA 模型与 RLO 模型相同都会产生严重的阶梯效应。

综合 RLO 及 AA 模型保真项建立的特点, Shi 等人提出了乘性去噪模型保真项的一般形式[12], 可表示为:

$$\int_{\Omega} \left(a \frac{f}{u} + \frac{b}{2} \left(\frac{f}{u} \right)^2 + c \log u \right) dx dy \quad (14)$$

Xu 等人利用式(14)作为保真项提出了 Xu 模型[18], 正则项使用二阶的总广义变分(TGV), 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(a \frac{f}{u} + \frac{b}{2} \left(\frac{f}{u} \right)^2 + c \log u \right) dx dy + TGV_{\alpha}^2(u) \right\} \quad (15)$$

其中 $TGV_{\alpha}^2(u) = \lambda_1 \int_{\Omega} |\nabla u - \mathbf{p}| dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{p}) dx dy$, 也可表示为: $TGV_{\alpha}^2(u) = \min_{\mathbf{p}} \lambda_1 \|\nabla u - \mathbf{p}\|_1 + \lambda_2 \|\varepsilon(\mathbf{p})\|_1$, a 、 b 、 c 都为常数, \mathbf{p} 是有界变形矢量场空间中的一个向量, 表示一阶梯度 ∇u 的近似值, $\varepsilon(\mathbf{p})$ 表示对称张量, 定义为 $\varepsilon(\mathbf{p}) = (\nabla \mathbf{p} + \nabla \mathbf{p}^T) / 2$ 。在模型的求解过程中作者先将模型改写为分裂-布雷格曼(Split-Bregman)迭代格式, 然后采用交替迭代优化方法进行求解, 并在求解子问题时应用了快速傅里叶变换、广义软阈值公式、梯度下降法。从保真项方面分析, 基于最大后验概率建立的 Xu 模型, 保证了建模的准确性。在模型求解过程中使用分裂-布雷格曼的迭代格式使得模型更易求解, 收敛速度加快。从正则项角度分析, 二阶 TGV 可以很大程度改善 TV 正则项产生的阶梯效应及角点模糊的情况, 恢复图像有更好的质量, 但较 TV 正则项相比二阶 TGV 具有更高的时间复杂度。

相比 Xu 模型使用二阶 TGV 缓解 TV 正则项产生的阶梯效应, Xu 等人发现变分全曲率正则项也可以实现这一目标, 因此提出了 TC 模型[19], 模型保真项与 Xu 模型相同, 正则项为变分全曲率, 模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(a \frac{f}{u} + \frac{b}{2} \left(\frac{f}{u} \right)^2 + c \log u \right) dx dy + \int_{\Omega} \varphi \left(\left| \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right| \right) dx dy \right\} \quad (16)$$

其中 $\nabla \cdot (\nabla u / |\nabla u|)$ 为曲率, a 、 b 、 c 都为常数。通过引入辅助变量、拉格朗日乘子、交替优化方法及增广拉格朗日的方法对模型进行求解, 并在求解每一个子问题时运用快速傅里叶变换、广义软阈值公式、投影法及梯度下降法等方法。TC 模型保真项作用同 Xu 模型相同, 全曲率正则项可使模型在消除阶梯效应方面有更好的效果, 并保持图像的平滑度, 另一方面二阶曲率正则项可以缓解模型因保真项对数变换产

生的图像对比度损失。

2.2.2. MAP-对数模型

Shi 等人发现对图像进行对数变换之后, 图像边缘和角点都没有损失, 因此可对图像进行对数变换解决保真项非凸的问题。基于此提出了两种对数变换的凸保真项, 一种是对式(14)中的 u 进行 $z = \log u$ 的对数变换即:

$$\int_{\Omega} \left(afe^{-z} + \frac{b}{2} f^2 e^{-2z} + (a+b)z \right) dx dy \quad (17)$$

一种是先对乘性噪声乘性结构对数域变换, 即将式(1)变为:

$$\log f = \log u + \log n \quad (18)$$

使乘性噪声去除问题转换为加性噪声去除问题, 再在 MAP 框架下推断得到保真项, 可表示为:

$$\int_{\Omega} \left(u + e^{f-u} \right) dx dy \quad (19)$$

这两种保真项都在乘性噪声去除问题的研究中起着重要的作用。这一节将依次介绍利用式(17)作为保真项的 SO [12]、HNW [13] 和 NLTV [20] 模型, 以及利用式(19)作为保真项的 HAN [21] 和 MTGV [22] 模型, 并简要阐述这些模型的优缺点。

SO 模型[12]的保真项是基于其提出的一般性乘性噪声去噪模型进行对数变换得到的, 正则项使用 TV 正则项, 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_z \left\{ \lambda \int_{\Omega} \left(afe^{-z} + \frac{b}{2} f^2 e^{-2z} + (a+b)z \right) dx dy + \int_{\Omega} |\nabla z| dx dy \right\} \quad (20)$$

其中 λ 为正则化参数, $z = \log u$ 。作者将该模型推广至非线性逆尺度空间流和与之对应的松弛逆尺度空间流进行求解得到恢复后的图像。综合考虑, SO 模型改进 AA 模型的凸性, 使得模型更易于求解, 但忽略了对数变换是非线性变换会产生对比度损失, 即图像中灰度值低区域将被拓展, 灰度值高的区域将被压缩, 最终造成去噪后图像质量不高的后果。

针对 SO 模型对数变换后产生的对比度损失问题, Huang 等人在 2009 年提出了 HNW 模型[13]。该模型的保真项的推导同 AA 模型大致相同, 都是假定乘性噪声分布服从伽马分布, 在同 AA 模型一样求得保真项之后并没有直接取此保真项, 而是令其保真项中 $z = \log u$, 变换后的保真项如下:

$$\int_{\Omega} \left(z + fe^{-z} \right) dx dy \quad (21)$$

在此模型中使用两个保真项, 提出了一个无约束的 TV 去噪模型, 可表示成如下形式:

$$\min_{z,w} \left\{ \int_{\Omega} \left(z + fe^{-z} \right) dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} (z-w)^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} |\nabla w| dx dy \right\} \quad (22)$$

其中 λ_1 是权衡通过 $\int_{\Omega} (z + ge^{-z}) dx dy$ 最大似然估计获得的图像与去噪后对数域图像的参数, λ_2 为正则化参数, w 为去噪后的对数域图像。作者使用交替极小化算法求能量泛函的极小化, 并在子问题的求解中采用 Chambolle 投影法[23]。从模型保真项分析, HNW 模型加入调和保真项用于调节通过对数变换所带来的误差, 在实验结果上相比于 SO 模型有更好的效果。但从正则项的角度上分析, 该模型并没有改变全变分正则项所带来的阶梯效应。

对于 SO 和 HNW 模型在恢复图像中产生的阶梯效应, chen 等人提出了 NLTV 模型[20]。NLTV 模型的保真项沿用了 SO 模型, 正则项的选择上使用非局部全变分, 故模型的表达式如下:

$$\min_z \left\{ \lambda \int_{\Omega} \left(afe^{-z} + \frac{b}{2} f^2 e^{-2z} + (a+b)z \right) dx dy + \int_{\Omega} |\nabla_{NL} Z| dx dy \right\} \quad (23)$$

其中 λ 为正则化参数, $z = \log u$, $\nabla_{NL} Z$ 为模型中所定义的非局部全变分。在模型求解的过程中使用 Bregman 迭代对其进行优化求得能量泛函的极小值。NLTV 模型的非局部全变分正则项在一定程度上减少了 TV 正则化带来的阶梯效应, 削减角点模糊的现象, 但非局部全变分是基于图像中相似块的, 这在一定程度上会使模型的求解速度减慢。

同样是基于 MAP 与对数变换, HAN 模型和 MTGV 模型使用与上述不同的保真项。2013 年 Han 等人引入非凸稀疏的正则化子提出了 HAN 模型[21]。保真项使用式(18), 正则项由 $\psi(s) = \beta s / (1 + \beta s)$ 函数生成, 可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u + e^{f-u}) dx dy + \lambda \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|) dx dy \right\} \quad (24)$$

其中 λ 为正则化参数。由于该模型是非凸的, 所以作者在求解时引入增广拉格朗日乘子法和迭代重加权法将原始非凸问题转换为若干个凸子问题进行求解。从保真项的角度出发, HAN 模型使用先对数变换再 MAP 推断的方法, 改变了 AA 模型保真项非凸的问题, 但没有考虑到对数变换是非线性变换, 会对图像的对比度产生严重影响。从正则化的角度分析, HAN 使用非凸正则化更加符合图像边缘和纹理的特点, 因此保留边缘和纹理细节, 并能很好地抑制阶梯效应的产生。

Lv 等人在 2020 年提出的 MTGV 模型[22]与 HAN 保真项相同, 引入总广义变分的二阶 TGV 的 $TGV_{\alpha}^2(u)$ 作为正则项, 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u + e^{f-u}) dx dy + \lambda TGV_{\alpha}^2(u) \right\} \quad (25)$$

其中为 λ 正则化参数, $TGV_{\alpha}^2(u)$ 与 Xu 模型中二阶 TGV 是相同的定义。在模型求解时, 作者通过对模型的正则化项进行对偶表示, 进而将原始问题转化为一个极大极小值问题, 最终利用原始对偶算法[24]进行求解得到极小化后的能量泛函。MTGV 保真项的作用与 HAN 模型相同。在正则项方面相比 HAN 的非凸正则项, MTGV 求解的复杂度较低, 且正则项的凸性使得解的收敛速度更快。

2.2.3. MAP-根次松弛

通过 m 次根松弛 AA 变分模型的 m-V 模型[25]是由 Yun 等人在 2012 年提出的模型, 该模型对 AA 模型的保真项使用 m 次根变换进行松弛, 其正则项仍采用 TV 正则项, 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_{u^*} \left\{ \int_{\Omega} \left(m \log u + \frac{f}{u^{-m}} \right) dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (26)$$

$$u = (u^*)^m \quad (27)$$

其中 m 表示进行根次松弛的根次数且必须为整数, λ 为正则化参数, 式(26)极小化得到的并不是恢复的原图像, 而是恢复图像进行 m 次开方得到的, 因此必须经过式(27)再进行计算, 进而得到恢复图像。在求解该模型时, 作者采用线性近端交替极小化算法[26]。从模型的保真项分析, m-V 模型通过 m 次根松弛 AA 变分模型, 改变 AA 模型保真项的非凸性, 但 m-V 模型要求 m 的值足够大才能使模型满足凸性。从模型的正则项分析, m-V 模型使用全变分会产生阶梯效应等一系列问题。值得注意的是 m-V 模型采用近端交替最小化算法, 每个分量的并行计算, 求解速度上较快, 未来可应用于大型图像的乘性噪声去除问题。

2.3. I-散度模型及总结

与上述使用各种变换改变模型凸性的出发点相同, Steidl 等人用理论和实验证明去除泊松噪声的保真项的 I-散度(Boltzmann-Shannon 熵的 Bregman 距离)也是可以作为乘性噪声的去噪的保真项, 且 I-散度本身就具有凸性。因此 Steidl 等人提出了 I-div 模型[15]。该模型将 I-divergence 作为保真项, 使用 TV 半范数形式作为模型正则项。模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u - f \log u) dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (28)$$

其中 λ 为正则化参数。首先使用 Douglas-Rachford 分裂方法[27]将能量泛函分解, 然后再运用交替方向乘子法(ADMM)对分解后的能量泛函分别求解。模型使用 I-散度作为保真项的建模方式虽然在理论上解释性欠佳, 但是实验结果表明其可以有效对乘性噪声进行去除。在这一点上可以理解为 I-散度是基于泊松分布建立的乘性噪声保真项, 其在概率密度分布图像上与伽马分布有相似性, 因此保真项使用它也是可行的。另一方面虽然这种保真项的设置使得模型建模的准确性下降, 但却可以避免 MAP 保真项非凸带来的问题, 且不需要考虑经历各种变换之后模型带来的对比度损失及误差。从正则项角度分析, TV 正则项与之前模型产生的后果一样, 在这里不多做赘述。

为解决 TV 正则项在恢复图像中产生的不良效果, Li 等人引入基于小波框架和基于 TV 正则化的两个非凸正则项, 在 2019 年提出了 Li 模型[28]。Li 模型的保真项与 I-div 模型相同, 正则项由基于 TV 的正则化和基于小波框架的正则化项构成, 该模型可以表示成如下离散形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u - f \log u) dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1((Wu)_i) dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} \varphi_2(\|\nabla_i u\|) \right\} \quad (29)$$

其中 λ_1 、 λ_2 为正则化参数, φ_1 、 φ_2 是非凸函数, $\sum_{i=1}^{n_1} \varphi_1((Wu)_i)$ 、 $\sum_{i=1}^{n_2} \varphi_2(\|\nabla_i u\|)$ 是两个非凸正则化器, φ_1 、 φ_2 的具体形式在文献[27]中有详细介绍。虽然提出的两个正则化器都是非凸的, 但在文中作者证明, 证明其在一定条件下是收敛的, 且模型的解唯一存在。在模型求解的过程中使用交替极小化方法进行迭代。

Li 模型使用基于 TV 的正则项和基于小波框架的正则项, 两个正则项的稀疏性使得模型在去噪的同时能更好地保持图像边缘和纹理, 在求解过程中虽然正则项是非凸的, 但在可行域的条件下通过交替极小化方法求解时, 模型的子问题显现出严格凸的性质, 进而可以得到模型的最优解。

2.4. 混合模型及总结

事实上改变凸性的方法, 并非必须进行变换, 通过增加二次项的方式也是可以实现的, 如 DZ、TGV、HHTV 模型的保真项。Dong 等人提出了 DZ 模型[14], 该模型在 AA 模型的基础上引入二次惩罚项, 通过对模型的两项拟合项进行二阶求导, 得到模型保真项严格凸的条件是罚参数 $\alpha \geq 2\sqrt{6}/9$, 进而基于对罚参数的控制, 建立了一个凸乘性噪声去噪模型, 该模型可表示如下:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right) dx dy + \alpha \int_{\Omega} \left(\sqrt{\frac{u}{f}} - 1 \right)^2 dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (30)$$

其中 α 表示罚参数, λ 是正则化参数。在求解该模型的过程中, 作者使用求解非光滑凸优化问题的原始对偶算法, 最终得到了模型的最优解。DZ 模型增加一个带罚参数的保真项, 通过调整罚参数的值用增加的保真项的凸性掩盖 MAP 保真项的非凸性, 最终使得保真项整体表现为凸性。相比基于 MAP-对数变换保真项模型, 解决了因对数变换去除乘性噪声最后做指数变换得到恢复图像的误差, 在一定程度上降低了原有对数变换模型的不准确性。在正则项上使用 TV 正则项, 使得恢复图像效果不佳, 为了改变这一缺

点, Shama 等人提出了 TGV 模型[29], Tran 等人提出了 HHTV 模型[30]。

Shama 等人将正则项变为总广义变分的二阶 TGV ($TGV_{\alpha}^2(u)$)提出的 TGV 模型[29]是对 DZ 去噪模型的改进, 保真项与 DZ 模型保真项相同, 正则项引入全广义变分, 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right) dx dy + \alpha \int_{\Omega} \left(\sqrt{\frac{u}{f}} - 1 \right)^2 dx dy + TGV_{\alpha}^2(u) \right\} \quad (31)$$

其中 α 表示罚参数, $TGV_{\alpha}^2(u)$ 与 Xu 模型的定义相同。在求解该模型时考虑到求解速度、收敛速度及模型的非光滑性和凸性, 选择了原始对偶算法对模型求解。TV 正则化所在的空间是全变差(BV)空间, 因此模型的解是分段常数, 会使图像产生严重的阶梯效应, 相比而言二阶 TGV 假设图像是分段多项式函数, 这更加拟合于图像的特点, 能够很好地缓解阶梯效应。

与 DZ、TGV 正则项模型不同, Tran 等人引入混合正则项提出 HHTV 模型[30]。HHTV 模型的保真项为 DZ 模型中的混合保真项, 正则项由全变分 TV 正则项和二阶 TV 正则项共同组成, 该模型可表示为:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \left(\log u + \frac{f}{u} \right) dx dy + \alpha \int_{\Omega} \left(\sqrt{\frac{f}{u}} - 1 \right)^2 dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} |\nabla^2 u| dx dy \right\} \quad (32)$$

其中 α 表示罚参数, λ_1 、 λ_2 为正则化参数。在模型的求解过程中作者使用交替方向算法, 并使用快速傅里叶变换、广义收缩公式及牛顿法求解子问题。在保真项方面该模型与 DZ、TGV 模型一致, 都是用罚参数改变保真项的凸性, 要求必须给定罚参数条件。在正则项方面 HHTV 模型为了改进 DZ 模型所产生的阶梯效应, 引入二阶 TV, 这样的结合使得模型在保护边缘的同时又能缓解阶梯效应。

除上述混合保真项模型以外, Bai 在 2019 年融入罚函数的思想提出了 DCA 模型[31]。该模型的保真项运用原有 I-散度结合方差作为原始图像与观测图像的新距离度量, 因此定义了一种类似于罚函数的保真项, 正则项为总广义变分的二阶变分 $TGV_{\alpha}^2(u)$, 该模型可以表示成如下形式:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u - f \log u) dx dy - \alpha \int_{\Omega} \left(\sqrt{\frac{u}{f}} - 1 \right)^2 dx dy + TGV_{\alpha}^2(u) \right\} \quad (33)$$

其中第一项为 I-散度量项, 第二项为方差度量项, α 表示罚参数, $TGV_{\alpha}^2(u)$ 与 TGV 模型中定义相同。在模型的求解过程中使用凸函数差分算法[32]处理提出的非凸变分问题。从保真项分析, DCA 模型的保真项是非凸的, 增加了模型求解的复杂度。从正则项的角度, TGV 正则项假设图像由分段多项式函数组成, 与其他全变分的模型相比可以保持尖锐的边缘, 并有限缓解去噪过程中产生的阶梯效应, 尤其是针对区域较为平滑的图像, 去噪效果更加明显。

3. 数值实验

为了更加直观地感知乘性噪声保真项选取的重要作用, 在这一节中对本文中提到的 TV 作为正则项的模型进行实验展示。实验选取 camera、woman 两幅图像, 设置伽马噪声水平为 $K = 10$ 、 $K = 20$, 算法停止准则统一设置为连续迭代过程中恢复图像之间的相对误差小于 5×10^{-4} 时停止。本文实验均在 Intel(R)Core(TM) i5-3470 CPU @ 3.20 GHz 3.20 GHz MATLAB R2014b 上完成, 并在实验部分统一选取选取图像的峰值信噪比[33] (peak signal-to-noise ratio value, PSNR)描述恢复图像的质量。

图 1 为实验选取的原图像及噪声图像, 第一列为原图像, 第二列为噪声水平 $K = 10$ 的噪声图像, 第三列为噪声水平 $K = 20$ 的噪声图像。从图 1 中我们可以明显看出乘性噪声对图像的影响不仅表现在干扰图像信息方面, 还表现在图像的对比度方面。图 2、图 3 分别为六种不同模型对 $K = 10$ 的 cameraman、

woman 图像的去噪实验结果, 从结果中我们不难发现在 AA 模型与 I-div 模型相比其他四种去噪模型可以相对恢复图像的对比度。图 4、图 5 分别为六种不同模型对 $K = 20$ 的 cameraman、woman 图像的去噪实验结果, 我们可以明显发现随着噪声水平的降低, 模型之间的去噪效果差异减小。图 1~5 从主观上反映了乘性噪声对图像的污染及不同模型对乘性噪声的去除效果, 没有客观的数据结果。因此, 文章列出在相同条件下各模型的具体数值结果。表 1、表 2 分别为六种去噪模型在 $K = 10$ 、 $K = 20$ 噪声水平影响下的实验数值结果, 两张表用具体的实验数据展示了六种去噪模型在相同实验环境及同一停止条件下的恢复效果和所需要的运行时间。

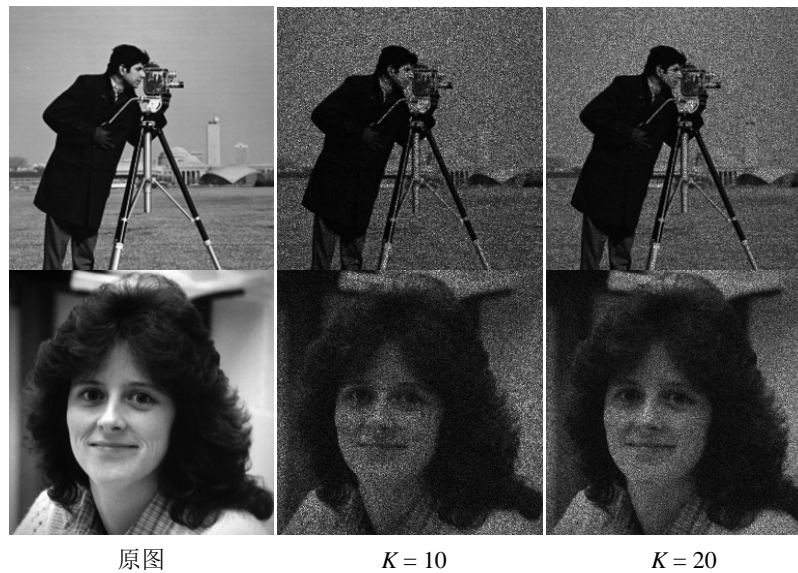


Figure 1. Original image, noise image

图 1. 原图像、噪声图像

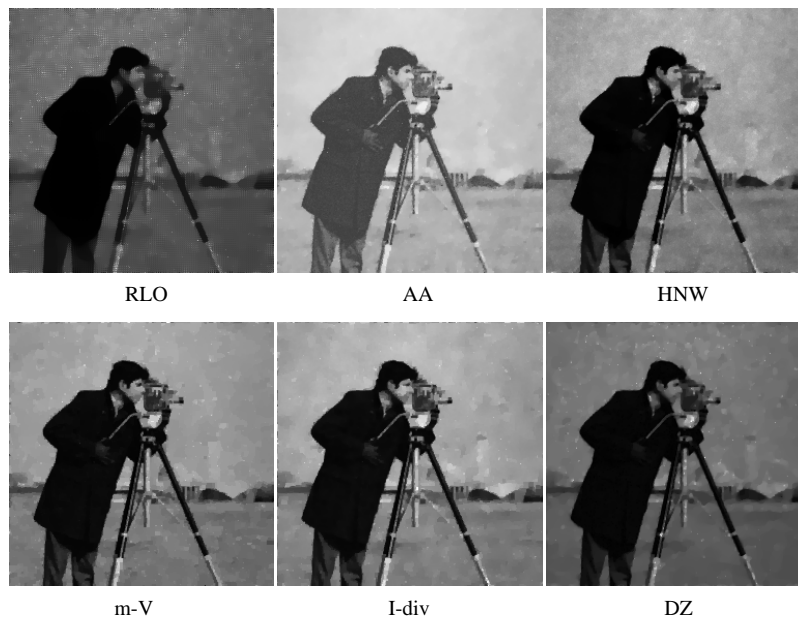


Figure 2. Noise level $K = 10$ cameraman denoising results

图 2. 噪声水平 $K = 10$ cameraman 的去噪结果



Figure 3. Noise level $K = 10$ woman denoising results
图 3. 噪声水平 $K = 10$ woman 的去噪结果

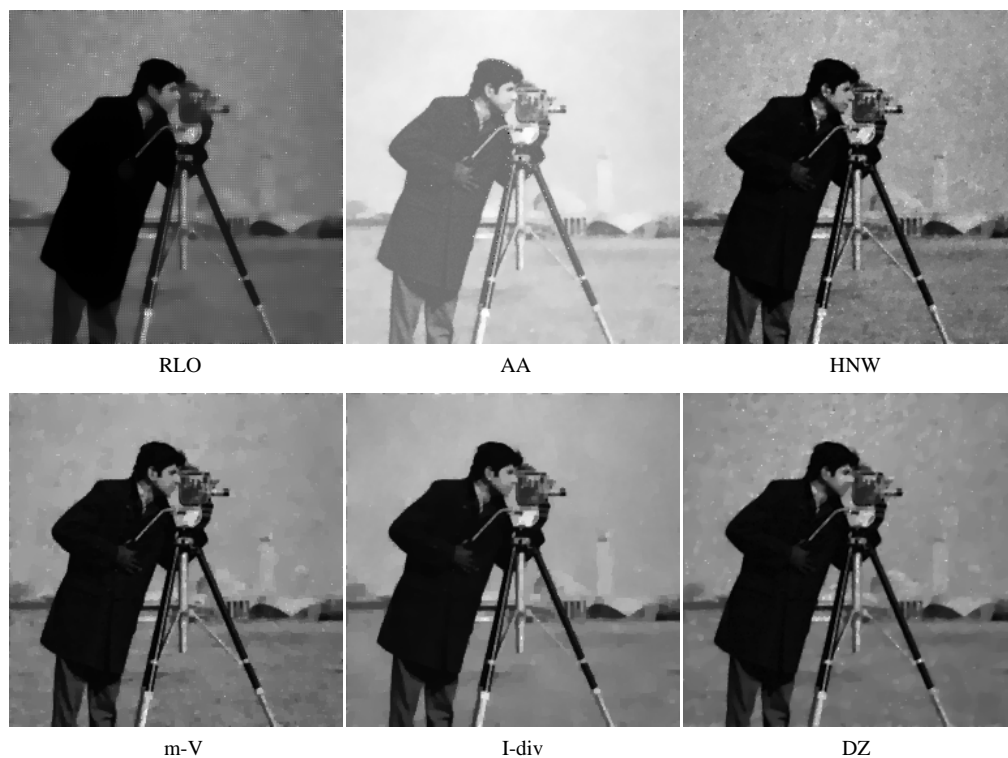


Figure 4. Noise level $K = 20$ cameraman denoising results
图 4. 噪声水平 $K = 20$ cameraman 的去噪结果



Figure 5. Noise level $K = 20$ woman denoising results
图 5. 噪声水平 $K = 20$ woman 的去噪结果

Table 1. $K = 10$ model running time and image PSNR after denoising
表 1. $K = 10$ 模型运行时间及去噪后图像 PSNR 值

图像	模型	PSNR (db)	时间(s)	图像	模型	PSNR (db)	时间(s)
carmerman	RLO	23.11	6.15	woman	RLO	25.60	6.63
	AA	26.05	6.80		AA	27.36	6.20
	HUANG	26.48	3.56		HUANG	28.49	3.79
	m-v	26.85	1.13		m-v	28.63	1.13
	I-div	26.61	1.95		I-div	29.03	2.24
	DZ	26.43	19.71		DZ	29.06	8.35

Table 2. $K = 20$ model running time and image PSNR after denoising
表 2. $K = 20$ 模型运行时间及去噪后图像 PSNR 值

图像	模型	PSNR (db)	时间(s)	图像	模型	PSNR (db)	时间(s)
carmerman	RLO	24.92	4.40	woman	RLO	27.15	4.30
	AA	27.84	4.27		AA	29.56	6.20
	HUANG	28.04	3.50		HUANG	30.01	3.90
	m-v	27.78	1.14		m-v	30.06	1.51
	I-div	27.76	1.83		I-div	30.37	1.75
	DZ	28.17	13.18		DZ	30.29	8.80

另外与理论结果相同, 受乘性噪声污染的图像对比度会相对缩减, 这一点在图 1 中有明显体现。由于噪声的方差与噪声水平成反比例关系, 因此随着噪声水平的增加对比度呈反向增长。在实验的过程中, 我们发现如第二节所述, AA 模型对参数比较敏感, m-v 与 DZ 模型在调参时要注意参数的取值范围, 因此这三个模型在调参的过程中需要花费相对多的时间。从实验效果方面分析, AA 模型的 MAP 保真项与 I-div 模型的散度保真项在进行去噪时能更好地恢复图像的对比度, 除此之外其他的基于 MAP 做变换改变凸性的模型在对比度方面都有相对大的损失, 尤其是通过对数变换使得模型凸性改变的保真项。从实验数值结果方面分析, m-v 模型和 I-div 模型相比其他模型有较高的 PSNR 值且在相同的停止条件下实验运行时间较短。

4. 结论及未来发展方向

4.1. 结论

综合文章中所阐述的理论和实验结果, 不难发现在变分正则化去除乘性噪声的过程中, 保真项的选取对结果的影响较大, 这一点不仅在理论知识方面有所依据, 在实验结果上也得到了验证, 如 AA 模型和 I-div 模型明显因为保真项对图像的对比度有更好的恢复结果。一些混合保真项模型虽然在去噪结果上与其他模型相当, 但在实验运行时间上却相对较长, 如 DZ 模型。从乘性噪声保真项建立的角度分析, 不同的建模方法会使模型产生不同的实验效果, 同时对试验运行时间也会产生不同的影响, 如 m-V 模型会在实验运行时间方面有较大优势, 相对而言 DZ 模型的运行时间较长; 基于 MAP-对数变换的模型得到的实验结果不能更好地恢复图像的对比度信息。

综上所述, 本文依据保真项的类型对去除乘性噪声的变分正则化模型进行系统介绍, 并给出了几种不同的正则化模型的具体实验结果及数据, 从理论和实验结果方面对去除乘性噪声的变分正则化进行了相关分析, 最终相对客观地评价了文中所提出的几种模型。引言部分阐述了乘性噪声的特点及目前为止出现的乘性噪声去除方法, 重点介绍本文所综述的变分正则化去除乘性噪声的方法。第二部分根据变分正则化去除乘性噪声保真项的不同, 将其分为方差-均值模型、基于 MAP 模型、散度模型及混合模型四类模型并进行具体理论分析。第三部分对文中提出的正则项相同保真项不同的模型进行实验, 从直观和客观两个方面展示变分正则化去除乘性噪声中保真项的作用。最终在第四部分得出本文的结论及未来可能的发展方向。

4.2. 未来发展方向

自适应参数的设定。众所周知, 在现有的变分正则化乘性噪声去除的模型中, 实验参数的设定都是比较困难的。参数基本都是采用手动设定且种类多调整区间大, 因此在调参做实验时需要耗费大量的时间才可以得到理想的实验结果。特别是对于类似于 AA 模型这种对于初始值特别敏感的模型, 需要花费更多时间在调节参数方面。未来可以利用深度学习的方法训练出模型的各项参数, 然后根据训练的参数去结合噪声图像的信息建立理论的函数表达式, 最终应用于图像去噪实验调整参数的过程中。

求解速度的改善。在模型的求解过程中, 很多模型都存在求解速度缓慢的问题。例如 AA 模型虽然解是存在且唯一的, 但在求解过程中解的收敛速度慢, 一旦迭代次数增多就需要耗费大量的时间在运行程序上, NLTV 模型, 非局部的特征使得模型的求解速度减慢等。因此, 未来一方面对于解存在且唯一的非凸模型收敛速度改进的算法研究, 另一方面对于凸模型求解算法的改进。

图像的分解去噪。严格来说图像上的每一个像素点都是不同的, 都含有其特有的像素信息, 但图像的区域确实可以分解的。在乘性噪声的去除中绝大多数模型都是将图像看成一个整体进行噪声的去除, 这种方式没有太多考虑图像区域的特征。根据乘性噪声图像的噪声特点, 噪声是随着信号强度的增加而

增加的, 因此这些区域信息理应被考虑。未来可以根据图像中像素点所含信息的量对图像进行分解, 例如分解成平滑区域以及纹理区域, 然后再考虑运用相应特征的模型对图像进行去噪。

去噪图像对比度的改善。乘性噪声与图像信息相关的特点, 使得图像受乘性噪声污染时对比度会降低。现有的模型对于图像对比度的恢复考虑较少, 因此在未来对乘性噪声去除时, 可以考虑在原有去噪的基础上增加图像对比度的正则项, 最终使得观测图像能在去噪的基础上对比度也相应得到更好的恢复。

特定图像的去噪。在工程上一般使用滤波器的方法对图像进行噪声去除, 这种方法固然在速度上有优势, 但在实验效果上欠佳。截止目前, 也有一些使用变分正则化处理特定图像乘性噪声的模型, 如针对 SAR 图像的噪声去除、医学图像的噪声去除, 但其在建模的过程中其实并没有太多地考虑这种图像的特点以及去噪后图像的应用问题。未来可以基于应用中存在的问题出发, 建立特定图像的乘性噪声去除模型, 使模型对于某一个问题的解决性达到最优, 例如针对医学核磁共振图像产生的乘性噪声问题等。

基金项目

国家自然科学基金(62061016, 61561019)资助项目。

参考文献

- [1] Pandit, A., Sharma, M. and Ramsankaran, R. (2014) Comparison of the Performance of the Newly Developed CDWM Filter with Enhanced LEE and Enhanced Frost Filters over the SAR Image. 2014 9th International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS), Gwalior, 15-17 December 2014, 1-5. <https://doi.org/10.1109/ICIINFS.2014.7036551>
- [2] Xu, B., Cui, Y., Li, Z., et al. (2015) Patch Ordering-Based SAR Image Despeckling Via Transform-Domain Filtering. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, **8**, 1682-1695. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2014.2375359>
- [3] Guo, F., Zhang, G., Zhang, Q., et al. (2018) Speckle Suppression by Weighted Euclidean Distance Anisotropic Diffusion. *Remote Sensing*, **10**, Article No. 722. <https://doi.org/10.3390/rs10050722>
- [4] Gao, J., Sun, J., Yao, W., et al. (2021) A Novel Fractional-Order Reaction Diffusion System for the Multiplicative Noise Removal. *Studies in Applied Mathematics*, **147**, 421-447. <https://doi.org/10.1111/sapm.12386>
- [5] Yao, W., Guo, Z., Sun, J., et al. (2019) Multiplicative Noise Removal for Texture Images Based on Adaptive Anisotropic Fractional Diffusion Equations. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **12**, 839-873. <https://doi.org/10.1137/18M1187192>
- [6] Nao, S. and Wang, Y. (2022) Speckle Noise Removal Model Based on Diffusion Equation and Convolutional Neural Network. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2022, Article ID: 5344263. <https://doi.org/10.1155/2022/5344263>
- [7] Lakra, M. and Kumar, S. (2022) Solving a Generalized Order Improved Diffusion Equation of Image Denoising Using a CeNN-Based Scheme. *Multimedia Tools and Applications*, **81**, 32393-32420. <https://doi.org/10.1007/s11042-022-12998-7>
- [8] Syed, M.H., Upreti, K., Nasir, M.S., et al. (2022) Addressing Image and Poisson Noise Deconvolution Problem Using Deep Learning Approaches. *Computational Intelligence*. <https://doi.org/10.1111/coin.12510>
- [9] 老大中. 变分法基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.
- [10] Rudin, L., Lions, P.L. and Osher, S. (2003) Multiplicative Denoising and Deblurring: Theory and Algorithms. In: Osher, S., Paragios, N. and Kimmel, R., Eds., *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*, Springer, New York, 103-119. https://doi.org/10.1007/0-387-21810-6_6
- [11] Aubert, G. and Aujol, J.F. (2008) A Variational Approach to Removing Multiplicative Noise. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **68**, 925-946. <https://doi.org/10.1137/060671814>
- [12] Shi, J. and Osher, S. (2008) A Nonlinear Inverse Scale Space Method for a Convex Multiplicative Noise Model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **1**, 294-321. <https://doi.org/10.1137/070689954>
- [13] Huang, Y.M., Ng, M.K. and Wen, Y.W. (2009) A New Total Variation Method for Multiplicative Noise Removal. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **2**, 20-40. <https://doi.org/10.1137/080712593>
- [14] Dong, Y. and Zeng, T. (2013) A Convex Variational Model for Restoring Blurred Images with Multiplicative Noise. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **6**, 1598-1625. <https://doi.org/10.1137/120870621>

- [15] Steidl, G. and Teuber, T. (2010) Removing Multiplicative Noise by Douglas-Rachford Splitting Methods. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **36**, 168-184. <https://doi.org/10.1007/s10851-009-0179-5>
- [16] Rosen, J.B. (1961) The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part II. Nonlinear Constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **9**, 514. <https://doi.org/10.1137/0109044>
- [17] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville. 深度学习[M]. 赵申剑, 黎彧君, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2017.
- [18] Xu, X., Pan, H., Wei, W., et al. (2017) Multiplicative Noise Removal Based on Total Generalized Variation. In: *Chinese Conference on Image and Graphics Technologies*, Springer, Singapore, 43-54. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7389-2_5
- [19] Xu, X., Yu, T., Xu, X., et al. (2018) Variational Total Curvature Model for Multiplicative Noise Removal. *IET Computer Vision*, **12**, 542-552. <https://doi.org/10.1049/iet-cvi.2017.0332>
- [20] Chen, M., Zhang, H., Han, Q., et al. (2019) A Convex Nonlocal Total Variation Regularization Algorithm for Multiplicative Noise Removal. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, **2019**, Article No. 28. <https://doi.org/10.1186/s13640-019-0410-2>
- [21] Han, Y., Feng, X.C., Baciú, G., et al. (2013) Nonconvex Sparse Regularizer Based Speckle Noise Removal. *Pattern Recognition*, **46**, 989-1001. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2012.10.010>
- [22] Lv, Y. (2020) Total Generalized Variation Denoising of Speckled Images Using a Primal-Dual Algorithm. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **62**, 489-509. <https://doi.org/10.1007/s12190-019-01293-8>
- [23] Chambolle, A. (2004) An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **20**, 89-97. <https://doi.org/10.1023/B:JMIV.0000011321.19549.88>
- [24] Chambolle, A. and Pock, T. (2011) A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **40**, 120-145. <https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>
- [25] Yun, S. and Woo, H. (2012) A New Multiplicative Denoising Variational Model Based on m-th Root Transformation. *IEEE Transactions on Image Processing*, **21**, 2523-2533. <https://doi.org/10.1109/TIP.2012.2185942>
- [26] Devasena, D. (2021) Despeckling Algorithms for Removing Noise in Medical Images. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, **12**, 87-94. <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i6.1271>
- [27] Combettes, P.L. and Pesquet, J.C. (2007) A Douglas-Rachford Splitting Approach to Nonsmooth Convex Variational Signal Recovery. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, **1**, 564-574. <https://doi.org/10.1109/JSTSP.2007.910264>
- [28] Li, C., Ren, Z. and Tang, L. (2020) Multiplicative Noise Removal via Using Nonconvex Regularizers Based on Total Variation and Wavelet Frame. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **370**, Article ID: 112684. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112684>
- [29] Shama, M.G., Huang, T.Z., Liu, J., et al. (2016) A Convex Total Generalized Variation Regularized Model for Multiplicative Noise and Blur Removal. *Applied Mathematics and Computation*, **276**, 109-121. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.12.005>
- [30] Tran, T.T.T., Pham, C.T., Vo, D.H., et al. (2021) A Hybrid Regularizers Model for Multiplicative Noise Removal. *Cybernetics and Physics*, **10**, 40-50. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-1-40-50>
- [31] Bai, L. (2019) A New Nonconvex Approach for Image Restoration with Gamma Noise. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 2627-2639. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.12.045>
- [32] Li, Z., Lou, Y. and Zeng, T. (2016) Variational Multiplicative Noise Removal by DC Programming. *Journal of Scientific Computing*, **68**, 1200-1216. <https://doi.org/10.1007/s10915-016-0175-z>
- [33] Zhou, W., Bovik, A.C., Sheikh, H.R., et al. (2004) Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, **13**, 600-612. <https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819861>