

# 一类对应特殊图的链环的Jones多项式

祁 禄

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年9月26日; 录用日期: 2022年10月19日; 发布日期: 2022年10月27日

---

## 摘 要

Tutte多项式在空间图理论中占据中心地位, 本文给出一类特殊图, 研究了这类图的Tutte多项式, 并且借助Jones多项式与Tutte多项式间的关系计算了这类特殊图对应的链环的Jones多项式, 这不仅为链环的Jones多项式的计算提供了新路径, 还在纽结理论与空间图理论之间架起一座桥梁。

## 关键词

Tutte多项式, Jones多项式, 拧数

---

# The Jones Polynomials of a Kind of Links Corresponding to Special Graphs

Lu Qi

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 26<sup>th</sup>, 2022; accepted: Oct. 19<sup>th</sup>, 2022; published: Oct. 27<sup>th</sup>, 2022

---

## Abstract

Tutte polynomial plays a central role in spatial graph theory, in this paper, given a special type of graphs, we study the Tutte polynomial of the graph and calculate the Jones polynomial of the link corresponding to this special graph with the help of the relationship between the Jones polynomial and the Tutte polynomial, which not only provides a new path for the calculation of the Jones polynomial of links, but also builds a bridge between the knot theory and spatial graph theory.

## Keywords

Tutte Polynomial, Jones Polynomial, Writhe Number

---



## 1. 引言

纽结理论是拓扑学的重要分支，随着数学学科不断地发展，纽结理论推广为空间图理论[1]，很多专家学者开始着手研究空间图理论，探索如何应用空间图的知识去很好地处理纽结理论中的问题。Jones 多项式是重要的纽结多项式，很多学者一直探索计算 Jones 多项式的多种途径。其中，利用拆阶关系计算链环的 Jones 多项式是较为常见的一种方法，但是对于交叉点较多的链环来说，计算具有复杂性，因此，学者们开始探寻如何利用其他方法来简化 Jones 多项式的计算。Ryan A 利用尖括号多项式拆阶关系和拧数的规律解决了排叉链环的 Jones 多项式的计算问题[2]，金贤安建立了关于拧数的定向状态模型[3]，陶志雄利用二项式的知识研究了特殊环面结的 Jones 多项式[4]，Kwun Y C 等学者研究了各边均为正号的  $(3, n)$  图对应的链环的 Jones 多项式[5]，在此基础上，本文研究了各边均为正号的  $(A, n)$  图对应的链环，并计算出其 Jones 多项式，为实现此类链环的 Jones 多项式的计算，第一部分介绍纽结理论和空间图理论的相关基础知识和基本概念，第二部分计算了  $(4, n)$  图的 Tutte 多项式，第三部分找到拧数的计算规律，这样就可以通过 Jones 多项式与 Tutte 多项式的关系得到这族链环的 Jones 多项式。最后，对  $(4, n)$  图的非重边的对边增加边，得到  $(A, n)$  图，这样就得到了  $(A, n)$  图对应的链环的 Jones 多项式。

本文的创新之处在于利用 Tutte 多项式的减边缩边性质以及链环的拧数规律对一类链环的 Jones 多项式进行计算，利用空间图的知识处理纽结理论中的问题。

## 2. 预备知识

### 2.1. 链环

若干个互不相交的圆周  $S_i^1$  嵌入到球面  $S^3$  或三维欧氏空间  $R^3$  所得到的三维图形称作链环，其中  $1 \leq i \leq n$ 。[1]

注释 2.1 当  $i=1$  时，链环只有一个分支，称为纽结。

注释 2.2 当链环的每个分支都给定方向时，得到有向链环。

### 2.2. 图

有序三元组  $(V(G), E(G), \varphi(G))$  称为图，记为  $G$ ， $V(G)$  为图  $G$  的顶点集， $E(G)$  为图  $G$  的边集，并且  $E(G) \cap V(G) = \emptyset$ ， $\varphi(G)$  将  $G$  的每条边对应  $G$  的顶点对(顶点可以是同一个)。若边  $e$  与两个顶点  $u, v$  满足  $\varphi(e) = uv$ ，则称顶点  $u, v$  是用边  $e$  连接的，且  $e$  的两个端点是顶点  $u, v$ 。[1]

注释 2.3 若在图  $G$  中删除边  $e$  后，图  $G$  的分支数增加，则称边  $e$  为图  $G$  的割边。

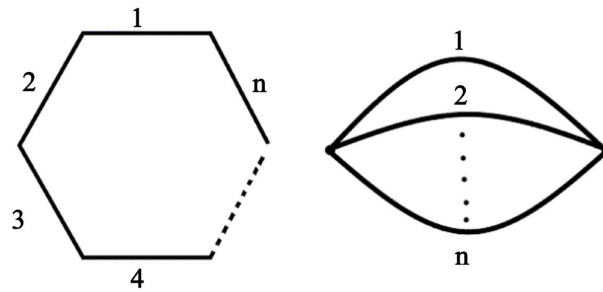
注释 2.4 若边  $e$  的两个端点是相同的顶点，则  $e$  为环边。

注释 2.5 若连接两顶点的边不止一条，则这些边为多重边。

### 2.3. 两类特殊的图

1)  $C_n$  表示长为  $n$  的循环图。

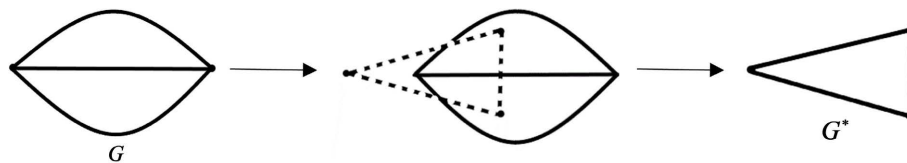
2)  $\theta_n$  表示由两个顶点， $n$  条连接这两个顶点的边组成的图 1。



**Figure 1.** Figure  $C_n$  and Figure  $\theta_n$   
**图 1.** 图  $C_n$  与图  $\theta_n$

### 2.4. 对偶图

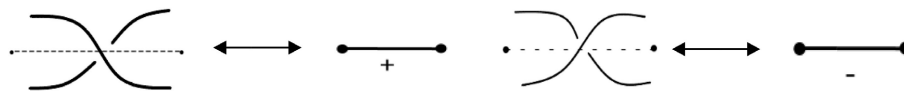
设图  $G$  的对偶图为  $G^*$ , 则满足  $G^*$  的每一个顶点对应  $G$  的每个面, 若  $G$  的对应面在边界上有  $k$  条边, 则在对应面的  $G^*$  的两个顶点就有  $k$  条边(如图 2)。



**Figure 2.** The move between  $G$  and  $G^*$   
**图 2.**  $G$  到  $G^*$  的变换过程

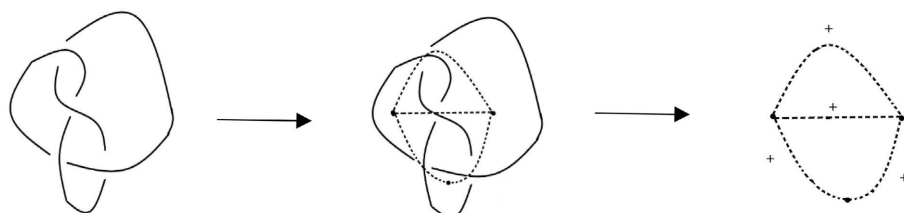
### 2.5. 交错链环投影图与符号图

- 1) 在链环投影图中, 若对链环的每个分支沿着投影图的每条线, 交叉点均为一上一下交错出现, 那么称此链环为交错链环。[1]
- 2) 每条边均被标记为正号或者负号的图称为符号图, 边的标号规则如图 3。



**Figure 3.** The rule of sign  
**图 3.** 边的标号规则

注释 2.6 任意交错链环投影图都能找到其符号图(如图 4), 反过来, 任一符号图都能找到其对应的链环图(如图 5)。



**Figure 4.** Figure-eight knot and signed graph  
**图 4.** 八字结与其对应的符号图

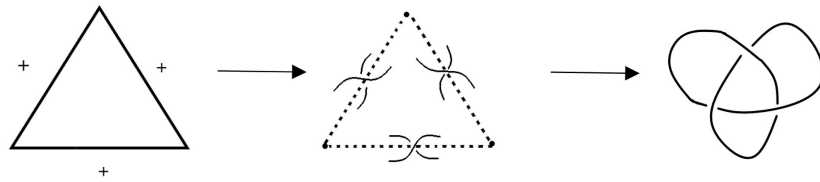


Figure 5. Signed graph of  $C_3$  and link diagram  
图 5.  $C_3$  符号图及其对应的链环图

### 2.6. 拧数

一个有向链环投影图  $L$  的所有交叉点的+1 与-1 之和称为链环  $L$  的拧数, 记为  $W(L)$  [1]。  
规定从上行线的箭头转到下行线的箭头的最小转角为逆时针时, 记为+1;  
从上行线的箭头转到下行线的箭头的最小转角为顺时针时, 记为-1。

### 2.7. Jones 多项式

定向链环  $L$  的 Jones 多项式是一个变量为  $t^{\frac{1}{2}}$  的一变元洛朗多项式, 满足如下拆阶关系式[1]: (图 6)。

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{L_0}(t)$$

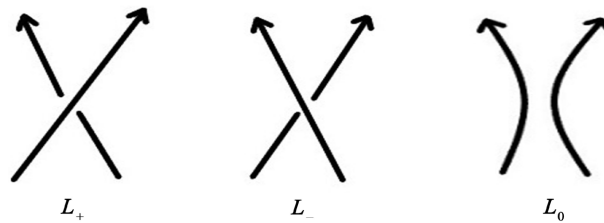


Figure 6.  $L_+$ ,  $L_-$  and  $L_0$   
图 6.  $L_+$ ,  $L_-$  和  $L_0$

### 2.8. Tutte 多项式

Tutte 多项式是二变量多项式, 且满足:

性质 1 当图  $G$  的边集是空集时,  $T_G(x, y) = 1$ ;

性质 2 当  $e$  是环边时,  $T_G(x, y) = yT(G - e; x, y)$ ;

性质 3 当  $e$  是割边时,  $T_G(x, y) = xT(G/e; x, y)$ ;

性质 4 当  $e$  不是环边也不是割边时,  $T_G(x, y) = T(G/e; x, y) + T(G - e; x, y)$ 。(图 7)

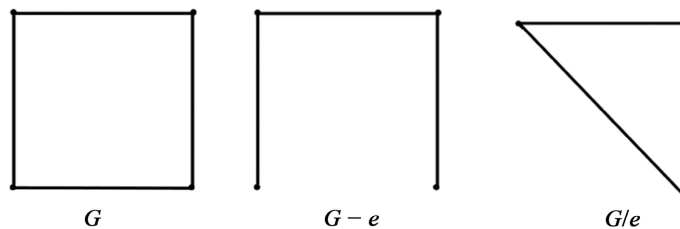


Figure 7.  $G$ ,  $G - e$  and  $G/e$   
图 7.  $G$ ,  $G - e$  和  $G/e$

### 2.9. 引理 1

令图  $G$  是各边均标为正号的连通平面图,  $G$  对应的定向交错链环投影图记为  $L$ , 则链环  $L$  的 Jones 多项式为:

$$V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$$

其中  $a(L)$  为  $G$  的顶点数,  $b(L)$  为  $G^*$  的顶点数,  $wr(L)$  为  $L$  的拧数。

说明: 本文中的图均为符号图, 且每个边的符号均为正号。

### 3. 一类链环图的 Jones 多项式

#### 3.1. $G(4, n)$ 的 Tutte 多项式

定义 3.1  $(4, n)$  图: 在循环图  $C_4$  的基础上, 选择任一条边为其增加  $n$  条边后得到的图(如图 8)。

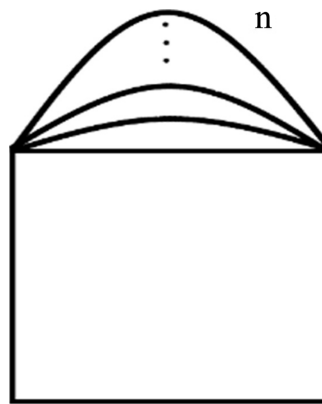


Figure 8.  $(4, n)$  graph

图 8.  $(4, n)$  图

定理 3.1  $(4, n)$  图的 Tutte 多项式为:

$$T_{(4, n)}(x, y) = x^3 + (x^2 + x + y) \sum_{i=0}^n y^i$$

证明: 当  $n=1$  时, 由 Tutte 多项式的减边与缩边的性质, 得到:

$$\begin{aligned} T_{(4, 1)} &= T(\text{square with top edge curved}) = T(\text{square}) + T(\text{square with top edge loop}) \\ &= T(\text{square}) + T(\text{square with diagonal}) + yT(\text{square with diagonal and loop}) \\ &= x^3 + (1+y)T(\text{square with diagonal}) \end{aligned}$$

其中,  $T(\text{square with diagonal}) = T(\text{square with diagonal}) + T(\text{diamond})$

$$\begin{aligned}
 &= xT(\diagdown) + T(\curvearrowright) + T(\text{loop}) \\
 &= x^2T(\bullet) + xT(\bullet) + y \\
 &= x^2 + x + y
 \end{aligned}$$

则  $T(\text{square with top arc}) = x^3 + (x^2 + x + y)(1 + y)$ ,

即  $n = 1$  时成立;

假设  $n = k$  成立, 即  $T_{(4,k)} = x^3 + (x^2 + x + y) \sum_{i=0}^k y^i$ , 下证  $n = k + 1$  成立:

$$\begin{aligned}
 T_{4,k+1} &= T(\text{square with } k+1 \text{ arcs}) = T(\text{square with } k \text{ arcs}) + T(\text{square with } k \text{ arcs and diagonal}) \\
 &= x^3 + (x^2 + x + y) \sum_{i=0}^k y^i + y^{k+1}(x^2 + x + y) \\
 &= x^3 + (x^2 + x + y) \sum_{i=0}^{k+1} y^i
 \end{aligned}$$

定理 3.1 得证。

推论 3.1  $T_{(4,n)}(-t, -t^{-1}) = \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t}$

证明: 由定理 3.1 知,

$$\begin{aligned}
 T_{(4,n)}(-t, -t^{-1}) &= -t^3 + [(-t)^2 + (-t) + (-t^{-1})] \sum_{i=0}^n (-t^{-1})^i \\
 &= -t^3 + (t^2 - t - t^{-1}) \frac{(-t^{-1})^{n+1} - 1}{-t^{-1} - 1} \\
 &= -t^3 + (-t^2 + t + t^{-1}) \frac{(-1)^{n+1} t^{-n} - t}{1+t} \\
 &= \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t}
 \end{aligned}$$

### 3.2. 链环 $L$ 的扭数规律

$(4, n)$  图对应的交错链环  $L$  分为两类, 当  $n$  为奇数时,  $L$  为一分支链环, 即纽结; 当  $n$  为偶数时,  $L$  为两分支链环。

情况 1. 当  $n$  为奇数时, 分析  $G, L, a(L), b(L)$  与  $wr(L)$ , 具体如表 1 所示。

发现: 当  $n$  为奇数时,  $a(L) = 4, b(L) = n + 2, L$  的所有交叉点处的值均为  $-1$ , 总共有  $n + 4$  个交叉点, 故  $wr(L) = -n - 4$ 。

情况 2. 当  $n$  为偶数时, 且两分支链环同向时, 分析  $G, L, a(L), b(L)$  与  $wr(L)$ , 具体如表 2 所示。

发现: 当  $n$  为偶数时,  $a(L) = 4, b(L) = n + 2, L$  的所有交叉点处的值均为  $+1$ , 总共有  $n + 4$  个交叉点, 故  $wr(L) = n + 4$ ;

**Table 1.**  $(4, n)$  graph and link  $L$  ( $n$  is odd)  
**表 1.**  $n$  为奇数情况下的  $(4, n)$  图及链环  $L$

$n$	$G$	$L$	$a(L)$	$b(L)$	$wr(L)$
1			4	3	-5
3			4	5	-7
5			4	7	-9
...	...	...	...	...	...

**Table 2.**  $(4, n)$  graph and link  $L$  ( $n$  is even)  
**表 2.**  $n$  为偶数情况下的  $(4, n)$  图及链环  $L$

$n$	$G$	$L$	$a(L)$	$b(L)$	$wr(L)$
2			4	4	+6
4			4	6	+8
6			4	8	+10
...	...	...	...	...	...

同样地，可以得到：当  $n$  为偶数且两分支链环不同向时，与  $n$  为奇数时一样， $wr(L) = -n - 4$ 。

### 3.3. 链环 $L$ 的 Jones 多项式

定理 3.2. 当  $n$  为奇数时，图  $G(4, n)$  对应的交错链环  $L$  的 Jones 多项式为：

$$V_L(t) = \frac{1}{1+t} \left( t^{-\frac{n+1}{2}} + t^{-\frac{n-3}{2}} + t^{-\frac{n-7}{2}} + t^{-\frac{3n-3}{2}} - t^{-\frac{3n-5}{2}} - t^{-\frac{3n-9}{2}} \right)$$

证明:  $a(L) = 4$ ,  $b(L) = n + 2$ , 且  $n$  为奇数时,  $wr(L) = -n - 4$ , 由引理 1,

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1}) \\ &= (-1)^{-n-4} t^{\frac{n+2-4+3(-n-4)}{4}} \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t} \\ &= -t^{-\frac{n-7}{2}} \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+t} \left( t^{-\frac{n+1}{2}} + t^{-\frac{n-3}{2}} + t^{-\frac{n-7}{2}} + t^{-\frac{3n-3}{2}} - t^{-\frac{3n-5}{2}} - t^{-\frac{3n-9}{2}} \right) \end{aligned}$$

定理 3.2 得证。

定理 3.3 当  $n$  为偶数时, 图  $G(4, n)$  对应的交错链环  $L$  的 Jones 多项式为:

$$V_L(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} \left( -t^{\frac{n+13}{2}} - t^{\frac{n+9}{2}} - t^{\frac{n+5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} - t^{\frac{7}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right), L \text{ 两分支同向} \\ \frac{1}{1+t} \left( t^{-\frac{3n-3}{2}} - t^{-\frac{3n-5}{2}} - t^{-\frac{3n-9}{2}} - t^{-\frac{n+1}{2}} - t^{-\frac{n-3}{2}} - t^{-\frac{n-7}{2}} \right), L \text{ 两分支不同向} \end{cases}$$

证明: 当链环的两个分支同向(同为逆时针或顺时针)时,  $wr(L) = n + 4$ ,  $a(L) = 4$ ,  $b(L) = n + 2$ , 则  $T_G(-t, -t^{-1})$  前的系数为  $t^{\frac{n+5}{2}}$ , 故

$$\begin{aligned} V_L(t) &= t^{\frac{n+5}{2}} T_G(-t, -t^{-1}) \\ &= t^{\frac{n+5}{2}} \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+t} \left( -t^{\frac{n+13}{2}} - t^{\frac{n+9}{2}} - t^{\frac{n+5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} - t^{\frac{7}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

同理, 当链环的两个分支同向(一分支为逆时针另外一分支为顺时针)时,  $a(L) = 4$ ,  $b(L) = n + 2$ , 此时,  $wr(L) = -n - 4$ ,  $T_G(-t, -t^{-1})$  前的系数为  $t^{-\frac{n-7}{2}}$ , 则链环的 Jones 多项式为:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= t^{-\frac{n-7}{2}} T_G(-t, -t^{-1}) \\ &= t^{-\frac{n-7}{2}} \frac{-t^4 - t^2 - 1 + (-1)^{n+2} t^{-n+2} + (-1)^{n+1} t^{-n+1} + (-1)^{n+1} t^{-n-1}}{1+t} \\ &= \frac{1}{1+t} \left( t^{-\frac{3n-3}{2}} - t^{-\frac{3n-5}{2}} - t^{-\frac{3n-9}{2}} - t^{-\frac{n+1}{2}} - t^{-\frac{n-3}{2}} - t^{-\frac{n-7}{2}} \right) \end{aligned}$$

定理 3.3 得证。

## 4. 推广的一类链环的 Jones 多项式

### 4.1. $G(A, n)$ 的 Tutte 多项式

定义 4.1  $(A, n)$  图是在循环图  $C_A (A \geq 3)$  的基础上, 选取任一条边后, 为这条边增加  $n$  条边后得到的图(如图 9)。



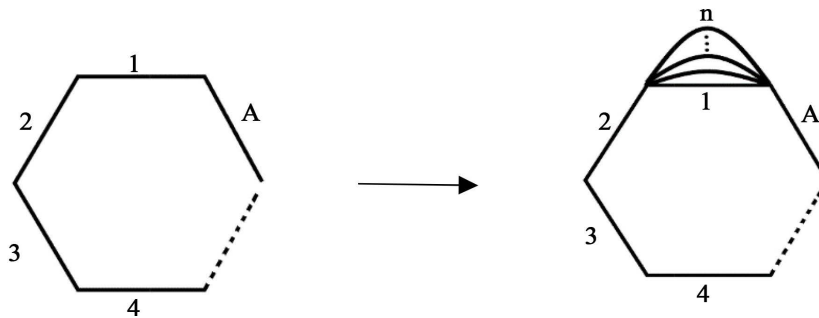


Figure 9.  $C_A$  graph and  $(A, n)$  graph

图 9.  $C_A$  图与  $(A, n)$  图

定理 4.1  $(A, n)$  图的 Tutte 多项式为:

$$T_{(A,n)}(x, y) = x^{A-1} + (x^{A-2} + x^{A-3} + \dots + x + y) \sum_{i=0}^n y^i$$

证明: 当  $A = 3$  时,  $T_{(3,n)}(x, y) = x^2 + (x + y) \sum_{i=0}^n y^i$  [5];

假设  $T_{(A,k)}(x, y) = x^{k-1} + (x^{k-2} + x^{k-3} + \dots + x + y) \sum_{i=0}^n y^i$ , 下证  $A = k + 1$  时等式成立。

由 Tutte 多项式的缩边减边性质,

$$\begin{aligned} T_{(k+1,n)}(x, y) &= T_{(k,n)}(x, y) + x^{k-1} T \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ n+1 \end{array} \right) \\ &= T_{(k,n)}(x, y) + x^{k-1} [T \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ n \end{array} \right) + T \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ n \end{array} \right)] \\ &= T_{(k,n)}(x, y) + x^{k-1} (x + 1 + y + y^2 + \dots + y^n) \\ &= T_{(k,n)}(x, y) + x^k + x^{k-1} (1 + y + y^2 + \dots + y^n) \\ &= x^k + (x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + y) \sum_{i=0}^n y^i \end{aligned}$$

定理 4.1 得证。

推论 4.1  $T_{(A,n)}(-t, -t^{-1}) = (-t)^{A-1} + \frac{1}{(1+t)^2} [(-1)^{n+1} t^{-n} - t] [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$ 。

$$T_{(A,n)}(-t, -t^{-1}) = (-t)^{A-1} + [(-t)^{A-2} + (-t)^{A-3} + \dots + (-t) + (-t^{-1})] \sum_{i=0}^n (-t^{-1})^i$$

证明: 
$$\begin{aligned} &= (-t)^{A-1} + \left[ \frac{(-t)^{A-1} - 1}{-t - 1} - 1 - t^{-1} \right] \frac{(-t^{-1})^{n+1} - 1}{-t^{-1} - 1} \\ &= (-t)^{A-1} + \frac{1}{(1+t)^2} [(-1)^{n+1} t^{-n} - t] [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}] \end{aligned}$$

### 4.2. 推广的链环的 Jones 多项式

定理 4.2  $(A, n)$  图对应的链环  $L$  的扭数为:

当  $A$  为偶数时, 若  $n$  为奇数,  $L$  为一分支链环,  $wr(L) = -n - A$ ; 若  $n$  为偶数,  $L$  为二分支链环, 且两分支同向时,  $wr(L) = n + A$ , 当且两分支不同向时,  $wr(L) = -n - A$ ;

当  $A$  为奇数时,  $L$  为一分支链环, 若  $n$  为奇数,  $wr(L) = 2 + n - A$ ; 若  $n$  为偶数,  $wr(L) = n + A$ 。

证明: 当  $A$  为偶数, 而  $n$  为奇数时, 给定  $L$  定向,  $L$  的每个交叉点的值均为  $-1$ , 交叉点的个数为  $n + A$  个, 故此时  $wr(L) = -n - A$ ; 当  $A$  为偶数, 而  $n$  为偶数时, 给定  $L$  定向, 若  $L$  的两分支同向, 则  $L$  的每个交叉点的值均为  $+1$ , 故此时  $wr(L) = n + A$ ; 当  $A$  为偶数, 而  $n$  为偶数时, 给定  $L$  定向时, 若  $L$  的两分支不同向, 则  $L$  的每个交叉点的值均为  $-1$ , 故此时  $wr(L) = -n - A$ 。

当  $A$  为奇数时,  $L$  为纽结, 若  $n$  为奇数, 图  $(A, n)$  的非重边对应的交叉点的值为  $-1$ , 其余交叉点对应的值为  $+1$ , 即

$$wr(L) = (-1)(A-1) + n + A - (A-1) = 2 + n - A;$$

若  $n$  为偶数, 给定  $L$  定向时,  $L$  的每个交叉点的值均为  $+1$ , 同样地, 此时  $wr(L) = n + A$ 。

定理 4.3  $(A, n)$  图对应的链环  $L$  的 Jones 多项式为:

情况 1. 当  $A$  为偶数时, 若  $n$  为奇数时,

$$V_L(t) = t^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{(1+t)^2} \left( t^{-\frac{3}{2}n-A+\frac{1}{2}} - t^{-\frac{n}{2}-A+\frac{3}{2}} \right) [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$$

情况 2. 当  $A$  为偶数时, 若  $n$  为偶数时,  $L$  的两分支同向时,

$$V_L(t) = -t^{\frac{n+3}{2}A-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1+t)^2} \left( -t^{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}} - t^{\frac{n+1}{2}A+\frac{3}{2}} \right) [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$$

当链环两分支不同向时,

$$V_L(t) = -t^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1+t)^2} \left( -t^{-\frac{3}{2}n-A+\frac{1}{2}} - t^{-\frac{n}{2}-A+\frac{3}{2}} \right) [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$$

情况 3. 当  $A$  为奇数时, 若  $n$  为奇数时,

$$V_L(t) = t^{n+1} + \frac{1}{(1+t)^2} (t^{2-A} - t^{n+3-A}) [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$$

情况 4. 当  $A$  为奇数时, 若  $n$  为偶数时,

$$V_L(t) = -t^{\frac{3A}{2}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1+t)^2} \left( t^{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}} + t^{\frac{n+1}{2}A+\frac{3}{2}} \right) [(-t)^{A-1} + t + 1 + t^{-1}]$$

此定理可直接利用引理 1 与定理 4.2 得证。

## 5. 结语

本文主要研究了一类对应于  $(4, n)$  图的特殊链环的 Jones 多项式。并且, 在  $(4, n)$  图的基础上, 通过增加非重边的个数, 构造了  $(A, n)$  图, 研究得到  $(A, n)$  图的 Tutte 多项式后, 再利用寻找  $(4, n)$  图对应的链环的扭数的规律的方法, 将  $A$  分为奇数偶数两种情况进行讨论, 得到四种情形下的  $(A, n)$  图对应的链环  $L$  的 Jones 多项式。

## 参考文献

- [1] Bollobás, B. (1998) Modern Graph Theory. Springer, New York.

- [2] Landvov, R.A. (1998) The Jones Polynomial of Pretzel Knots and Links. *Topology and Its Applications*, **83**, 135-147. [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(97\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00100-4)
- [3] Jin, X.A. and Zhang, F.J. (2010) Oriented State Model of the Jones Polynomial and Its Connection to the Dichromatic Polynomial. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **19**, 81-92. <https://doi.org/10.1142/S0218216510007759>
- [4] 陶志雄. 环面链环的多项式[J]. 浙江科技学院学报, 2013, 25(6): 405-408.
- [5] Kwun, Y.C., Nizami, A.R., Nazeer, W., *et al.* (2019) The Jones Polynomial of Graph Links via the Tutte Polynomial. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **26**, 1114-1126.