

一类改进的灰色绝对关联度模型的性质及其应用

罗丹, 王松华, 黎勇*

百色学院数学与统计学院, 广西 百色

收稿日期: 2022年9月14日; 录用日期: 2022年10月5日; 发布日期: 2022年10月14日

摘要

文章研究灰色系统中一类改进的灰色绝对关联度模型的性质及其应用。根据广义灰色关联分析理论, 采用构造最大值点零化像的方法提出改进的灰色绝对关联度模型的方法。改进的灰色绝对关联度模型具有差序列符号的确定性、规范性、偶对称性、接近性等性质。初步的实例验证表明, 改进的灰色关联度模型能真实地反映序列曲线的关联程度, 所得关联分析结果较为客观可靠, 且易于在计算机上实现。

关键词

灰色系统, 灰色关联分析, 绝对关联度, 灰色关联算子

The Properties and Applications of an Improved Grey Absolute Relational Mode

Dan Luo, Songhua Wang, Yong Li*

School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise Guangxi

Received: Sep. 14th, 2022; accepted: Oct. 5th, 2022; published: Oct. 14th, 2022

Abstract

This paper studies the properties and applications of an improved grey absolute relational degree model for grey relational analysis in grey systems. Based on the theory of generalized grey correlation analysis, an improved grey absolute correlation degree model is proposed by constructing the zero image of the maximum point. The improved grey absolute relational degree model has the properties of difference sequence symbols such as determinacy, normality, even symmetry and proximity. The preliminary example shows that the improved grey relational degree model

*通讯作者。

can truly reflect the correlation degree of the sequence curve, and the obtained correlation analysis results are more objective and reliable, and are easy to be realized on the computer.

Keywords

Grey System, Grey Relational Model, Absolute Degree of Incidence, Grey Relational Operator

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 1982 年邓聚龙教授提出灰色关联分析理论以来, 众多学者参与研究并相继构造了大量灰色关联度模型并将之广泛应用于生产生活实践[1]。1991 年刘思峰教授[2]根据邓氏灰色关联分析模型[3]研究了一类广义灰色关联分析模型, 首次提出了绝对关联分析模型。该模型形式简捷方便计算, 有效解决了许多科研、生产中的实际问题, 一直以来受到研究者的广泛关注。在刘思峰教授提出的在灰色绝对关联分析模型中, 灰色关联算子起到重要的作用。但考虑到绝对关联度分析模型在做实际问题的定量分析时, 存在因自然灾害、战争、疫情等意外因素的影响, 引起系统行为序列数据受到冲击干扰而失真的问题。本文构造一种新的灰色关联算子叫做最大值零化像算子, 结合灰色绝对关联分析模型, 构建了一类改进的灰色绝对关联度模型并讨论其性质和应用。

2. 新的灰色关联算子的构造

定义 1 设系统行为序列 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$, D 为序列算子且

$$X_i D = (x_i(1)d, x_i(2)d, \dots, x_i(n)d),$$

其中 $x_i(k)d = x_i(k) - x_i(M)$, $k=1, 2, \dots, n$, 则称 D 为最大零化算子, $X_i D$ 为 X_i 的最大零化像, 记为

$$X_i D = X_i^0 = \left(x_i^0(1), x_i^0(2), \dots, x_i^0(n) \right).$$

定义 2 设序列 X_i 与 X_j 长度相同, $s_i^{(M)}$, $s_j^{(M)}$ 如定理所述, 则称

$$\mathcal{E}_{ij}^{(M)} = \frac{1 + \left| s_i^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} \right|}{1 + \left| s_i^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} - s_i^{(M)} \right|} \tag{1}$$

为 X_i 与 X_j 的灰色最大值绝对关联度。

3. 改进的灰色绝对关联度模型及其性质

定理 1 设系统行为序列为 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$, 记 $x_i(M) = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_i(k)\}$, 记折线

$(x_i(1) - x_i(M), x_i(2) - x_i(M), \dots, x_i(n) - x_i(M))$ 为 $X_i - x_i(M)$, 令 $s_i^{(M)} = \int_1^n (X_i - x_i(M)) dt$, 则 $s_i^{(M)} \leq 0$ 。

证明：直接利用增长序列、衰减序列、振荡序列的定义及积分的性质，可知定理结论成立。

该定理说明了 $s_i^{(M)}$ 不受到序列性质所影响，具有一定的稳定性。

定理 2 设系统行为序列

$X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$, $X_j = (x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(n))$ 的最大零化像分别为

$$X_i^0 = \left(x_i^0(1), x_i^0(2), \dots, x_i^0(n) \right), \quad X_j^0 = \left(x_j^0(1), x_j^0(2), \dots, x_j^0(n) \right), \quad \text{令}$$

$$s_i - s_j = \int_1^n \left(X_i^0 - X_j^0 \right) dt$$

则(1) 当 X_i^0 恒在 X_j^0 的上方, $s_i - s_j \geq 0$;

(2) 当 X_i^0 恒在 X_j^0 的下方, $s_i - s_j \leq 0$;

(3) 当 X_i^0 恒在 X_j^0 相交, $s_i - s_j$ 的符号不定。

证明：如图 1 所示，图 1(a)中， X_i^0 恒在 X_j^0 的上方，所以 $s_i - s_j \geq 0$ ；图 1(b)中， X_i^0 恒在 X_j^0 相交，所以 $s_i - s_j$ 的符号不定。由此可知，定理结论的成立是显然的。

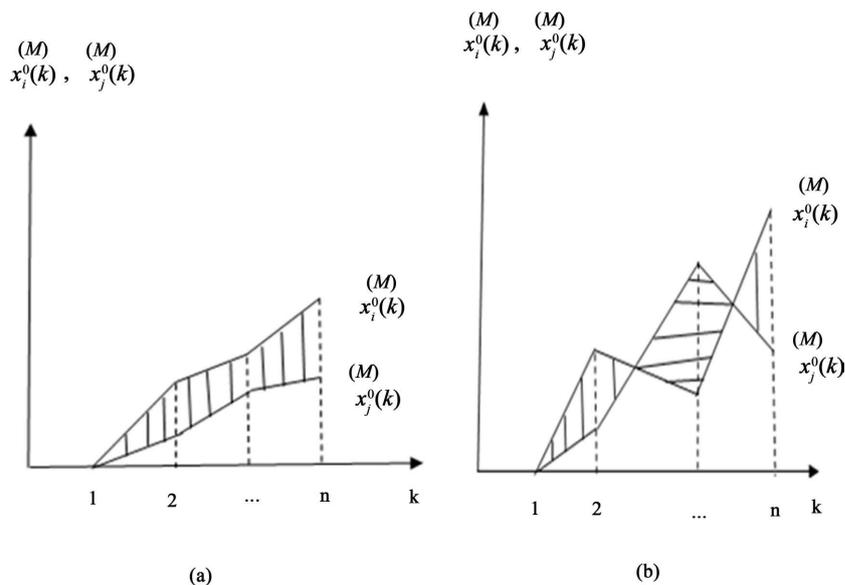


Figure 1. Line chart of X_i^0 , X_j^0

图 1. X_i^0 、 X_j^0 折线图

定理 3 灰色最大值关联度灰色关联度 $\varepsilon_{ij}^{(M)} = \frac{1 + \left| s_i^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} \right|}{1 + \left| s_i^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} \right| + \left| s_j^{(M)} - s_i^{(M)} \right|}$

满足灰色关联公理中规范性、偶对称性与接近性。

证明：由定义 2 的(1)式知，

$$(1) \quad \varepsilon_{ij} \geq 0, \quad \left| s_j - s_i \right| \geq 0, \quad \therefore \varepsilon_{ij} \leq 1 \quad \therefore 0 \leq \varepsilon_{ij} \leq 1, \quad \text{即 } \varepsilon_{ij} \text{ 满足规范性;}$$

$$(2) \quad \because \left| s_j - s_i \right| = \left| s_i - s_j \right| \text{ 易知, } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ 成立, 即 } \varepsilon_{ij} \text{ 满足偶对称性;}$$

$$(3) \quad \text{在定义 2 的(1)式中, 显然 } \left| s_j - s_i \right| \text{ 越小, } \varepsilon_{ij} \text{ 就越大, 所以 } \varepsilon_{ij} \text{ 满足接近性.}$$

引理 1 设 X_i 与 X_j 的长度相同且皆为 1 时距序列, 而 $X_i^0 = \left(x_i^0(1), x_i^0(2), \dots, x_i^0(n) \right)$,

$$X_j^0 = \left(x_j^0(1), x_j^0(2), \dots, x_j^0(n) \right) \text{ 分别为 } X_i \text{ 与 } X_j \text{ 的最大零化像, 令 } x_i^0(M_i) = -\max_{1 \leq k \leq n} \left\{ x_i^0(k) \right\},$$

$$x_j^0(M_j) = -\max_{1 \leq k \leq n} \left\{ x_j^0(k) \right\}, \text{ 则 } \left| s_i \right| = \left| \sum_{k=1, k \neq M_i}^n x_i^0(k) + \frac{1}{2} x_i^0(M_i) \right|, \quad \left| s_j \right| = \left| \sum_{k=1, k \neq M_j}^n x_j^0(k) + \frac{1}{2} x_j^0(M_j) \right|,$$

$$\left| s_i - s_j \right| = \left| \left(\sum_{k=1, k \neq M_i}^n x_i^0(k) - \sum_{k=1, k \neq M_j}^n x_j^0(k) \right) + \frac{1}{2} \left(x_i^0(M_i) - x_j^0(M_j) \right) \right| = \frac{1}{2} \left| x_i^0(M_i) - x_j^0(M_j) \right|$$

定理 4 设 X_i 与 X_j 的长度、时距相同且皆为等时距序列, 则

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \left[1 + \left| \sum_{k=1, k \neq M_i}^n x_i^0(k) + \frac{1}{2} x_i^0(M_i) \right| + \left| \sum_{k=1, k \neq M_j}^n x_j^0(k) + \frac{1}{2} x_j^0(M_j) \right| \right] \\ &\quad \times \left[1 + \left| \sum_{k=1, k \neq M_i}^n x_i^0(k) + \frac{1}{2} x_i^0(M_i) \right| + \left| \sum_{k=1, k \neq M_j}^n x_j^0(k) + \frac{1}{2} x_j^0(M_j) \right| \right] \\ &\quad + \left[\left(\sum_{k=1, k \neq M_i}^n x_i^0(k) - \sum_{k=1, k \neq M_j}^n x_j^0(k) \right) + \frac{1}{2} \left(x_i^0(M_i) - x_j^0(M_j) \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

证明：不妨设 X_i 与 X_j 皆为 1 时距序列, 由引理 1 和定义 2, 即得结论。

4. 应用实例

例 1 由文献[4], 设有数据序列:

$$X_1 = (1.00, 1.30, 2.50, 2.80, 3.00, 4.60, 5.00, 6.40)$$

$$X_2 = (1.20, 1.53, 2.85, 3.18, 3.40, 5.16, 5.60, 7.14)$$

$$X_3 = (1.00, 2.50, 3.00, 1.00, 5.00, 2.00, 7.00, 6.00)$$

其中, X_1 为参考序列, X_2 与 X_3 为相关因素序列。计算得到的关联度及其关联序见表 1, 数据序列折线图见图 2。

由图 2 可以看出, 序列 X_1 和 X_2 的发展趋势更接近, 而序列 X_1 和 X_3 的发展趋势差异较大, 即 $\varepsilon_{13} < \varepsilon_{12}$ 。所以, 本文构造的灰色关联度如实地反映了数据序列发展态势的相似程度。

例 2 由文献[4], 选取来源于中国统计年鉴及其统计公报的中 1995~2007 年的数据进行研究, 原始数据见表 2。以第三产业就业人数为参考序列, 利用绝对关联度和本文的灰关联模型计算结果见表 3。

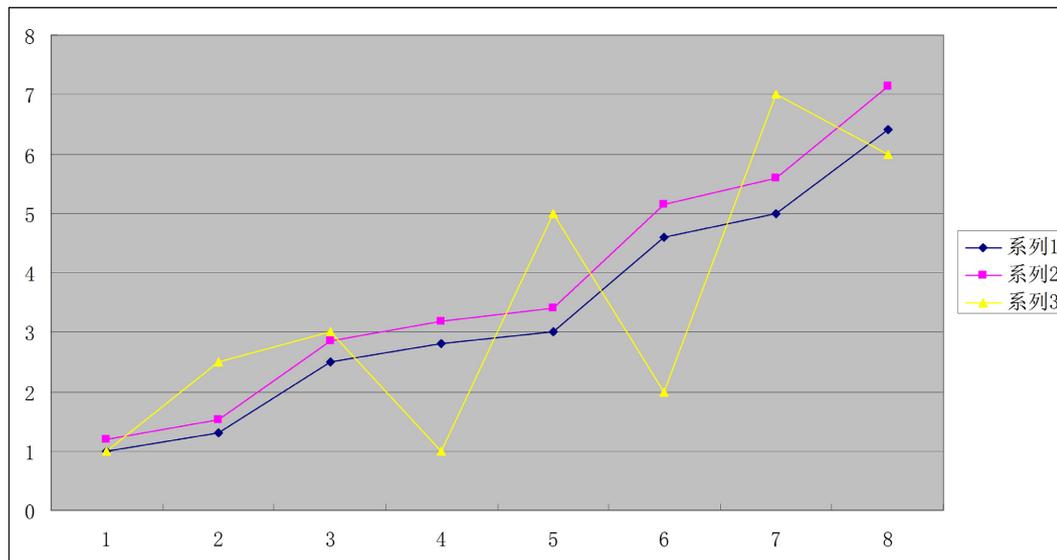


Figure 2. Data series line chart

图 2. 数据序列折线图

Table 1. Comparison of calculation results of correlation degree

表 1. 关联度计算结果比较

类型	绝对关联度	本文的关联度
ϵ_{12}	0.956	0.9555
ϵ_{13}	0.969	0.9308
关联序	$\epsilon_{13} > \epsilon_{12}$	$\epsilon_{13} < \epsilon_{12}$

Table 2. Raw data table

表 2. 原始数据表

年份	第三产业就业	人均 GDP	城市化水平	工业增加值
	人数(万人)	(元)	(%)	(亿元)
1995	16,880	5046	29.04	24,718
1996	17,927	5846	30.48	28,580
1997	18,432	6420	31.91	31,752
1998	18,860	6796	33.35	33,541
1999	19,205	7159	34.78	35,357
2000	19,823	7858	36.22	39,570
2001	20,228	8622	37.66	42,607
2002	21,090	9398	39.09	45,935
2003	21,809	10,542	40.53	53,612
2004	23,011	12,336	41.76	62,815
2005	23,771	14,053	42.99	76,190
2006	24,614	16,165	43.9	90,351
2007	24,917	18,934	44.94	107,367

Table 3. The relevance and ranking of the factors affecting employment in the tertiary industry
表 3. 第三产业就业的影响因素关联度及其排序

	第三产业就业人数	人均 GDP	城市化水平	工业增加值
绝对关联度	1.00	0.916	0.6074	0.5760
排序		1	2	3
本文的关联度	1.00	0.6545	0.7753	0.5036
排序		2	1	3

第三产业就业人数的重要影响因素是人均 GDP、城市化水平和工业增加值。而根据许多发达国家(地区)的发展事实表明,城市化对第三产业就业水平的提高有着直接的促进作用,是影响第三产业就业的最重要的因素。因为城市化过程诱发第三产业新行业出现和推动传统行业发展,同时城市化是工业化聚集表现,而人均 GDP 的持续增加意味着国民收入的不断提高,必然导致城乡居民消费结构发生变化,即加速城市化的进程,从而促进第三产业的发展 and 壮大。由表 3,利用本文的关联度计算,城市化水平对第三产业的就业影响最大,这是符合实际情况的。[4]

5. 结论

文章根据广义灰色关联分析理论,采用构造最大值点零化像的方法提出改进的灰色绝对关联度模型。改进后的灰色绝对关联度模型具有差序列符号的确定性、规范性、偶对称性和接近性等性质。初步的实例验证表明,新的灰色关联度模型更真实地反映序列曲线的关联程度,所得关联分析结果较为客观可靠,较好地解决了在实际问题分析时出现的量化结果与定性分析结果不太相符的问题,且易于在计算机上实现,具有一定的实用参考价值。

基金项目

广西自然科学基金项目(NO.2020GXNSFAA159069)、广西教育科学规划 2021 年度课题(NO.2021A024)。

参考文献

- [1] 刘思峰,蔡华,杨英杰,曹颖. 灰色关联分析模型研究进展[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(8): 2041-2046.
- [2] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [3] Liu, S.F. and Lin, Y. (2011) Grey Information: Theory and Practical Applications. Springer-Verlag, London.
- [4] 崔立志,刘思峰,李致平,崔杰. 一种新的灰色相似关联度模型及其应用[J]. 统计与决策, 2010(7): 7-9.