Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(10), 7392-7399**
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1110785

与θ-型Calderón-Zygmund算子相关的Toeplitz型算子的有界性

张　进

牡丹江师范学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2022年9月24日；录用日期：2022年10月17日；发布日期：2022年10月26日

摘　要

本文证明了当$\gamma=\beta+n/p$时，与θ-型Calderón-Zygmund算子和Lipschitz函数$b\in\dot{\Lambda}_\gamma\left(R^n\right)$相关的Toeplitz型算子是从Lebesgue空间$L^p\left(R^n\right)$到Campanato空间$C^{p,\beta}\left(R^n\right)$有界的。

关键词

θ-型Calderón-Zygmund算子，Toeplitz型算子，Lipschitz函数，Campanato空间

Boundedness of Toeplitz Type Operators Related to θ-Type Calderón-Zygmund Operators

Jin Zhang

Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Sep. 24th, 2022; accepted: Oct. 17th, 2022; published: Oct. 26th, 2022

Abstract

In this paper, we prove that the Toeplitz type operator related to the θ-type Calderón-Zygmund operator and Lipschitz function $b\in\dot{\Lambda}_\gamma\left(R^n\right)$ is bounded from Lebesgue space $L^p\left(R^n\right)$ to Campanato space $C^{p,\beta}\left(R^n\right)$ when $\gamma=\beta+n/p$.

文章引用: 张进. 与 ϑ-型 Calderón-Zygmund 算子相关的 Toeplitz 型算子的有界性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(10): 7392-7399. DOI: 10.12677/aam.2022.1110785

Keywords

***θ*-Type Calderón-Zygmund Operator, Toeplitz Type Operator, Lipschitz Function, Campanato Space**

1. 引言与主要结果

设 T 为经典的 Calderón-Zygmund 算子，T 与 R^n 上局部可积函数 b 生成的交换子 $[b,T]$ 定义为

$$[b,T]f = bT(f) - T(bf)。$$

1976 年，Coifman 等在[1]中证明了当 $b \in BMO(R^n)$ 时，Calderón-Zygmund 算子与 b 生成的交换子 $[b,T]$ 在 $L^p(R^n)$ $(1<p<\infty)$ 上的有界性，并利用交换子 $[b,T]$ 的有界性给出了 BMO 空间的一种等价刻画。1978 年，Janson 在[2]中研究了 Calderón-Zygmund 算子与 b 生成的交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 有界的充分必要条件是 $b \in \dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$，其中 $0<\gamma<1$，$1<p<q<\infty$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\gamma}{n}$。1995 年，Paluszyński 在[3]中得到 Calderón-Zygmund 算子与 b 生成的交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $\dot{F}_p^{\beta,\infty}$ 有界的充分必要条件是 $b \in \dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$，其中 $0<\gamma<1$，$1<p<\infty$。2015 年，Zhang 等在[4]中研究了当 $\gamma=\beta+n/p$ 时，Calderón-Zygmund 算子与 b 生成的交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 有界的充分必要条件是 $b \in \dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$。

1985 年，Yabuta 在[5]中把具有标准核的 Calderón-Zygmund 算子做了推广，引入了如下定义的 θ-型 Calderón-Zygmund 算子，并将其应用于几类拟微分算子的研究中。

定义 1.1 [5]设 θ 是 $(0,\infty)$ 上的非负非减函数且 $\int_0^1 \theta(t)t^{-1}\mathrm{d}t<\infty$，称定义在 $R^n \times R^n \setminus \{(x,x): x\in R^n\}$ 上的可测函数 $K(x,y)$ 是一个 θ 型核，如果

1) $|K(x,y)| \le C|x-y|^{-n}$，当 $x \ne y$ 时；

2) 当 $2|x-z|<|x-y|$ 时，

$$|K(x,y)-K(z,y)|+|K(y,x)-K(y,z)| \le C|x-y|^{-n}\theta\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right).$$

称线性算子 $T: S(R^n) \to S'(R^n)$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子，如果

3) T 能扩张成从 $L^2(R^n)$ 到其自身的有界线性算子；

4) 存在一个 θ 型核 $K(x,y)$，使得对所有的 $f \in C_c^\infty(R^n)$，成立

$$Tf(x)=\int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y，\quad \forall x \in R^n \setminus \operatorname{supp} f，$$

其中 $C_c^\infty(R^n)$ 为 R^n 上具有紧支集的无穷次可微函数空间。

当 $\theta(t)=t^\delta$ $(0<\delta\le 1)$ 时，θ-型 Calderón-Zygmund 算子为具有标准核的 Calderón-Zygmund 算子。

设 T 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子，T 与 R^n 上局部可积函数 b 生成的交换子 $[b,T]$ 定义为

$$[b,T]f = bT(f)-T(bf).$$

以下用 T 表示 θ-型 Calderón-Zygmund 算子。

2002 年，Liu 和 Lu 在[6]中研究了当 $b\in BMO$ 时，交换子 $[b,T]$ 的 $L\log L$ 型的弱型估计，其中 θ 满足 $\int_0^1\theta(t)t^{-1}|\log t|\mathrm{d}t<\infty$。2005 年，张璞和徐罕在[7]中建立了 T 与 BMO 函数 b 生成的高阶交换子的加权尖锐估计。2006 年，程美芳和束立生在[8]中利用交换子的 Sharp 极大估计证明了当 b 属于 Lipschitz 空间时，交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 的有界性，其中 θ 满足 $\int_0^1\theta(t)t^{-(\gamma+1)}\mathrm{d}t<\infty$。2007 年，Zhao 等在[9]中借助分数次积分算子的有界性也得到了交换子 $[b,T]$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 的有界性，其中 b 是 Lipschitz 函数且 $\int_0^1\theta(t)t^{-1}\mathrm{d}t<\infty$。2022 年，朱晓曚受[4]的启发在[10]中证明了当 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$ $(\gamma=\beta+n/p)$ 时，交换子 $[b,T]$ 是从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 有界的。

Toeplitz 型算子是交换子的一种重要的推广，由 Calderón-Zygmund 算子生成的交换子可以看作 Toeplitz 型算子的特殊情形，其定义如下：

定义 1.2 [11]设 $T_{j,1}$，$T_{j,2}$ $(j=1,\cdots,m)$ 是 Calderón-Zygmund 算子的有限序列或 $\pm I$ （I 是恒等算子)，且 $T_{j,1}$，$T_{j,2}$ 是 $L^2(R^n)$ 上有界算子，$M_bf(x)=b(x)f(x)$，则 Toeplitz 型算子定义为

$$T_b=\sum_{j=1}^m T_{j,1}M_bT_{j,2}\,.$$

当 $m=2$，取 $T_{1,1}=I$，$T_{2,2}=-I$，$T_{1,2}$，$T_{2,1}$ 为 Calderón-Zygmund 算子，$M_bf(x)=b(x)f(x)$，此时 Toeplitz 型算子为由 Calderón-Zygmund 算子生成的交换子，即 $T_b(f)=bT(f)-T(bf)$。2001 年，Krantz 和 Li 在[11]中研究了当 b 属于 BMO 空间时，T_b 在齐型空间上的 L^p 有界性。2004 年，张雅静和高慧在[12]中研究了齐型空间上与 Calderón-Zygmund 算子和 Lipschitz 函数相关的 Toeplitz 型算子从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间的有界性。2006 年，林燕等在[13]中将标准的 Calderón-Zygmund 算子替换为强奇异 Calderón-Zygmund 算子，得到了与强奇异 Calderón-Zygmund 算子相关的 Toeplitz 型算子 T_b 在 Lebesgue 空间上的有界性，其中 b 是 BMO 函数或 Lipschitz 函数。

受[4]和[10]的启发，本文将用 θ-型 Calderón-Zygmund 算子替代标准的 Calderón-Zygmund 算子，考虑当 $\gamma=\beta+n/p$ 时，与 θ-型 Calderón-Zygmund 算子和 Lipschitz 函数 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$ 相关的 Toeplitz 型算子 $T_b=\sum_{j=1}^m T_{j,1}M_bT_{j,2}$ 从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 的有界性，其中 $T_{j,1}$ 为 θ-型 Calderón-Zygmund 算子或 $\pm I$，$T_{j,2}$ 是 $L^p(R^n)$ 上有界线性算子，$M_bf(x)=b(x)f(x)$。

定义 1.3 令 $0<\gamma<1$，如果存在一个常数 $C<\infty$，使得对任意的 $x,y\in R^n$，有

$$|b(x)-b(y)|\le C|x-y|^\gamma,$$

那么称 b 属于 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$，满足上式的最小常数 C 定义为 b 的模，记为 $\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}$。

定义 1.4 令 $1\le p<\infty$，$-n/p\le\beta<1$，Campanato 空间 $C^{p,\beta}(R^n)$ 定义为

$$C^{p,\beta}(R^n)=\left\{f\in L^p_{loc}(R^n),\|f\|_{C^{p,\beta}(R^n)}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{C^{p,\beta}(R^n)}:=\sup_B\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

这里的上确界取遍 R^n 中的所有球体 B

下面建立本文的主要结论：

定理 1.1 设 $T_{j,1}(j=1,\cdots,m)$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子或 $\pm I$，且 θ 满足 $\int_0^1\theta(t)t^{-1}\mathrm{d}t<\infty$。设

$1<p<\infty$，$-n/p\le\beta<0$。当 $f\in L^p(R^n)$，$b=1$时，$T_1(f)=0$。若 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$，$0<\gamma=\beta+n/p<\min\{1,n/p\}$，则 T_b 是从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 有界的，且有

$$\|T_b f\|_{C^{p,\beta}(R^n)}\le C\sum_{j=1}^{m}\left(\|T_{j,1}\|+1\right)\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\|f\|_p,$$

其中 $\|T_{j,i}\|(i=1,2)$ 是 $T_{j,i}$ 在 $L^p(R^n)$ 上的算子范数。

注：若 $\theta(t)=t$，$m=2$，$T_{1,1}=I$，$T_{2,2}=-I$，$T_{1,2}$，$T_{2,1}$ 是 Calderón-Zygmund 算子，则可以得到 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 的有界性(见[4])。当 $m=2$，$T_{1,1}=I$，$T_{2,2}=-I$，$T_{1,2}$，$T_{2,1}$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子时，可以得到 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子从 $L^p(R^n)$ 到 $C^{p,\beta}(R^n)$ 的有界性(见[10])。

2. 定理 1.1 的证明

引理 2.1 设 $0<\gamma<1$，$b\in\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)$，$B$ 是 R^n 上的球体，则有

$$\sup_{x\in B}|b(x)-b_B|\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}|B|^{\gamma/n}.$$

引理 2.2 [5]设 T 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子。如果 $1<p<\infty$ 且 $w\in A_p$，那么存在一个常数 $C>0$，有

$$\|Tf\|_{L^p(w)}\le C(p,w)\|f\|_{L^p(w)}.$$

显然，当 $w=1$ 时，θ-型 Calderón-Zygmund 算子 T 是 (p,p) 有界的。

下面对定理 1.1 进行证明。

证明：对任意的 $x_0\in R^n$，记 B 是以 x_0 为中心，r 为半径的球体。令 $B^*=8B$，即 B^* 是 B 的 8 倍同心扩张。对任意的 $f\in L^p(R^n)$，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-(T_b f)_B\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&=\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-c+c-(T_b f)_B\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&\le\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-c\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|(T_b f)_B-c\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&=\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-c\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\frac{1}{|B|}\int_B\left(T_b f(x)-c\right)\mathrm{d}x\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&\le\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-c\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}+\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(x)-c\right|\mathrm{d}x\\
&\le\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(x)-c\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

因为 $T_1(f)=0$，可得 $T_{b_B}(f)=b_BT_1(f)=0$，所以 $T_b(f)=T_{(b-b_B)}(f)$，有

$$T_{(b-b_B)}(f)=T_{(b-b_B)\chi_{B^*}}(f)+T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f).$$

取 $c=\left(T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)\right)_B$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(x)-c\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{B^*}}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\quad+\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)(x)-\left(T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)\right)_B\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.
\end{aligned}
$$

对 I_1 进行估计。当 $T_{j,1}$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子时，对任意的 $x\in B$，根据引理 2.1，引理 2.2 和 $T_{j,2}$ 的 (p,p) 有界性有

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{B^*}}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&=\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\sum_{j=1}^m T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{B^*}}T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{B^*}}T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\frac{\left\|T_{j,1}\right\|}{|B|^{\beta/n+1/p}}\left(\int_{R^n}\left|M_{(b-b_B)\chi_{B^*}}T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&= C\sum_{j=1}^m\frac{\left\|T_{j,1}\right\|}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_{B^*}\left|\left(b(x)-b_B\right)T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\frac{\left\|T_{j,1}\right\|}{|B|^{\gamma/n}}|B|^{\gamma/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\left(\int_{B^*}\left|T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\left\|T_{j,1}\right\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\left(\int_{R^n}\left|T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\left\|T_{j,1}\right\|\left\|T_{j,2}\right\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\|f\|_p .
\end{aligned}
$$

若 $T_{j,1}=\pm I$，则根据引理 2.1 和 $T_{j,2}$ 的 (p,p) 有界性可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{B^*}}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{B^*}}T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&= C\sum_{j=1}^m\frac{1}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|M_{(b-b_B)\chi_{B^*}}T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

$$= C\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B \left|\left(b(x)-b_B\right)T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\le C\sum_{j=1}^{m}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\left(\int_{R^n}\left|T_{j,2}(f)(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\le C\sum_{j=1}^{m}\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\|f\|_p .$$

因此

$$\mathrm{I}_1 \le C\sum_{j=1}^{m}\|T_{j,1}\|\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\|f\|_p .$$

再对 I_2 进行估计。若 $T_{j,1}$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子且 $\gamma=\beta+n/p$，则对任意的 $x\in B$ 有

$$\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)(x)-\left(T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)\right)_B\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\le C\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(x)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(w)\right|\mathrm{d}w\right)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

现考虑$\left|T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(x)-T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(w)\right|$。

$$\left|T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(x)-T_{j,1}M_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}T_{j,2}(f)(w)\right|$$
$$\le \int_{(B^*)^c}\left|k(x,z)-k(w,z)\right|\left|b(z)-b_B\right|\left|T_{j,2}(f)(z)\right|\mathrm{d}z.$$

由于 $x,w\in B$， $z\in(B^*)^c$，可知 $2|x-w|<|x-z|$，故有

$$\left|k(x,z)-k(w,z)\right|\le C\theta\left(\frac{|x-w|}{|x-z|}\right)\frac{1}{|x-z|^n}.$$

根据引理 2.1，$T_{j,2}$ 的 (p,p) 有界性和 Hölder 不等式有

$$\int_{(B^*)^c}\left|k(x,z)-k(w,z)\right|\left|b(z)-b_B\right|\left|T_{j,2}(f)(z)\right|\mathrm{d}z$$
$$\le C\int_{(B^*)^c}\theta\left(\frac{|x-w|}{|x-z|}\right)\frac{1}{|x-z|^n}\left|b(z)-b_B\right|\left|T_{j,2}(f)(z)\right|\mathrm{d}z$$
$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kB^*\setminus 2^{k-1}B^*}\theta\left(\frac{|x-w|}{|x-z|}\right)\frac{1}{|x-z|^n}\left|b(z)-b_B\right|\left|T_{j,2}(f)(z)\right|\mathrm{d}z$$
$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\theta\left(2^{-k}\right)\frac{|z-x_0|^\gamma}{\left|2^kB^*\right|}\int_{2^kB^*}\left|T_{j,2}(f)(z)\right|\mathrm{d}z$$
$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(R^n)}\theta\left(2^{-k}\right)\left|2^kB^*\right|^{\gamma/n}\left(\frac{1}{\left|2^kB^*\right|}\int_{2^kB^*}\left|T_{j,2}(f)(z)\right|^p \mathrm{d}z\right)^{1/p}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\theta\left(2^{-k}\right)\left|2^k B^*\right|^{\beta/n}\left(\int_{R^n}\left|T_{j,2}(f)(z)\right|^p \mathrm{d}z\right)^{1/p}\\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|T_{j,2}\|\|f\|_p|B|^{\beta/n}\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(2^{-k}\right)2^{k\beta}\\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|T_{j,2}\|\|f\|_p|B|^{\beta/n}\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(2^{-k}\right)\\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|T_{j,2}\|\|f\|_p|B|^{\beta/n}\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t\\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|T_{j,2}\|\|f\|_p|B|^{\beta/n}.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(2^{-k}\right)\le C\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t.
$$

因此可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)(x)-\left(T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)\right)_B\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^{m}\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|f\|_p.
\end{aligned}
$$

若 $T_{j,1}=\pm I$，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)(x)-\left(T_{(b-b_B)\chi_{(B^*)^c}}(f)\right)_B\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^{m}\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|f\|_p.
\end{aligned}
$$

故可得

$$
\mathrm{I}_2\le C\sum_{j=1}^{m}\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|f\|_p.
$$

综上所述，

$$
\|T_b f\|_{C^{p,\beta}(R^n)}\le C\sum_{j=1}^{m}\left(\|T_{j,1}\|+1\right)\|T_{j,2}\|\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\gamma}(R^n)}\|f\|_p.
$$

3. 总结

本文用 θ-型 Calderón-Zygmund 算子替代标准的 Calderón-Zygmund 算子，得到了与 θ-型 Calderón-Zygmund 算子和 Lipschitz 函数 $b\in\dot{\Lambda}_{\gamma}\left(R^n\right)$ 相关的 Toeplitz 型算子 T_b 从 $L^p\left(R^n\right)$ 到 $C^{p,\beta}\left(R^n\right)$ 的有界性，其中 $\gamma=\beta+n/p$。此结果包含了[10]中定理 1.1 的结论，显然也包含了[4]中定理 1.1(a) $\Rightarrow$ (b)的结论。

基金项目

黑龙江省省属本科高校中央支持地方高校改革发展资金(优秀青年人才)项目(No. 2020YQ07)；牡丹江师范学院科研团队项目(D211220637)。

参考文献

[1] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[2] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[3] Paluszyński, M. (1995) Characterization of the Besov Spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[4] Zhang, L., Shi, S.G. and Huang, H. (2015) New Characterizations of Lipschitz Spaces via Commutators on Morrey Spaces. *Advances in Mathematics* (*China*), **44**, 899-905.

[5] Yabuta, K. (1985) Generalizations of Calderón-Zygmund Operators. *Studia Mathematica*, **82**, 17-31. https://doi.org/10.4064/sm-82-1-17-31

[6] Liu, Z.G. and Lu, S.Z. (2002) Endpoint Estimates for Commutators of Calderón-Zygmund Type Operators. *Kodai Mathematical Journal*, **25**, 79-88. https://doi.org/10.2996/kmj/1106171078

[7] 张璞，徐罕. Calderón-Zygmund 型算子交换子的加权尖锐估计[J]. 数学学报, 2005, 48(4): 625-636.

[8] 程美芳，束立生. θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子交换子在 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性[J]. 数学研究, 2006, 39(4): 375-378.

[9] Zhao, K., Ma, L.M. and Zhou, S.J. (2007) Boundedness of Commutators of Generalized Calderón-Zygmund Operators. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, **27**, 53-66.

[10] 朱晓朦. θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 54-61. https://doi.org/10.12677/PM.2022.121008

[11] Krantz, S.G. and Li, S.Y. (2001) Boundedness and Compactness of Integral Operators on SPACES of homogeneous Type and Applications, I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **258**, 629-641. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7402

[12] 张雅静，高慧. 齐型空间上 Toeplitz 型算子 $L^p \to \dot{F}_p^{\beta,\infty}$ 有界性[J]. 河北师范大学学报, 2004, 28(3): 228-230+253.

[13] 林燕，陆善镇. 与强奇异 Calderón-Zygmund 算子相关的 Toeplitz 型算子[J]. 中国科学(A 辑: 数学), 2006, 36(6): 615-630.