

# 区间毕达哥拉斯犹豫模糊Heronian信息集成算子及其在多属性决策中的应用

张洋<sup>1</sup>, 纪颖<sup>2</sup>, 周梓昕<sup>1</sup>, 耿瑞娟<sup>1</sup>

<sup>1</sup>上海理工大学理学院, 上海

<sup>2</sup>上海大学管理学院, 上海

收稿日期: 2022年9月26日; 录用日期: 2022年10月19日; 发布日期: 2022年10月28日

## 摘要

针对区间毕达哥拉斯犹豫模糊环境下的变量隶属度、非隶属度和属性的关联性融合问题, 本文创新地将Heronian信息集成算子与区间毕达哥拉斯犹豫模糊数结合, 定义了区间毕达哥拉斯犹豫模糊Heronian加权平均算子(IVPHFHW)和区间毕达哥拉斯犹豫模糊Heronian几何加权算子(IVPHFGHW), 研究了IVPHFHW算子和IVPHFGHW算子的置换不变性、单调性、有界性。然后, 针对属性值为区间毕达哥拉斯犹豫模糊数的多属性问题, 建立了基于区间毕达哥拉斯犹豫模糊Heronian加权算子的多属性决策模型, 给出了一种综合的区间毕达哥拉斯犹豫模糊数的多属性决策方法。最后, 通过多属性决策实例说明了Heronian信息集成算子在区间毕达哥拉斯犹豫模糊环境中的可行性和优越性。

## 关键词

区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, Heronian算子, 多属性决策

# Interval Pythagorean Hesitating Fuzzy Heronian Information Integration Operator and Their Application to Multi-Attribute Decision Making

Yang Zhang<sup>1</sup>, Ying Ji<sup>2</sup>, Zixin Zhou<sup>1</sup>, Ruijuan Geng<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

<sup>2</sup>School of Management, Shanghai University, Shanghai

Received: Sep. 26<sup>th</sup>, 2022; accepted: Oct. 19<sup>th</sup>, 2022; published: Oct. 28<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

For the correlation fusion of variable membership, non-membership and attribute in the interval Pythagorean hesitant fuzzy environment, this paper innovatively combined the Heronian information integration operator with the interval Pythagorean hesitant fuzzy number. Interval Pythagorean hesitant Fuzzy Heronian weighted mean operators (IVPHFHW) and interval Pythagorean hesitant Fuzzy Heronian geometric weighted mean operators (IVPHFGHW) are defined, and study the permutation invariance, monotonicity and boundedness of these operators. Then, establish a multi-attribute decision making model based on interval Pythagorean hesitant fuzzy Heronian weighting operator for multi-attribute problems with interval Pythagorean hesitant fuzzy number, and give a comprehensive multi-attribute decision making method. Finally, an example of multi-attribute decision making is given to illustrate the feasibility and rationality of the method.

## Keywords

Interval Pythagorean Hesitant Fuzzy Number, Heronian Operator, Multi Attribute Decision Making Problem

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

1986年 Atanassov 在经典模糊集理论[1]的基础上提出了直觉模糊集[2], 随后, Atanassov 等又将其推广并提出区间直觉模糊集理论[3], 使用隶属度  $\mu$  和非隶属度  $\nu$  来描绘信息的不确定性, 并满足  $\mu + \nu < 1$ 。但在实际决策问题中可能出现隶属度和非隶属度之和大于 1 的情况, 显然此时使用直觉模糊理论分析容易出现偏差。因此, Yager [4] [5]引入了毕达哥拉斯模糊集来解决该问题, 其满足隶属度  $\mu$  和非隶属度  $\nu$  的平方和不大于 1, 即  $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$ 。此后, Torra 提出了犹豫模糊集[6]的概念, 使用几个模糊数的集合来表示一个元素属于一个集合的隶属度, 用来反映多个决策者对其不同的决策判断。近年来一些学者为了更加准确地描述决策信息的模糊性和不确定性, 将毕达哥拉斯模糊集和犹豫模糊集结合起来提出了毕达哥拉斯犹豫模糊集。但是不同的学者对其有不同的构造方法, 刘卫峰[7]和 Khan [8]认为一个毕达哥拉斯犹豫模糊数的隶属度和非隶属度分别属于两个犹豫模糊集合, Wei [9]认为多个毕达哥拉斯模糊数组成的集合为一个毕达哥拉斯犹豫模糊数。Zhang [10]对毕达哥拉斯犹豫模糊集进行推广, 用区间数代替原有的实数的表示形式。提出了区间毕达哥拉斯犹豫模糊集, 可以更加准确地描述实际问题中的模糊信息, 具有更强的模糊信息处理和表达能力。

Zheng [11]构造了基础的区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关算子, 并将其运用于多属性决策环境中。李龙妹[12]等在不确定环境下对区间毕达哥拉斯犹豫模糊集进行研究, 给出度量不确定信息的模糊因子和直觉因子。黄月[13]将区间值毕达哥拉斯犹豫模糊信息融入到粗糙集进行分析, 增强了处理不确定信息的鲁棒性。李进军[14]将 Heronian 算子引入到区间值毕达哥拉斯模糊集中, 给出区间毕达哥拉斯模糊 Heronian 平均(IVPFHM)算子的定义及基本性质。李龙妹[15]等基于香农熵将模糊因子和直觉因子结合, 提出了一个区间毕达哥拉斯犹豫模糊熵公式和相似性度量, 并成功运用于决策问题中。到目前为止关于

区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集的研究还很少, 而且还没有学者研究 Heronian 平均算子在区间毕达哥拉斯犹豫模糊集中的应用。

在现实决策问题中属性之间都存在相互依赖和影响性, 而大多数的信息集成算子都无法考虑到属性之间的相互关联性。Heronian 平均算子从属性变量之间的影响性出发, 综合考虑变量之间的关联性, 使得决策结果更加准确和客观。基于此, 本文将 Heronian 平均算子推广至区间毕达哥拉斯犹豫模糊集中, 首先定义 IVPHFHWM 算子和 IVPHFGHWM 算子, 介绍并证明了 IVPHFHWM 算子和 IVPHFGHWM 算子的置换不变性、有界性和单调性。最后基于 IVPHFHWM 算子和 IVPHFGHWM 算子提出了一种基于优势理论的比率分析和全乘法形式的区间毕达哥拉斯犹豫模糊多属性决策排名方法(IVPHF-RAFMDT), 并通过实例验证和对比分析说明了该方法在区间毕达哥拉斯犹豫模糊环境中的有效性和优越性。

## 2. 预备知识

### 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集

定义 1 [10] 设  $X$  是论域, 称  $P$  为  $X$  上一个区间毕达哥拉斯犹豫模糊集(IVPHFS)定义为:

$$P = \{ \langle x, h_p(x) \rangle \mid x \in X \}$$

其中  $h_p(x) = \{ \langle \Gamma_p(x), \Psi_p(x) \rangle \mid \Gamma_p(x) = [\mu_p(x)^L, \mu_p(x)^U] \subseteq [0, 1],$

$$\Psi_p(x) = [v_p(x)^L, v_p(x)^U] \subseteq [0, 1], (\mu_p(x)^U)^2 + (v_p(x)^U)^2 \leq 1 \}$$

其中  $\Gamma_p(x)$  和  $\Psi_p(x)$  分别表示  $X$  中的元素  $x$  属于集合  $P$  的可能隶属度区间和可能非隶属度区间。

称

$$\pi_p(x) = \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{\substack{\mu_p(x)^U, \mu_p(x)^L \in \Gamma_p(x) \\ v_p(x)^U, v_p(x)^L \in \Psi_p(x)}} [\pi_p(x)^L, \pi_p(x)^U] \mid \pi_p(x)^L = \sqrt{1 - (\mu_p(x)^U)^2 - (v_p(x)^U)^2}, \\ \pi_p(x)^U = \sqrt{1 - (\mu_p(x)^L)^2 - (v_p(x)^L)^2} \end{array} \right\}$$

为区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集的区间犹豫度集合。

为了方便, 称  $\tilde{P} = h_{\tilde{P}}(x)$  为一个区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, 其中

$\tilde{P} = \{ \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \mid \tilde{\Gamma} = [\mu^L, \mu^U], \tilde{\Psi} = [v^L, v^U], (\mu^U)^2 + (v^U)^2 \leq 1 \}$ 。当  $\tilde{P}$  中只含有一个元素时, 则区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集转化为区间值毕达哥拉斯模糊集。当  $\tilde{P}$  中所有元素都满足  $\mu^L = \mu^U, v^L = v^U$  时, 则区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集转化为毕达哥拉斯犹豫模糊集。当  $\tilde{P}$  中所有元素都满足  $\mu^U + v^U < 1$  时, 则区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集可以视为区间值直觉犹豫模糊集。

定义 2 [10] 设  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{P}_1$  和  $\tilde{P}_2$  为三个区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, 其中

$$\tilde{P} = \{ \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \mid \tilde{\Gamma} = [\mu^L, \mu^U], \tilde{\Psi} = [v^L, v^U] \}, \quad \tilde{P}_1 = \{ \langle \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Psi}_1 \rangle \mid \tilde{\Gamma}_1 = [\mu_1^L, \mu_1^U], \tilde{\Psi}_1 = [v_1^L, v_1^U] \},$$

$$\tilde{P}_2 = \{ \langle \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Psi}_2 \rangle \mid \tilde{\Gamma}_2 = [\mu_2^L, \mu_2^U], \tilde{\Psi}_2 = [v_2^L, v_2^U] \}, \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \tilde{P} = \left\{ \left\langle \left[ \sqrt{1 - (1 - (\mu^L)^\lambda)}, \sqrt{1 - (1 - (\mu^U)^\lambda)} \right], [(\nu^L)^\lambda, (\nu^U)^\lambda] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P} \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}^\lambda &= \left\{ \left\langle \left[ (\mu^L)^\lambda, (\mu^U)^\lambda \right], \left[ \sqrt{1 - (1 - (v^L)^\lambda)}^\lambda, \sqrt{1 - (1 - (v^U)^\lambda)}^\lambda \right] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P} \right\} \\ \tilde{P}^C &= \left\{ \left\langle [v^L, v^U], [\mu^L, \mu^U] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P} \right\} \\ \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2 &= \left\{ \left\langle \left[ \sqrt{(\mu_1^L)^2 + (\mu_2^L)^2 - (\mu_1^L)^2 (\mu_2^L)^2}, \sqrt{(\mu_1^U)^2 + (\mu_2^U)^2 - (\mu_1^U)^2 (\mu_2^U)^2} \right], \right. \right. \\ &\quad \left. \left. [v_1^L v_2^L, v_1^U v_2^U] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \in \tilde{P}_i, i=1,2 \right\} \\ \tilde{P}_1 \otimes \tilde{P}_2 &= \left\{ \left\langle \left[ \mu_1^L \mu_2^L, \mu_1^U \mu_2^U \right], \left[ \sqrt{(v_1^L)^2 + (v_2^L)^2 - (v_1^L)^2 (v_2^L)^2}, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{(v_1^U)^2 + (v_2^U)^2 - (v_1^U)^2 (v_2^U)^2} \right] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \in \tilde{P}_i, i=1,2 \right\} \\ \tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2 &= \left\{ \left\langle \left[ \max \{ \mu_1^L, \mu_2^L \}, \max \{ \mu_1^U, \mu_2^U \} \right], \left[ \min \{ v_1^L, v_2^L \}, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \min \{ v_1^U, v_2^U \} \right] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \in \tilde{P}_i, i=1,2 \right\} \\ \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2 &= \left\{ \left\langle \left[ \min \{ \mu_1^L, \mu_2^L \}, \min \{ \mu_1^U, \mu_2^U \} \right], \left[ \max \{ v_1^L, v_2^L \}, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \max \{ v_1^U, v_2^U \} \right] \right\rangle \mid \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \in \tilde{P}_i, i=1,2 \right\} \end{aligned}$$

定义 3 [10] 设  $\tilde{P} = \{ \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \mid \tilde{\Gamma} = [\mu^L, \mu^U], \tilde{\Psi} = [v^L, v^U] \}$  为区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, 其得分函数  $S(\tilde{P})$  为

$$\begin{aligned} S(\tilde{P}) &= \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} (\tilde{\Gamma}^2 - \tilde{\Psi}^2) \\ &= \left[ \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} \left( (\mu^L)^2 - (v^U)^2 \right), \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} \left( (\mu^U)^2 - (v^L)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

精确函数  $H(\tilde{P})$  为

$$\begin{aligned} H(\tilde{P}) &= \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} (\tilde{\Gamma}^2 + \tilde{\Psi}^2) \\ &= \left[ \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} \left( (\mu^L)^2 + (v^L)^2 \right), \frac{1}{2\#h} \sum_{\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Psi} \rangle \in \tilde{P}} \left( (\mu^U)^2 + (v^U)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

其中  $\#h$  表示  $\tilde{P}$  中的元素个数。

定义 4 [10] 设  $\tilde{P}_1$  和  $\tilde{P}_2$  为两个区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, 则有

如果  $P(S(\tilde{P}_1) > S(\tilde{P}_2)) > 0.5$ , 则有  $\tilde{P}_1 > \tilde{P}_2$ 。

如果  $P(S(\tilde{P}_1) > S(\tilde{P}_2)) = 0.5$ , 那么

如果  $P(H(\tilde{P}_1) > H(\tilde{P}_2)) > 0.5$ , 则有  $\tilde{P}_1 > \tilde{P}_2$ 。

如果  $P(H(\tilde{P}_1) > H(\tilde{P}_2)) = 0.5$ , 则有  $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2$ 。

### Heronian 平均算子

定义 5 [16] 设  $p, q \geq 0$  且不同时为 0,  $\alpha_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 若 HM 满足:

$$HM^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \left( \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1, j=i}^n \alpha_i^p \alpha_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (1)$$

则称 HM 为 Heronian 平均算子。

### 几何 Heronian 平均算子

定义 6 [17] 设  $p, q \geq 0$  且不同时为 0,  $\alpha_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 若 GHM 满足:

$$GHM^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{p+q} \left( \prod_{i=1, j=i}^n (p\alpha_i + q\alpha_j) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \quad (2)$$

则称 GHM 为几何 Heronian 平均算子。

## 3. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊 Heronian 加权平均(IVPHFHW)算子

定义 7 设  $p, q \geq 0$  且不同时为 0,  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯

犹豫模糊数, 权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则 IVPHFHW 算子为

$$IVPHFHW^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) = \left( \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1, j=i}^n \left( (\omega_i \tilde{P}_i)^p \otimes (\omega_j \tilde{P}_j)^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (3)$$

定理 1 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊变量,  $p, q \geq 0$

且不同时为 0, 权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 利用 IVPHFHW 算子集成后的结果仍是区间毕达哥拉斯犹豫模糊变量, 且

$$IVPHFHW^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i, [\mu_j^L, \mu_j^U] \in \tilde{\Gamma}_j, [v_j^L, v_j^U] \in \tilde{\Psi}_j} ([a, b], [c, d]) \quad (4)$$

其中

$$a = \left[ \sqrt[2]{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right]^{\frac{1}{p+q}}$$

$$b = \left[ \sqrt[2]{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^U)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^U)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right]^{\frac{1}{p+q}}$$

$$c = \sqrt{1 - \left( 1 - \left( \prod_{i=1, j=1}^n \sqrt{1 - \left( (1 - (\mu_i^L)^{2\omega_i} \right)^p \left( 1 - (\mu_j^L)^{2\omega_j} \right)^q} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^2}^{\frac{1}{p+q}}$$

$$d = \sqrt{1 - \left( 1 - \left( \prod_{i=1, j=1}^n \sqrt{1 - \left( (1 - (\nu_i^U)^{2\omega_i} \right)^p \left( 1 - (\nu_j^U)^{2\omega_j} \right)^q} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^2}^{\frac{1}{p+q}}$$

证明：由区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的运算法则可得

$$\omega_i \tilde{P}_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [\nu_i^L, \nu_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \left\{ \left\langle \left[ \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}}, \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^U)^2)^{\omega_i}} \right], \left[ (\nu_i^L)^{\omega_i}, (\nu_i^U)^{\omega_i} \right] \right\rangle \right\}$$

$$\omega_j \tilde{P}_j = \bigcup_{\substack{[\mu_j^L, \mu_j^U] \in \tilde{\Gamma}_j \\ [\nu_j^L, \nu_j^U] \in \tilde{\Psi}_j}} \left\{ \left\langle \left[ \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}}, \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^U)^2)^{\omega_j}} \right], \left[ (\nu_j^L)^{\omega_j}, (\nu_j^U)^{\omega_j} \right] \right\rangle \right\}$$

则

$$(\omega_i \tilde{P}_i)^p = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [\nu_i^L, \nu_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \left\{ \left\langle \left[ \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p, \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^U)^2)^{\omega_i}} \right)^p \right], \left[ \sqrt{1 - (1 - (\nu_i^L)^{2\omega_i})^p}, \sqrt{1 - (1 - (\nu_i^U)^{2\omega_i})^p} \right] \right\rangle \right\}$$

$$(\omega_j \tilde{P}_j)^q = \bigcup_{\substack{[\mu_j^L, \mu_j^U] \in \tilde{\Gamma}_j \\ [\nu_j^L, \nu_j^U] \in \tilde{\Psi}_j}} \left\{ \left\langle \left[ \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q, \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^U)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right], \left[ \sqrt{1 - (1 - (\nu_j^L)^{2\omega_j})^q}, \sqrt{1 - (1 - (\nu_j^U)^{2\omega_j})^q} \right] \right\rangle \right\}$$

所以

$$(\omega_i \tilde{P}_i)^p \otimes (\omega_j \tilde{P}_j)^q$$

$$= \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [\nu_i^L, \nu_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \left\{ \left\langle \left[ \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q, \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^U)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^U)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right], \left[ \sqrt{1 - (1 - (\nu_i^L)^{2\omega_i})^p \left( 1 - (\nu_j^L)^{2\omega_j} \right)^q}, \sqrt{1 - (1 - (\nu_i^U)^{2\omega_i})^p \left( 1 - (\nu_j^U)^{2\omega_j} \right)^q} \right] \right\rangle \right\}$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1, j=i}^n \left( (\omega_i \tilde{P}_i)^p \otimes (\omega_j \tilde{P}_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \left\{ \left[ \left( \sqrt{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right) \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right]^{\frac{1}{p+q}} \right. \\ & \quad \left. \left[ \sqrt{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^U)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^U)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right) \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right]^{\frac{1}{p+q}} \right. \\ & \quad \left. \left[ \sqrt{1 - \left( 1 - \left( \prod_{i=1, j=1}^n \sqrt{1 - \left( (1 - (v_i^L)^{2\omega_i})^p (1 - (v_j^L)^{2\omega_j})^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left[ \sqrt{1 - \left( 1 - \left( \prod_{i=1, j=1}^n \sqrt{1 - \left( (1 - (v_i^U)^{2\omega_i})^p (1 - (v_j^U)^{2\omega_j})^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right] \right]^{\frac{1}{p+q}} \right\} \end{aligned}$$

由此可知，上述定理 1 得证。

**定理 2** (置换不变性) 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊

集， $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  为  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$  的任一置换，则

$$\text{IVPHFHM}^{p,q}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$$

**证明：** 因为  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  是  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$  的任一置换，所以对于任意的  $Q_i$  和  $Q_j$  总存在唯一的  $\tilde{P}_x$  和  $\tilde{P}_y$  与之对应，所以

$$\begin{aligned} \text{IVPHFHM}^{p,q}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= \left( \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1, j=i}^n \left( (\omega_i Q_i)^p \otimes (\omega_j Q_j)^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \left( \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{x=1, y=x}^n \left( (\omega_x \tilde{P}_x)^p \otimes (\omega_y \tilde{P}_y)^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \end{aligned}$$

**定理 3** (有界性)  $\tilde{P}_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊数，权重

向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ，则

$$\tilde{P}^L \leq \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \leq \tilde{P}^U$$

其中  $\tilde{P}^L = \min_i(\omega_i \tilde{P}_i)$ ,  $\tilde{P}^U = \max_i(\omega_i \tilde{P}_i)$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明 } \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) &= \left( \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1, j=i}^n \left( (\omega_i \tilde{P}_i)^p \otimes (\omega_j \tilde{P}_j)^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &\leq \left( \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1, j=i}^n \left( (\tilde{P}^U)^p \otimes (\tilde{P}^U)^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \left( \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} (\tilde{P}^U)^{p+q} \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \tilde{P}^U \end{aligned}$$

同理可证得  $\tilde{P}^L \leq \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$ 。

即  $\tilde{P}^L \leq \text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \leq \tilde{P}^U$

**定理 4** (单调性) 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \}$  和  $P_i^* = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \Gamma_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \Psi_i}} \{ \langle \tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i \rangle \}$  为两个区间毕达哥拉斯犹豫模糊

数, 如果对任意的  $i(i=1, 2, \dots, n)$  都有  $\tilde{\Gamma}_i \geq \Gamma_i^*$ ,  $\tilde{\Psi}_i \leq \Psi_i^*$ , 则

$$\text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \geq \text{IVPHFHM}^{p,q}(P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots, P_n^*)$$

**证明:** 因为  $[\tilde{\mu}^L, \tilde{\mu}^U] = \tilde{\Gamma}_i \geq \Gamma_i^* = [{}^* \mu^L, {}^* \mu^U]$

$$\text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i \\ [\mu_j^L, \mu_j^U] \in \tilde{\Gamma}_j, [v_j^L, v_j^U] \in \tilde{\Psi}_j}} ([a, b], [c, d])$$

$$\text{IVPHFHM}^{p,q}(P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots, P_n^*) = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \Gamma_i, [v_i^L, v_i^U] \in \Psi_i \\ [\mu_j^L, \mu_j^U] \in \Gamma_j, [v_j^L, v_j^U] \in \Psi_j}} ([a^*, b^*], [c^*, d^*])$$

所以

$$\begin{aligned} a &= \left( \sqrt[2]{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - (\mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &> \left( \sqrt[2]{1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( 1 - \left( \left( \sqrt{1 - (1 - ({}^* \mu_i^L)^2)^{\omega_i}} \right)^p \left( \sqrt{1 - (1 - ({}^* \mu_j^L)^2)^{\omega_j}} \right)^q \right)^2 \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right)^{\frac{1}{p+q}} = a^* \end{aligned}$$

同理可得  $b > b^*$ ,  $c < c^*$  和  $d < d^*$

所以  $\text{IVPHFHM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \geq \text{IVPHFHM}^{p,q}(P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots, P_n^*)$



#### 4. 区间值毕达哥拉斯犹豫模糊几何 Heronian 加权(IVPHFGHWM)算子

**定义 8** 设  $p, q \geq 0$  且不同时为 0,  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯

犹豫模糊数。权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则 IVPHFGHWM 算子为

$$\text{IVPHFGHWM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) = \frac{1}{p+q} \left( \bigoplus_{i=1, j=i}^n (p\tilde{P}_i^{\omega_i} \oplus q\tilde{P}_j^{\omega_j}) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \quad (5)$$

**定理 5** 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊变量,  $p, q \geq 0$

且不同时为 0, 权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 利用 IVPHFGHWM 算子集成后的结果仍是区间毕达哥拉斯犹豫模糊变量, 且

$$\text{IVPHFGHWM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i, [\mu_j^L, \mu_j^U] \in \tilde{\Gamma}_j, [v_j^L, v_j^U] \in \tilde{\Psi}_j} ([e, f], [g, h]) \quad (6)$$

其中

$$e = \sqrt{1 - \left( 1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( \left( 1 - (\mu_i^L)^{2\omega_i} \right)^p \left( 1 - (\mu_j^L)^{2\omega_j} \right)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}}$$

$$f = \sqrt{1 - \left( 1 - \prod_{i=1, j=1}^n \left( \left( 1 - (\mu_i^U)^{2\omega_i} \right)^p \left( 1 - (\mu_j^U)^{2\omega_j} \right)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}}$$

$$g = \left( \prod_{i=1, j=1}^n \left( \left( 1 - \left( 1 - (v_i^L)^2 \right)^{\omega_i} \right)^p \left( 1 - \left( 1 - (v_j^L)^2 \right)^{\omega_j} \right)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$h = \left( \prod_{i=1, j=1}^n \left( \left( 1 - \left( 1 - (v_i^U)^2 \right)^{\omega_i} \right)^p \left( 1 - \left( 1 - (v_j^U)^2 \right)^{\omega_j} \right)^q \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right)^{\frac{1}{p+q}}$$

**定理 6** (置换不变性) 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊

数,  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$  为  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$  的任一置换, 则

$$\text{IVPHFGHWM}^{p,q}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \text{IVPHFGHWM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n)$$

**定理 7** (有界性)  $\tilde{P}_i = \bigcup_{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i, [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i} \{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$  为一组区间毕达哥拉斯犹豫模糊数, 权

重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)^T$  且  $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则

$$\hat{P}^L \leq \text{IVPHFGHWM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \leq \hat{P}^U$$

其中  $\hat{P}^L = \min(\omega_i \tilde{P}_i)$ ,  $\hat{P}^U = \max(\omega_i \tilde{P}_i)$ 。

**定理 8** (单调性) 设  $\tilde{P}_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_i}} \{(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\Psi}_i)\}$  和  $P'_i = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}'_i \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}'_i}} \{(\tilde{\Gamma}'_i, \tilde{\Psi}'_i)\}$  为两个区间毕达哥拉斯犹豫模糊数,

如果对任意的  $i (i=1, 2, \dots, n)$  都有  $\tilde{\Gamma}_i \geq \tilde{\Gamma}'_i$ ,  $\tilde{\Psi}_i \leq \tilde{\Psi}'_i$ , 则

$$\text{IVPHFGHWM}^{p,q}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots, \tilde{P}_n) \geq \text{IVPHFGHWM}^{p,q}(P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_n)$$

## 5. 决策应用

### 5.1. 基于区间毕达哥拉斯犹豫模糊算子的多属性决策方法

基于 IVPHFHWM 和 IVPHFGHWM 算子, 本文给出一种基于区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的多属性决策方法。对某多属性决策问题, 设方案集为  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ , 属性集为  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ , 矩阵  $M = (\tilde{P}_{ij})_{m \times n}$  表示区间值毕达哥拉斯犹豫模糊信息决策矩阵, 其中  $\tilde{P}_{ij}$  表示为一个区间值毕达哥拉斯犹豫模糊元,  $\tilde{P}_{ij} = \bigcup_{\substack{[\mu_i^L, \mu_i^U] \in \tilde{\Gamma}_{A_i}(C_j) \\ [v_i^L, v_i^U] \in \tilde{\Psi}_{A_i}(C_j)}} \{(\tilde{\Gamma}_{A_i}(C_j), \tilde{\Psi}_{A_i}(C_j))\}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) 表示决策者在属性  $C_j$  下对方案

$A_i$  的评价值。  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$  为属性集对应的权重向量, 且  $\omega_j \geq 0$ , ( $j=1, 2, \dots, n$ ),  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。具体步骤为:

**步骤 1:** 根据决策者的决策信息构建区间毕达哥拉斯犹豫模糊信息决策矩阵  $M = (\tilde{P}_{ij})_{m \times n}$  和属性权重  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 。

**步骤 2:** 利用 IVPHFHWM 和 IVPHFGHWM 算子, 使用基于优势理论的比率分析和全乘法形式的排序方法对产品进行优劣排名, 得到最优方案。

1) 比率分析的方法

a) 利用 IVPHFHWM 算子形成加权矩阵。

$$U_i^{RS} = \text{IVPFHWM}(\tilde{P}_{ij}, \omega_i) = \left( \left[ \mu_{\tilde{P}_{ij}}^{RSL}, \mu_{\tilde{P}_{ij}}^{RSU} \right], \left[ v_{\tilde{P}_{ij}}^{RSL}, v_{\tilde{P}_{ij}}^{RSU} \right] \right) \quad (7)$$

b) 对  $U_i^{RS}$  进行解模糊处理。

$$\hat{U}_i^{RS} = \frac{\mu_{\tilde{P}_{ij}}^{RSL} + \mu_{\tilde{P}_{ij}}^{RSU} - v_{\tilde{P}_{ij}}^{RSL} - v_{\tilde{P}_{ij}}^{RSU}}{2} \quad (8)$$

c) 对  $\hat{U}_i^{RS}$  进行归一化处理, 并排序。

$$\bar{U}_i^{RS} = \frac{\hat{U}_i^{RS}}{\max_i \hat{U}_i^{RS}} \quad (9)$$

2) 全乘法形式的方法

a) 利用 IVPHFGHWM 算子形成加权矩阵。

$$U_i^{MF} = \text{IVPHFGHWM}(\tilde{P}_{ij}, \omega_i) = \left( \left[ \mu_{\tilde{P}_{ij}}^{MFL}, \mu_{\tilde{P}_{ij}}^{MFU} \right], \left[ v_{\tilde{P}_{ij}}^{MFL}, v_{\tilde{P}_{ij}}^{MFU} \right] \right) \quad (10)$$

b) 对  $U_i^{MF}$  进行解模糊处理。

$$\hat{U}_i^{MF} = \frac{\mu_{ij}^{MFL} + \mu_{ij}^{MFU} - \nu_{ij}^{MFL} - \nu_{ij}^{RSU}}{2} \tag{11}$$

c) 对  $\hat{U}_i^{MF}$  进行归一化处理, 并排序。

$$\bar{U}_i^{MF} = \frac{\hat{U}_i^{MF}}{\max_i \hat{U}_i^{MF}} \tag{12}$$

3) 使用优势理论[18]综合考虑 RS 和 MF 两种方法得出的产品排名结果, 确定最终的产品排序结果。

### 5.2. 实例分析

某顾客根据自身的喜好和手机的性能挑选手机。根据顾客前期的调研和统计确定了 5 个备选手机产品  $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ , 并基于以下四种属性  $C_j (j = 1, 2, 3, 4)$  对手机进行评估: 价格( $C_1$ )、电池( $C_2$ )、屏幕( $C_3$ )、相机( $C_4$ )。顾客根据自己的偏好确定属性权重向量  $\omega = (0.3, 0.4, 0.1, 0.2)^T$ 。

Step 1 根据顾客提供的决策信息构建区间值毕达哥拉斯犹豫模糊信息决策矩阵, 其中包含各个手机及对应属性的属性值。属性的评估值均以区间值毕达哥拉斯犹豫模糊数的表示, 见表 1。

**Table 1.** Interval-valued Pythagorean hesitant fuzzy decision matrix

**表 1.** 区间值毕达哥拉斯犹豫模糊决策矩阵

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{([0.2, 0.3], [0.4, 0.7]), ([0.4, 0.5], [0.4, 0.6])}	{([0.2,0.4], [0.4,0.5], [0.3,0.5]), ([0.1,0.4], [0.3,0.5], [0.3,0.4])}	{([0.4,0.6], [0.2, 0.3]), ([0.5,0.6], [0.2, 0.4])}	{([0.4,0.5], [0.2, 0.6]), ([0.5,0.7], [0.2, 0.5])}
$A_2$	{([0.1,0.4], [0.5,0.6]), ([0.3,0.5], [0.4,0.5])}	{([0.2,0.5]), ([0.4,0.5])}	{([0.1,0.2], [0.6,0.7], [0.5,0.7]), ([0.2,0.5], [0.4,0.5], [0.3,0.4])}	{([0.2,0.3], [0.5, 0.6]), ([0.4,0.6], [0.2, 0.3])}
$A_3$	{([0.4,0.5], [0.1,0.2], [0.5,0.7]), ([0.3,0.5], [0.5,0.7], [0.1,0.2])}	{([0.3,0.5]), ([0.5,0.6])}	{([0.5,0.6]), ([0.4,0.6])}	{([0.1,0.6], [0.4, 0.7]), ([0.5,0.6], [0.2, 0.4])}
$A_4$	{([0.5,0.6]), ([0.3,0.6])}	{([0.0,0.2], [0.1,0.5]), ([0.4,0.7], [0.4,0.5])}	{([0.4,0.8]), ([0.3,0.6])}	{([0.2,0.7]), ([0.3,0.5])}
$A_5$	{([0.6,0.7]), ([0.1,0.8])}	{([0.4,0.7]), ([0.3,0.6])}	{([0.3,0.6], [0.2, 0.4]), ([0.1,0.6], [0.2, 0.4])}	{([0.1,0.9]), ([0.2,0.6])}

Step 2 利用 IVPHFHWM 和 IVPHFGHWM 算子 ( $p = q = 1$ ), 使用基于优势理论的比率系统和全乘法形式的排序方法对产品进行优劣排名。表 1 的决策矩阵和顾客的属性偏好权重在此步骤作为基于优势理论的比率系统和全乘法形式方法的输入, 结果如表 2 所示。

**Table 2.** Calculation results

**表 2.** 计算结果

	比率系统 $\bar{U}_i^{RS}$	排名	全乘法形式 $\bar{U}_i^{MF}$	排名	优势理论最终排名
$A_1$	0.2685	2	0.2307	3	3
$A_2$	0.2871	1	0.2876	2	1
$A_3$	0.2062	3	0.3151	1	2
$A_4$	0.1433	5	0.1766	5	5
$A_5$	0.1857	4	0.1998	4	4

Step 3 根据最终的优势理论排名结果可知,  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ , 即产品  $A_2$  为最优产品。

## 6. 灵敏度分析与对比实验

### 6.1. 灵敏度分析

本文提出的 IVPHFHWM 和 IVPHFGHWM 算子包含三个参数 ( $p, q$  和  $\omega$ ), 这三个参数对决策结果有一定的影响性。因此, 本节分析  $p, q$  和  $\omega$  对备选产品排序的影响。

首先讨论算子参数  $p, q$  对备选产品排序的影响, 结果如表 3 所示。

**Table 3.** Influence of parameters  $p, q$  on the ranking results of alternative products

**表 3.** 参数  $p, q$  对备选产品排序结果的影响

参数 $p, q$ 值	产品排序
$p=1, q=0$	$A_1 > A_5 > A_2 > A_3 > A_4$
$p=0, q=1$	$A_2 > A_1 > A_5 > A_4 > A_3$
$p=q=0.5$	$A_1 > A_2 > A_3 > A_5 > A_4$
$p=0.1, q=0.5$	$A_2 > A_1 > A_3 > A_5 > A_4$
$p=0.5, q=0.1$	$A_1 > A_2 > A_3 > A_5 > A_4$
$p=1, q=5$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$
$p=5, q=1$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$
$p=5, q=10$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$
$p=10, q=5$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$

由表 3 可知, 参数  $p$  和  $q$  的变化会对备选产品的排序结果造成影响。当  $p=1, q=0$  时, 备选产品排序为  $A_1 > A_5 > A_2 > A_3 > A_4$ 。当  $p=0, q=1$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_1 > A_5 > A_4 > A_3$ 。当  $p=0$  或  $q=0$  时, 本文所提出的 IVPHFHWM 和 IVPHFGHWM 算子就会退化为普通的加权平均算子和计算加权算子, 产品的排序结果没有考虑属性之间的相关性, 进而参数  $p$  和  $q$  的变化会引起产品排序的改变。当  $p=q=0.5$  时, 备选产品排序为  $A_1 > A_2 > A_3 > A_5 > A_4$ 。当  $p=0.1, q=0.5$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_1 > A_3 > A_5 > A_4$ 。当  $p=0.5, q=0.1$  时, 备选产品排序为  $A_1 > A_2 > A_3 > A_5 > A_4$ 。参数  $p$  和  $q$  的值较小时产品属性之间的相互作用较小, 此时  $p$  和  $q$  的值发生改变时产品的排序结果不会发生太大的变化。当  $p=1, q=5$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ 。当  $p=5, q=1$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ 。当  $p=5, q=10$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ 。当  $p=10, q=5$  时, 备选产品排序为  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ 。当参数  $p$  和  $q$  的值较大时产品属性之间的相互作用较强, 当  $p$  和  $q$  的值改变时产品排序均为  $A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$ , 排序方案较为稳定同时也体现出两种算子在处理多属性决策问题的合理性。

接下来讨论  $\omega$  对备选产品排序的影响。由于特征权重对产品排名顺序的影响, 本文使用敏感性分析来判断本文提出的 MCDM 模型的鲁棒性。敏感度计算公式如下:

$$SC_i = \frac{\sum_{j=1}^N SC_{ij}}{N}, SC_{ij} = \frac{\sum_{w=1}^W D_{ij}^w}{F}, \forall i, j, \omega \in \{0, 0.01, 0.1, 0.2, \dots, 1\} \quad (13)$$

其中  $SC_i$  是每个方法的总平均灵敏度,  $SC_{ij}$  是方法  $i$  关于特征  $j$  的灵敏度系数,  $D_{ij}^w$  是方法  $i$  的备选排序结果在特征  $j$  权重改变时发生变化的次数,  $F$  代表特征值发生变化的次数。

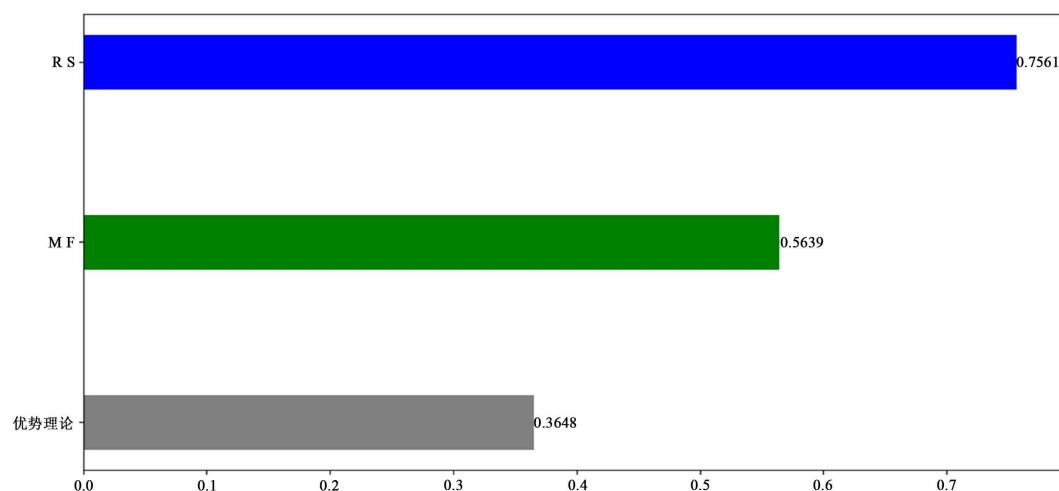


Figure 1. Sensitivity coefficient of each method

图 1. 每种方法的敏感度系数

如图 1 所示, 敏感度的总体结果表明, 与 RS 和 MF 方法相比, 结合优势理论的方案排序的敏感度系数最小(0.3648)。也就是说当准则权值  $\omega$  发生改变时, 它对结合优势理论的排名结果影响最小, 具有更强的鲁棒性。因此, 本文所提出的基于优势理论的比率系统和全乘法形式的排序方法成功地改善了多属性决策方法的鲁棒性, 提升了方法的稳健性。

## 6.2. 对比试验

为了证明本文提出的方法的合理性和优势, 我们将所提方法和[19] [20]的方法进行对比。在使用本文的数据情况下, 产品的排名结果如下表 4 所示。

Table 4. Comparison of product ranking results

表 4. 产品排名结果对比

方法	排名结果
本文所提出的方法	$A_2 > A_3 > A_1 > A_5 > A_4$
文献[19]的方法	$A_3 > A_2 > A_1 > A_5 > A_4$
文献[20]中的 IVPHFWA 算子	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4 > A_5$
文献[20]中的 IVPHFWG 算子	$A_2 > A_3 > A_5 > A_1 > A_4$

从表 4 可以看出本文所提出的方法与文献[20]中的 IVPHFWA 算子和 IVPHFWG 算子得到的最优方案均为产品  $A_2$ , 与文献[19]的产品排序相比前两名最优的产品皆为产品  $A_2$  和  $A_3$ 。虽然每种方法得到的排序结果存在差异但是总体来看都是相似的, 这也就说明了我们方法的有效性和合理性。造成排名差异的原因在于本文提出的聚合算子考虑了不同属性之间的相关性以及这些属性对决策结果的影响, 产品排序方法的鲁棒性。因此, 本文的结果更接近实际的决策结果。

## 7. 结论

本文在区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集的基础上, 引入了 Heronian 算子, 创新的将区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集和 Heronian 平均算子进行结合, 提出了区间值毕达哥拉斯犹豫模糊 Heronian 加权平均算子

(IVPHFHW)和区间值毕达哥拉斯犹豫模糊 Heronian 几何加权算子(IVPHFGHW), 并研究了它们的置换不变性、有界性、单调性等性质。然后提出了基于 IVPHFHW 和 IVPHFGHW 算子的多属性决策模型, 并通过实例说明了本文所提出的算子在区间值毕达哥拉斯犹豫模糊信息集成中的有效性和合理性。目前还没有区间毕达哥拉斯犹豫模糊算子考虑到属性之间的相关性, 因此本文提出的 IVPHFHW 和 IVPHFGHW 算子进一步地完善了区间毕达哥拉斯犹豫模糊信息集成理论。

## 参考文献

- [1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information & Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [2] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **20**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [3] Atanassov, K. and Gargov, G. (1989) Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **31**, 343-349. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(89\)90205-4](https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4)
- [4] Yager, R.R. and Abbasov, A.M. (2013) Pythagorean Membership Grades, Complex Numbers, and Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 436-452. <https://doi.org/10.1002/int.21584>
- [5] Yager, R.R. (2014) Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2278989>
- [6] Torra, V. (2010) Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **25**, 529-539. <https://doi.org/10.1002/int.20418>
- [7] 刘卫锋, 何霞. 毕达哥拉斯犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(4):107-115.
- [8] Khan, M.S.A., Abdullah, S., Ali, A., et al. (2017) Pythagorean Hesitant Fuzzy Sets and Their Application to Group Decision Making with Incomplete Weight Information. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **33**, 3971-3985. <https://doi.org/10.3233/JIFS-17811>
- [9] Wu, S.J., Wei, G.W. (2018) Pythagorean Hesitant Fuzzy Hamacher Aggregation Operators and Their Application to Multiple Attribute Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, **97**, 24-39.
- [10] Zheng, W., Zhou, L., Zhang, M., et al. (2020) Interval-Valued Pythagorean Hesitant Fuzzy Set and Its Application to Multiattribute Group Decision-Making. *Complexity*, **2020**, Article ID: 1724943. <https://doi.org/10.1155/2020/1724943>
- [11] Zheng, T., Zhang, Li, L., et al. (2020) Correlation Coefficients of Interval-Valued Pythagorean Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications. *IEEE Access*, **8**, 9271-9286. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2964580>
- [12] 李龙妹, 郑婷婷, 尹文静. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的不确定性研究[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2020, 43(4): 906-913.
- [13] 黄月, 张贤勇. 区间值毕达哥拉斯犹豫模糊粗糙集[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(6): 143-152.
- [14] 李进军, 包玉娥, 李晨松. 区间毕达哥拉斯模糊 Heronian 平均算子及其决策应用[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(4): 134-148.
- [15] 李龙妹, 郑婷婷, 尹文静. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的熵、相似性度量及其应用[J]. 山西大学学报, 2020, 43(4): 920-928.
- [16] 刘焕章, 裴道武. H-OWA 算子及其在多属性决策中的应用[J]. 浙江理工大学学报, 2012, 29(1): 138-142.
- [17] Yu, D.J. (2013) Intuitionistic Fuzzy Geometric Heronian Mean Aggregation Operators. *Applied Soft Computing*, **13**, 1235-1246. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.09.021>
- [18] Brauers, W.K.M., Zavadskas, E.K. (2010) Project Management by Multimoora as an Instrument for Transition Economies. *Ukio Technologinis Ir Ekonominis Vystymas*, **16**, 5-24. <https://doi.org/10.3846/tede.2010.01>
- [19] Liu, Y., Bi, J.W. and Fan, Z.P. (2017) Ranking Products through Online Reviews: A Method Based on Sentiment Analysis Technique and Intuitionistic Fuzzy Set Theory. *Information Fusion*, **36**, 149-161. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2016.11.012>
- [20] 张毛银. 区间值毕达哥拉斯犹豫模糊理论及其在群决策中的应用[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 安徽大学.