

混沌系统的动力学分析及能量反馈控制

王文静*, 于欢欢, 路正玉

广东理工学院基础教学部, 广东 肇庆

收稿日期: 2022年9月19日; 录用日期: 2022年10月11日; 发布日期: 2022年10月21日

摘要

随着对混沌现象研究的深入, 混沌系统的动力学行为变化及对混沌状态的控制研究已成为研究混沌的重要任务。本文构造了一个具有多个平衡点的混沌系统, 在理论分析和数值仿真下, 详细分析了系统的基本动力学特性, 并通过Routh-Hurwitz定理分析了平衡点的稳定性以及作出了系统的分岔图。同时在计算了系统的Hamilton能量后, 通过增加一个与Hamilton能量相关的新变量来改进动力学系统, 并通过调整能量的反馈增益找到目标轨道。结果表明, 为Hamilton能量设置适当的正反馈增益可以抑制混沌。

关键词

混沌系统, Hamilton能量, 能量控制

Dynamical Analysis and Energy Feedback Control of Chaotic Systems

Wenjing Wang*, Huanhuan Yu, Zhengyu Lu

Basic Education Department, Guangdong Institute of Technology, Zhaoqing Guangdong

Received: Sep. 19th, 2022; accepted: Oct. 11th, 2022; published: Oct. 21st, 2022

Abstract

With the deepening of the study of chaos, the dynamic behavior changes of chaotic systems and the control of chaotic state have become an important task in the study of chaos. In this paper, a class of chaotic systems with multiple equilibrium points is constructed. Based on theoretical analysis and numerical simulation, the basic dynamic characteristics of the system are analyzed in detail, and the stability of the equilibrium point is analyzed by Routh-Hurwitz theorem and bifurcation diagram of the system is obtained. After calculating the Hamiltonian energy of the system, a new variable related to the Hamiltonian energy was added to improve the dynamics system, and the

*通讯作者。

target orbit was found by adjusting the feedback gain of the energy. The results show that chaos can be suppressed by proper positive feedback gain for Hamiltonian energy.

Keywords

Chaotic System, Hamilton Energy, Energy Control

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

20 世纪下半叶以来,非线性科学有了很大的发展。混沌是非线性科学的一个研究热点,被认为是继相对论和量子力学[1]之后的第三次革命。由于非线性振动在实际工程中的广泛存在,故而研究具有特殊动力学行为的混沌系统,对科学的进一步发展,解决实际工程中的问题,都具有很大的理论意义和科学价值。1963 年, Lorenz 在一个三维自治系统中首次发现了混沌吸引子。1999 年, Chen 等人也发现了和 Lorenz 系统相似但不同的混沌吸引子。近年来,随着学术界在[2] [3] [4] [5]中对于非线性对混沌现象的深入探索,混沌系统的动力学行为的变化及对混沌状态的控制已成为研究混沌的重要内容。

随着非线性科学的广泛应用,国内外的学者基于不同的策略提出了大量的混沌控制方法。Sharma 等人[6]应用线性增强的方法来控制混沌系统吸引子的多态性。Feng 和 Wei 等[7]研究了时滞反馈法对混沌系统的控制。Vaidyanathan [8]对于超混沌系统通过自适应法进行系统的控制。Wei 等人应用非线性反馈控制器、滑膜控制器及其组合来控制具有混沌特性的动力学系统。对于混沌系统来说,外力施加并输入时,系统将获得能量,所以,系统的动力响应也会受到系统能量的控制。如外部电磁辐射可以通过提供足够的能量来改变神经元[9]的电活动模式。对于非线性系统,我们可以从理论上探讨其物理能量。Wang 等人利用 Helmholtz 定理对无量纲动力系统的哈密顿能量进行了计算。Ma 等人认为能量反馈可以有效抑制振荡。Guo 等人提出相位压缩和能量调和控制混沌系统。因此,讨论能量对于混沌系统的动力学行为控制是十分具有意义的。

本文通过对具有多个平衡点的混沌系统,在理论分析和数值仿真下,详细分析了系统的基本动力学特性。通过 Helmholtz's 定理求出了系统的 Hamilton 函数,设计了相应的能量反馈控制器通过降低能量消耗来控制混沌系统。

2. 系统的动力学分析

2.1. 混沌系统的方程描述

对于以下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = bx - (1+b)y + xz \\ \dot{z} = bcx^2 - (1+b)cxy + c \end{cases} \quad (1)$$

这里 x, y, z 为系统参量, a, b, c 为系统参数。

当 $a = 10, b = 0.75, c = 20$, 初始状态 $(x, y, z) = (0.3, 2.9, 0.1)$, 仿真时间为 $t = 200$ s 时, 系统(1)生成一个混沌系统。此时系统的相图及时间序列图如图 1 所示。

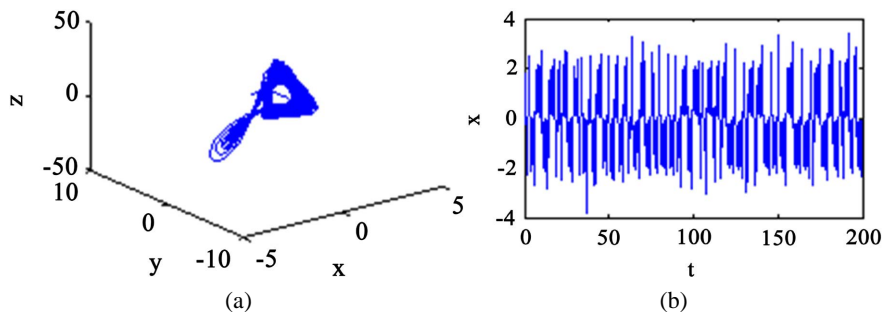


Figure 1. (a) Phase diagram; (b) Time series diagram
 图 1. (a) 相图; (b) 时间系列图

2.2. 系统的平衡点及稳定性

对于系统(1), 我们令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 系统的平衡点为 $E_1(-1,-1,1), E_2(1,1,1)$, 对于平衡点的稳定性, 通过求得其 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b+z & -(1+b) & x \\ 2bcx-(1+b)cy & -(1+b)cx & 0 \end{bmatrix}$$

所以, 特征多项式为

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3$$

其中 $m_1 = -(a+b+1)$, $m_2 = az - a - cx^2 - bcx^2$, $m_3 = abcx^2 - acxy - abcxy - acx^2$

计算行列式

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m_1 = -(a+b+1) \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} m_1 & 1 \\ m_3 & m_2 \end{vmatrix} = m_1m_2 - m_3 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} m_1 & 1 & 0 \\ m_3 & m_2 & m_1 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} = m_3\Delta_2 \end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 稳定判据知, 系统在稳定点处的特征方程的所有特征值都具有负实部的充要条件是:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

因此, 当且仅当

$$a+b+c < 0, m_1m_2 > m_3 > 0$$

成立, 以上特征方程的所有特征值的实部一定是负数。当满足以上条件时, 平衡点是稳定的, 否则, 不稳定。

2.3. 参数 a 的影响

系统(1)的参数分别取 $b = 0.75, c = 20$, 初始条件取为 $(0.3, 2.9, 0.1)$, 当 a 的取值范围为 $[8, 15]$ 时, 关于 a 的分岔图如图 2 所示, 观察参数 a 的分岔情况, 可以看出, 当 $a \in [8, 9]$ 时, 系统处在稳定状态, 不存在混沌吸引子; 在 $a \in [9, 13.6]$ 时, 所在区间分岔图无任何规律可循, 此时系统处在混沌状态; 当

$a \in [13.7, 14.4]$ 时, 系统明显处于五周期状态; 而在越过 $a = 14.4$ 之后, 系统又回到混沌状态。同时在上
述区间段中, 选取较为典型的参数值 a , 给出了系统(1)在 x - y 平面上的相图如图 3 所示。

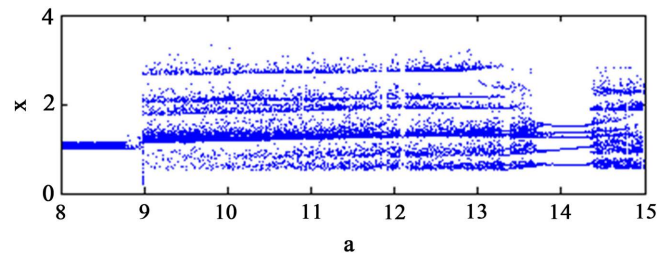


Figure 2. Bifurcation diagram of parameters a
图 2. 关于参数 a 的分岔图

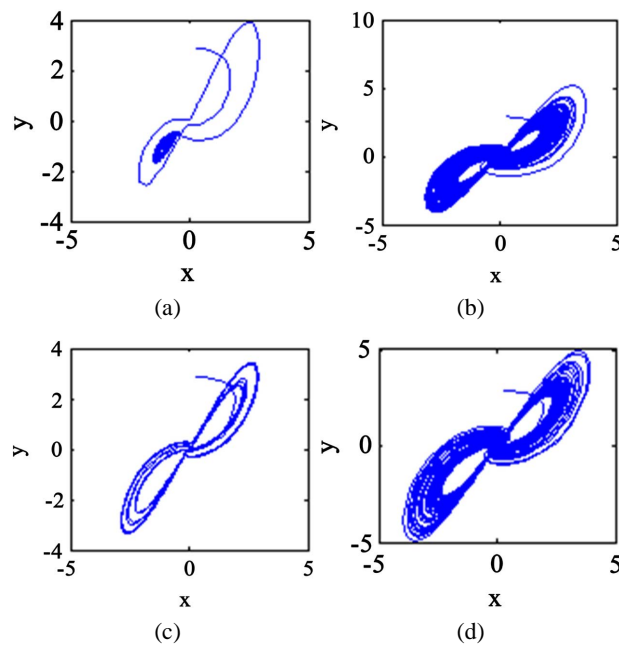


Figure 3. The phase diagram in the x - y plane increments with parameter a (a) $a = 8.5$; (b) $a = 10$; (c) $a = 14$; (d) $a = 14.8$

图 3. 随参数 a 逐步增大在 x - y 平面上的相图(a) $a = 8.5$; (b) $a = 10$; (c) $a = 14$; (d) $a = 14.8$

3. 能量反馈控制

3.1. 系统的 Hamilton 函数

在这部分里, 我们将寻找一个相空间变量函数, 它就是系统(1)的 Hamilton 能量函数。这里, 我们将系统(1)简记为

$$\dot{x} = f(X)$$

其中 $x \in R^n$, $f(X)$ 是光滑函数。

由文献[10]知, $f(X)$ 满足以下关系

$$f(X) = f_c(X) + f_d(X)$$

这里 $f_c(X)$ 指涡旋场, $f_d(X)$ 指梯度场。

能量的变化来自于电场的做功, $H(x, y, z)$ 作为 Hamilton 能量, 它满足以下方程:

$$\begin{cases} \nabla H^T \cdot f_c(X) = 0 \\ \nabla H^T \cdot f_d(X) = \dot{H} = \frac{dH}{dt} \end{cases}$$

则对于系统(1), 可以得到

$$f_c = \begin{bmatrix} ay - x \\ bx \\ bcx^2 - (1+b)cxy \end{bmatrix}, f_d = \begin{bmatrix} (1-a)x \\ -(1+b)y + xz \\ c \end{bmatrix}$$

由上述关系, Hamilton 能量函数 $H(x, y, z)$ 服从以下偏微分方程:

$$(ay - x) \frac{\partial H}{\partial x} + (bx) \frac{\partial H}{\partial y} + (bcx^2 - (1+b)cxy) \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

求解上式, 有

$$H = \frac{1}{2}bcx^2 + \frac{1}{2b}(c - ac - ba)y^2 + z \tag{2}$$

同时, 可以验证其微分系数与时间的关系:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= bcx \cdot \dot{x} + \frac{1}{b}(c - ac - ba)y \cdot \dot{y} + 1 \cdot \dot{z} \\ &= bcx \cdot (ay - ax) + \frac{1}{b}(c - ac - ba)y \cdot (bx - (1+b)y + xz) + 1 \cdot (bcx^2 - (1+b)cxy + c) \\ &= abcxy - abcx^2 + bcxy - (1+b)cy^2 + cxyz - abcxy + ac(1+b)y^2 - acyz + cxy \\ &\quad - \frac{c(1+b)}{b}y^2 + \frac{c}{b}xyz + bcx^2 - (1+b)cxy + c - cxy - bcxy \\ &= bcx^2 - abcx^2 + cxyz - (1+b)cy^2 - acxyz + ac(1+b)y^2 + \frac{c}{b}xyz - \frac{c}{b}(1+b)y^2 + c \\ &= \nabla H^T \cdot f_d \end{aligned}$$

3.2. 能量控制方案及数值结果

由式(2), 可以看出, 系统参数及变量的改变对 Hamilton 能量的影响很大, 不同状态下, 系统的能量函数也会发生巨大变化。相反, 能量函数的改变也会对混沌系统的状态产生影响, 故而, 我们提出基于 Hamilton 能量函数的一种控制方法, 设计控制器并将其引入混沌系统, 其动力系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay - kH \\ \dot{y} = bx - (1+b)y + xz \\ \dot{z} = bcx^2 - (1+b)cxy + c \\ \dot{H} = bcx + \frac{1}{b}(c - ac - ba)y + 1 \end{cases}$$

其中, H 为系统的 Hamilton 能量函数, 参数 k 是控制能量流的反馈增益。下面, 我们将给定不同的反馈增益, 来控制动力学系统, 进而研究系统的状态变化。

通过固定参数 $a = 10, b = 0.75, c = 20$, 选择不同的参数 k 来研究能量函数对混沌系统的抑制, 结果如图所示。

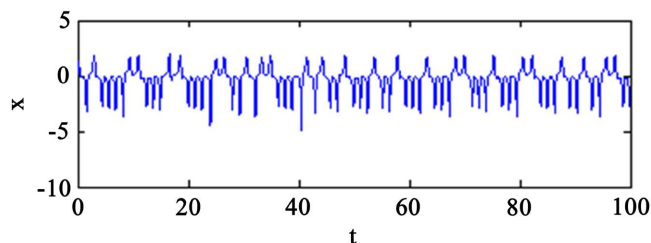


Figure 4. Time response diagram of variable x when feedback gain $k = -0.01$

图 4. 反馈增益 $k = -0.01$ 时, 变量 x 的时间响应图

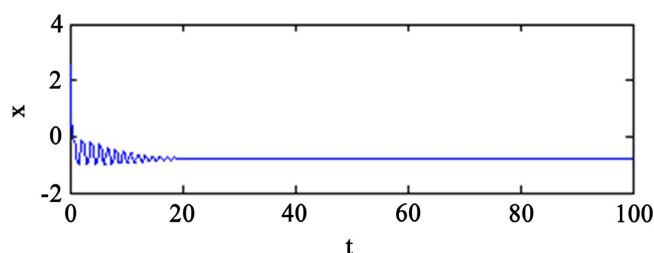


Figure 5. Time response diagram of variable x when feedback gain $k = 0.02$

图 5. 反馈增益 $k = 0.02$ 时, 变量 x 的时间响应图

从图 4 可以直观看到, 当选择反馈增益 $k = -0.01$ 时, 系统未得到有效控制, 在 0~100 s 内一直处于混沌状态; 图 5 表明, 当反馈增益 $k = 0.02$ 时, 系统在经过短暂的无规则运动, 即混沌状态后被有效的控制到一个平衡点上。

对比以上两种结果, 可以看出通过改变反馈增益 k 的取值, 能够有效改变系统的运动状态, 从而达到控制系统状态演化的目标。能量的变化是动力学系统振荡的重要组成, 基于 Hamilton 能量函数所设计的反馈法确实可以对已知的混沌系统进行一定程度的控制, 通过改变反馈增益的大小, 提供足够的能量使得系统能够快速脱离混沌, 使系统有效的被控制在平衡点处。

4. 结论

本文对提出的具有多个平衡点的三维自激混沌系统, 通过理论分析和数值仿真, 讨论了系统平衡点的稳定性及随参数变化, 系统的复杂动力学特性。同时基于 Hamilton 定理等, 计算了系统的 Hamilton 能量, 调整适当的参数, 利用 Helmholtz's 定理对 Hamilton 能量进行反馈控制, 对处于混沌状态的系统进行控制, 达到了理想的平衡态。对于此类特殊系统的研究, 对如何有效消除和解决实际工程中出现的混沌振动问题, 在理论和控制方法上, 提供了良好的启示和借鉴。

参考文献

- [1] Christiansen, P.L., Sorensen, M.P. and Scott, A.C. (2000) Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century. Springer, Berlin, 323-337. <https://doi.org/10.1007/3-540-46629-0>
- [2] Ahmad, W.M. (2005) Generation and Control of Multi-Scroll Chaotic Attractors in Fractional Order Systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, **25**, 727-735. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.11.073>
- [3] 刘明华, 禹思敏. 多涡卷高阶广义 Jerk 电路[J]. 物理学报, 2006, 55(11): 5707-5713.
- [4] Yalcin, M.E. (2007) Multi-Scroll and Hypercube Attractors from a General Jerk Circuit Using Josephson Junctions. *Chaos, Solitons and Fractals*, **34**, 1659-1666. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.04.058>

- [5] 王震, 毛鹏伟. 一类三维混沌系统的分叉及稳定性分析[J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(1): 16-21.
- [6] Sharma, P.R., Shrimali, M.D., Prasad, A., Kuznetsov, N.V. and Leonov, G.A. (2015) Control of Multistability in Hidden Attractors. *European Physical Journal Special Topics*, **224**, 1485-1491. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02474-y>
- [7] Feng, Y. and Wei, Z. (2015) Delayed Feedback Control and Bifurcation Analysis of the Generalized Sprott B System with Hidden Attractors. *European Physical Journal Special Topics*, **224**, 1619-1636. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02484-9>
- [8] Vaidyanathan, S. (2017) A Memristor-Based Hyperchaotic System with Hidden Attractor and Its Sliding Mode Control. *Studies in Computational Intelligence*, **709**, 343-369. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55598-0_15
- [9] Wu, F.Q., Wang, C.N., Jin, W.Y., *et al.* (2017) Dynamical Responses in a New Neuron Model Subjected to Electromagnetic Induction and Phase Noise. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **469**, 81-88. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.056>
- [10] 王春妮, 王亚, 马军. 基于亥姆霍兹定理计算动力学系统的哈密顿能量函数[J]. 物理学报, 2016, 65(24): 1-6.