

一类具有时滞的植被 - 沙模型的Hopf分支

李纪纯, 郭改慧*

陕西科技大学数学与数据科学学院, 陕西 西安

收稿日期: 2022年10月21日; 录用日期: 2022年11月15日; 发布日期: 2022年11月23日

摘 要

利用Hopf分支理论研究一类具有时滞效应的植被 - 沙模型。首先分析特征值问题, 给出时滞 τ 对正平衡点稳定性的影响及Hopf分支的存在性。其次利用中心流形定理和规范型理论, 给出Hopf分支方向和分支周期解稳定性的判定条件。最后借助数值模拟, 验证理论分析结果。

关键词

植被 - 沙模型, Hopf分支, 稳定性, 时滞

Hopf Bifurcation for a Vegetation-Sand Model with Time Delay

Jichun Li, Gaihui Guo*

School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an Shaanxi

Received: Oct. 21st, 2022; accepted: Nov. 15th, 2022; published: Nov. 23rd, 2022

Abstract

A vegetation-sand model with time delay is studied by Hopf bifurcation theory. Firstly, the eigenvalues are analyzed to obtain the effect of time delay on the stability of positive equilibrium points, and at the same time, the existence of Hopf bifurcation is given. Secondly, by the center manifold theorem and normal form theory, the determination conditions of Hopf bifurcation direction and the stability of periodic solutions are established. Finally, numerical simulations are supplied to verify the theoretical analysis results.

*通讯作者。

Keywords

Vegetation-Sand Model, Hopf Bifurcation, Stability, Delay

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

土地荒漠化作为最严峻的生态环境问题之一,是人类不合理活动与脆弱的生态环境相互作用下形成的以风沙活动为主要标志的土地退化过程。风沙运动特征以及对植物抑制沙尘机理的研究是植被生态学的重要组成部分。关于植被模型的研究,更多的学者关注植被-水模型,对植被-沙的模型研究较少[1][2][3][4]。Klausmeier [5]首次提出植被与土壤水相互作用的动力学模型,发现小尺度地形的变化可能会引起不规则的植被斑图结构出现。Meron 等人[6]通过建立植被-水模型,发现植被的空间分布结构随着降雨量的增加形成均匀分布。

Zhang 等人[7]基于植被生物量和沙丘高度两个变量,提出一个连续的植被-沙模型,研究多风沙环境下风沙对植被空间分布的影响。考虑植被对沙的聚集会随着生物量的增加而减少,且当植被生物量达到一定程度时会下降到最低,Cao 等人[8][9]考虑线性作用项的聚集效应机制,得到以下模型

$$\begin{cases} \frac{dS(T)}{dT} = K_0 + MV(T) - NS(T), & T > 0, \\ \frac{dV(T)}{dT} = HV(T) \left(1 - \frac{V(T)}{V_m} \right) - PS(T) \frac{V(T)}{C + V(T)}, & T > 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 S 和 V 分别表示沙丘高度和植被生物量, K_0 为没有植被时风沙的堆积率, M 表示植被对风沙的捕获效应, N 表示沙的沉积率随沉积沙高度增加而减小的系数, H 表示植被内在生长率, V_m 表示植被覆盖率, P 表示风沙对植被的影响程度, 常数 C 刻画沙容量的半饱和常数, 所有参数均为正。引入无量纲变化

$$s = \frac{N}{K_0} S, \quad v = \frac{M}{K_0} V, \quad t = NT, \quad h = \frac{H}{N}, \quad v_m = \frac{MV_m}{K_0}, \quad p = \frac{PK_0}{CN^2}, \quad c = \frac{K_0}{CM},$$

得到如下系统

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = 1 + v(t) - s(t), & t > 0, \\ \frac{dv(t)}{dt} = hv(t) \left(1 - \frac{v(t)}{v_m} \right) - ps(t) \frac{v(t)}{1 + cv(t)}, & t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

现实系统中广泛地存在时滞,时滞的存在往往会使系统失稳,时常伴随着分岔或混沌等动力学特性的产生[10][11][12]。文[13]考虑一类具有 Logistic 增长的时滞耦合模型,利用特征方程和 Lyapunov-LaSalle 不变性原理,证明无感染平衡点的全局渐近稳定性和病毒感染平衡点 Hopf 分岔的存在性。文[14]建立了带有其次 Neumann 边界条件的具时滞病原体-免疫反应扩散模型,利用泛函微分方程分支理论,得到正稳态解经历 Turing 失稳的充要条件以及经历 Hopf 分支的条件。文[15]提出具有非线性

功能反应的时滞周期微囊藻毒素降解模型, 利用重合度中的延拓定理, 得到模型存在正周期解的两类显式充分条件。时滞在动力学分析中具有重要作用。

考虑到沙丘高度对植被生物量的影响会有延迟, 对系统(2)引入时滞, 得到系统

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = 1 + v(t) - s(t), & t > 0, \\ \frac{dv(t)}{dt} = hv(t) \left(1 - \frac{v(t)}{v_m} \right) - ps(t-\tau) \frac{v(t)}{1+cv(t)}, & t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

对于系统(3), 当 $\tau = 0$ 时, Cao 等人[8]给出模型平衡点的稳定性分析, 并通过数值模拟证实了植被和沙丘最终形成不规则斑纹。本文将时滞 τ 为分支参数, 研究系统(3)正平衡点的稳定性、Hopf 分支的存在性、分支方向以及分支周期解的稳定性。

2. 平衡点的稳定性及 Hopf 分支的存在性

文献[8]知, 系统(3)存在一个裸沙态平衡点 $(s_0, v_0) = (1, 0)$ 。当 $\tau \geq 0$ 时, 若 $h < p$, 则裸沙态平衡点 $(1, 0)$ 局部渐近稳定; 若 $h > p$, 则裸沙态平衡点 $(1, 0)$ 不稳定。

当 $h > p$ 时, 系统(3)存在唯一正平衡点 $(s^-, v^-) = (1 + \beta, \beta)$, 其中 $\beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, 这里 $A = -\frac{ch}{v_m} < 0$, $B = ch - p - \frac{h}{v_m}$, $C = h - p$ 。

本节主要讨论当 $h > p$ 时, 参数 c 和 h 对正平衡点的稳定性和 Hopf 分支存在性的影响。对系统(3)作变量代换

$$\tilde{s}(t) = s(t) - (1 + \beta), \quad \tilde{v}(t) = v(t) - \beta,$$

仍用 $s(t), v(t)$ 表示 $\tilde{s}(t), \tilde{v}(t)$, 在平衡点 $(0, 0)$ 处线性化得

$$\begin{cases} s_t = v(t) - s(t), \\ v_t = \left[h - \frac{2\beta h}{v_m} - \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} \right] v(t) - \frac{p\beta}{1+c\beta} s(t-\tau) + f_2, \end{cases} \quad (4)$$

其中 f_2 表示高阶项。

系统(4)对应特征方程为

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0e^{-\lambda\tau} + q_0 = 0, \quad (5)$$

其中

$$p_1 = 1 - h + \frac{2\beta h}{v_m} + \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2}, \quad p_0 = \frac{p\beta}{1+c\beta}, \quad q_0 = -h + \frac{2\beta h}{v_m} + \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2}.$$

当 $\tau = 0$ 时, (5)式变为

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + q_0 = 0,$$

其特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4(p_0 + q_0)}}{2}.$$

当 $h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \left(\frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} + 1 \right)$ 时, 显然 $p_1 > 0$, 当 $h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p+2p\beta+pc\beta^2}{(1+c\beta)^2}$ 时, 显然 $p_0 + q_0 > 0$ 。

由以上分析知, 当 $p > \frac{1}{\beta}$ 时, 若 $c > \frac{p\beta-1}{\beta}$, 且 $p < h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p+2p\beta+pc\beta^2}{(1+c\beta)^2}$, 则特征根 $\lambda_{1,2}$ 均具有负实部, 此时平衡点 (s^-, v^-) 是稳定的; 若 $c < \frac{p\beta-1}{\beta}$, 且 $p < h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \left(\frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} + 1 \right)$, 同理可得, 平衡点 (s^-, v^-) 稳定。当 $h > \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \left(\frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} + 1 \right)$ 或 $h > \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p+2p\beta+pc\beta^2}{(1+c\beta)^2}$ 时, 平衡点 (s^-, v^-) 不稳定。

当 $\tau > 0$ 时, 设 $\lambda = \pm i\omega (\omega > 0)$ 是特征方程(5)的一对纯虚根, 代入得

$$\begin{cases} p_0 \cos \omega\tau = \omega^2 - q_0, \\ p_0 \sin \omega\tau = p_1\omega, \end{cases} \tag{6}$$

整理得

$$\omega^4 + (p_1^2 - 2q_0)\omega^2 + q_0^2 - p_0^2 = 0. \tag{7}$$

当 $h > p$ 时, 已知 $p_1^2 - 2q_0 > 0$ 且 $p_0 + q_0 > 0$, 若 ω^2 存在, 则 $q_0 - p_0 < 0$, 设条件

$$\text{H: } \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p - pc\beta^2}{(1+c\beta)^2} < h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p + 2p\beta + pc\beta^2}{(1+c\beta)^2} \quad (\text{当 } c > \frac{p\beta - 1}{\beta} \text{ 时})$$

$$\text{或 } \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \frac{p - pc\beta^2}{(1+c\beta)^2} < h < \frac{v_m}{v_m - 2\beta} \left(\frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} + 1 \right) \quad (\text{当 } c < \frac{p\beta - 1}{\beta} \text{ 时})$$

满足时, (7)式存在一个正实根, $\Delta = (p_1^2 - 2q_0)^2 - 4(q_0^2 - p_0^2)$,

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{(2q_0 - p_1^2) + \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

且有 $p_1 > 0$, 由(6)式得

$$\tau_0^+ = \frac{\arccos \frac{\omega_+^2 - q_0}{p_0}}{\omega_+}, \quad \tau_n^+ = \tau_0^+ + \frac{2n\pi}{\omega_+}, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

当 $\tau \in \{\tau_n^+\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ 时, 方程(5)有一对纯虚根。设 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$ 是方程(5)一对共轭复根, 且满足 $\alpha(\tau_n^+) = 0$, $\beta(\tau_n^+) = \omega_+$, 下面讨论特征方程(4)在 $\tau = \tau_n^+$ 附近根的性质。

引理 1. 设 $h > p$ 且满足条件 H, 则有 $\alpha'(\tau_n^+) > 0$ 。

证明: 对(5)式两边关于 τ 求导得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2e^{\lambda\tau}}{p_0} + \frac{p_1 e^{\lambda\tau}}{\lambda p_0} - \frac{2}{\lambda}. \tag{8}$$

令 $\tau^* = \tau_n^+$, $\omega^* = \omega_+$, 由(6)式和(8)式得

$$\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2 \cos \omega^* \tau^*}{p_0} + \frac{p_1 \sin \omega^* \tau^*}{\lambda p_0} = \frac{2(\omega^*)^2 - 2q_0 + p_1^2}{p_0^2} > 0, \text{证毕。}$$

定理 1. 设 $h > p$ 且满足 H:

- (i) 当 $\tau \in [0, \tau_0^+)$ 时, 系统(6)的平衡点 $(1 + \beta, \beta)$ 局部渐近稳定;
- (ii) 当 $\tau \in (\tau_0^+, +\infty)$ 时, 系统(6)的平衡点 $(1 + \beta, \beta)$ 不稳定;
- (iii) 当 $\tau = \tau_n^+, n = 0, 1, 2, \dots$ 时, 系统(6)在平衡点 $(1 + \beta, \beta)$ 产生 Hopf 分支。

3. Hopf 分支的方向和稳定性

本节利用中心流形定理和规范型理论讨论系统(4) Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性。当 $h > p$, 满足条件 H 且 $\tau = \{\tau_n^+\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ 时, 系统(4)在平衡点 $(0, 0)$ 处产生 Hopf 分支。令 $\tilde{t} = t/\tau, \tau = \tau^* + \mu$, 代入系统(4)且仍用 t 表示 \tilde{t} 得

$$\begin{cases} s_t = \tau v(t) - \tau s(t), \\ v_t = \tau \left[h - \frac{2\beta h}{v_m} - \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} \right] v(t) - \frac{\tau p \beta}{1+c\beta} s(t-1) + \tau f_2, \end{cases} \quad (9)$$

其中 f_2 表示高阶项。

下面在相空间 $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ 进行讨论。令 $\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) \\ \phi_2(\theta) \end{pmatrix} \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, $Q = 1 + c\beta$, 并定义 L_μ, F_μ 为

$$\begin{aligned} L_\mu(\phi(\theta)) &= (\tau^* + \mu) B_1 \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} + (\tau^* + \mu) B_2 \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix}, \\ F(\mu, \phi(\theta)) &= (\tau^* + \mu) \begin{pmatrix} 0 \\ \left[-\frac{2h}{v_m} + 2pc(1+\beta)Q^{-3} \right] \phi_2^2(0) + \left[-6pc^2(1+\beta)Q^{-4} \right] \phi_2^3(0) + \frac{2p}{Q^2} \phi_1(-1)\phi_2(0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{这里 } B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & h - \frac{2\beta h}{v_m} - \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{p\beta}{1+c\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

由 Riesz 表示定理知, 存在有界变差函数 $\eta(\theta, \mu): [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 使得

$$L_\mu(\phi(\theta)) = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta),$$

其中

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau^* + \mu)(B_1 \delta(\theta) + B_2 \delta(\theta + 1)),$$

这里 $\delta(0) = 1, \delta(\theta) = 0, \theta \in [-1, 0)$ 。对于 $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, 定义

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta), & \theta = 0, \end{cases} \quad R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ F(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

令 $U(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $U_t = U(t + \theta) = \phi(\theta), \theta \in [-1, 0]$, 系统(9)可写成以下抽象形式

$$\dot{U}_t = A(\mu)U_t + R(\mu)U_t. \tag{11}$$

对于 $\psi \in C^1([0,1],R^2)$, 定义

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0,1], \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(s,\mu)\psi(-s), & s = 0 \end{cases}$$

和双线性积

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi, \tag{12}$$

其中 $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ 。 A^* 与 $A(0)$ 互为共轭算子, 且 $\pm i\omega^* \tau^*$ 是 $A(0)$ 和 A^* 的特征值。设 $q(\theta) = q_0 e^{i\omega^* \tau^* \theta}$ 为 $A(0)$ 关于 $i\omega^* \tau^*$ 的特征向量, $q^*(s) = \bar{D} q_0^* e^{i\omega^* \tau^* s}$ 为 A^* 关于 $-i\omega^* \tau^*$ 的特征向量, 且 $q(\theta), q^*(s)$ 满足 $(q^*(s), q(\theta)) = 1, (q^*(s), \bar{q}(\theta)) = 0$ 。由 $A(0)$ 定义和(12)式得

$$q_0 = (1, \sigma)^T = (1, i\omega^* + 1)^T, \quad q_0^* = (\rho, 1)^T = \left(-\frac{p\beta e^{i\omega^* \tau^*}}{(1+c\beta)(i\omega^* + 1)}, 1 \right)^T,$$

$$\bar{D} = \left(\bar{\rho} + \sigma - \tau^* \frac{p\beta}{1+c\beta} e^{-i\omega^* \tau^*} \right)^{-1}.$$

下面计算 $\mu = 0$ 时系统(9)的中心流形 C_0 。设 U_t 是系统(9)在 $\mu = 0$ 处的解, 定义

$$z(t) = \langle q^*, U_t \rangle, \quad W(t, \theta) = U_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}. \tag{13}$$

在中心流形 C_0 上有

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$$

$$= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots. \tag{14}$$

对于(9)式的解 $U_t \in C_0$, 有

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega^* \tau^* z + \langle q^*(\theta), F(0, W(z, \bar{z}, 0) + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}) \rangle \\ &= i\omega^* \tau^* z + \bar{q}^*(0) F(0, W(z, \bar{z}, 0) + 2\text{Re}\{z(t)q(0)\}) \\ &= i\omega^* \tau^* z + \bar{q}^*(0) F_0(z, \bar{z}) \\ &= i\omega^* \tau^* z + g(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) F_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots. \tag{15}$$

由 $U_t(\theta) = (u(\theta), v(\theta))^T = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$, $q_0 = (1, \sigma)^T$ 和(10)式得

$$F_0 = F(0, zq + \bar{z}\bar{q} + W) = \tau^* \begin{pmatrix} 0 \\ K_{20}z^2 + K_{11}z\bar{z} + K_{02}\bar{z}^2 + K_{21}z^2\bar{z} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
K_{20} &= \sigma^2 \left[-\frac{2h}{v_m} + 2pc(1+c\beta)^{-3}(1+\beta) \right] + \frac{2p}{(1+c\beta)^2} \sigma e^{-i\omega^* \tau^*}, \\
K_{11} &= 2\sigma\bar{\sigma} \left[-\frac{2h}{v_m} + 2pc(1+c\beta)^{-3}(1+\beta) \right] + \frac{2p}{(1+c\beta)^2} \left[\sigma e^{i\omega^* \tau^*} + \bar{\sigma} e^{-i\omega^* \tau^*} \right], \\
K_{02} &= \bar{\sigma}^2 \left[-\frac{2h}{v_m} + 2pc(1+c\beta)^{-3}(1+\beta) \right] + \frac{2p}{(1+c\beta)^2} \bar{\sigma} e^{-i\omega^* \tau^*}, \\
K_{21} &= \left[-\frac{2h}{v_m} + 2pc(1+c\beta)^{-3}(1+\beta) \right] \left[2\sigma W_{11}^{(2)}(0) + \bar{\sigma} W_{20}^{(2)}(0) \right] \\
&\quad + \frac{2p}{(1+c\beta)^2} \left[\sigma W_{11}^{(1)}(-1) + \frac{\bar{\sigma}}{2} W_{11}^{(1)}(-1) + \frac{W_{20}^{(2)}(0)}{2} e^{i\omega^* \tau^*} + e^{-i\omega^* \tau^*} W_{11}^{(2)}(0) \right] \\
&\quad + 3\sigma^2 \bar{\sigma} \left[-6pc^2(1+c\beta)^{-4}(1+\beta) \right].
\end{aligned}$$

由(15)式, (16)式得

$$g_{20} = 2\tau^* \bar{D}K_{20}, \quad g_{11} = \tau^* \bar{D}K_{11}, \quad g_{02} = 2\tau^* \bar{D}K_{02}, \quad g_{21} = 2\tau^* \bar{D}K_{21}. \quad (17)$$

为计算 g_{21} 需要确定 $W_{20}(\theta), W_{11}(\theta)$ 。由(11)式, (13)式得

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \dot{U}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q} \\
&= \begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)F_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0), \\ AW - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)F_0q(\theta)\} + F_0, & \theta = 0, \end{cases} \\
&= AW + H(z, \bar{z}, \theta),
\end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

根据(14)式得

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}. \quad (19)$$

(18)式与(19)式比较两边系数得

$$(A - 2i\omega^* \tau^* I)W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad AW_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta). \quad (20)$$

当 $\theta \in [-1, 0)$ 时

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -\bar{q}^*(0)F_0q(\theta) - q^*(0)\bar{F}_0\bar{q}(\theta) = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta).$$

由 A 的定义及(20)式得

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega^* \tau^* W_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \quad \dot{W}_{11}(\theta) = g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta),$$

积分可得

$$\begin{aligned}
W_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}}{\omega^* \tau^*} q(0) e^{i\omega^* \tau^* \theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega^* \tau^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^* \tau^* \theta} + E_1 e^{2i\omega^* \tau^* \theta}, \\
W_{11}(\theta) &= -\frac{ig_{11}}{\omega^* \tau^*} q(0) e^{i\omega^* \tau^* \theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega^* \tau^*} \bar{q}(0) e^{-i\omega^* \tau^* \theta} + E_2,
\end{aligned}$$

其中 E_1, E_2 都是常数向量。当 $\theta = 0$ 时, 由 A 的定义及(20)式得

$$\left(2i\omega^* \tau^* I - \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) e^{2i\omega^* \tau^* \theta}\right) E_1 = \tau^* \begin{pmatrix} 0 \\ 2K_{20} \end{pmatrix}, \quad \left(\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\right) E_2 = \tau^* \begin{pmatrix} 0 \\ -K_{11} \end{pmatrix}.$$

进一步得

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2i\omega^* + 1 & -1 \\ \frac{p\beta}{1+c\beta} e^{-2i\omega\tau} & 2i\omega^* - h - \frac{2\beta h}{v_m} + \frac{p(1+\beta)}{1+c\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2K_{20} \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{p\beta}{1+c\beta} & h - \frac{2\beta h}{v_m} - \frac{p(1+\beta)}{(1+c\beta)^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -K_{11} \end{pmatrix}.$$

因此可确定 $W_{20}(\theta), W_{11}(\theta)$, 进而可得(17)式中所有 g_{ij} 。根据以上分析可得

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega^* \tau^*} \left(g_{21}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\operatorname{Re} \lambda'(\tau^*)}, \quad \beta_2 = 2\operatorname{Re} c_1(0), \quad T_2 = -\frac{\operatorname{Im} c_1(0) + \mu_2 \operatorname{Im} \lambda'(\tau^*)}{\omega^* \tau^*}.$$

这些量可以用来判断分支方向和分支周期解的稳定性。

定理 2. μ_2 决定了 Hopf 分支的方向: 若 $\mu_2 > 0 (\mu_2 < 0)$, 则 Hopf 分支方向是超临界的(次临界的)且当 $\tau > \tau^* (\tau < \tau^*)$ 时出现分支周期解; β_2 决定分支周期解的稳定性: 若 $\beta_2 > 0 (\beta_2 < 0)$, 则分支周期解是不稳定的(稳定的); T_2 决定分支周期解的周期变化: 若 $T_2 > 0 (T_2 < 0)$, 周期越来越大(越来越小)。

4. 数值模拟

本节给出具体数值实例, 以验证上面的理论分析结果。

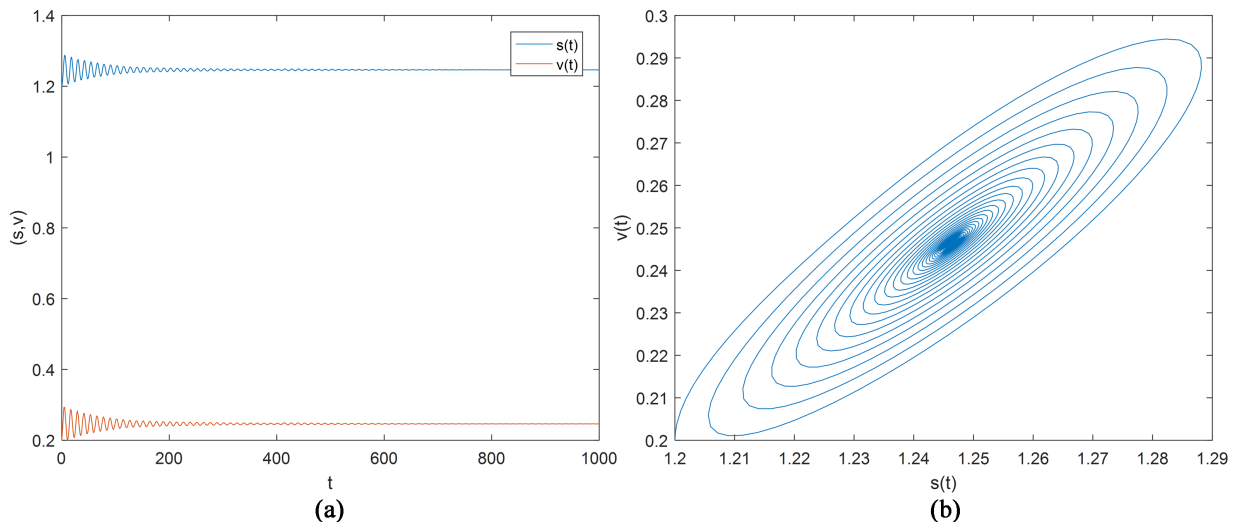


Figure 1. Parameter $\tau = 2.12 < \tau_0^+$, the equilibrium (s^-, v^-) of system (3) is locally asymptotically stable. (a) Time diagram; (b) Phase diagram

图 1. 参数 $\tau = 2.12 < \tau_0^+$, 系统(3)平衡点 (s^-, v^-) 局部渐近稳定。(a) 时间图; (b) 相图

对于系统(3), 取 $h = 3.83, v_m = 1, p = 3.4, c = 1.9$ 得 $\tau_0^+ \approx 2.256$ 。若取 $\tau = 2.12 < \tau_0^+$, 则正平衡点 (s^-, v^-) 渐近稳定, 见图 1。若取 $\tau = 2.3 > \tau_0^+$, 由定理 1 知当 τ 经过 τ_0^+ 时会失去原先的稳定性, 并在 τ_0^+ 附近产生 Hopf 分支, 见图 2。初始值均取 $(s(0), v(0)) = (1.2, 0.2)$ 。

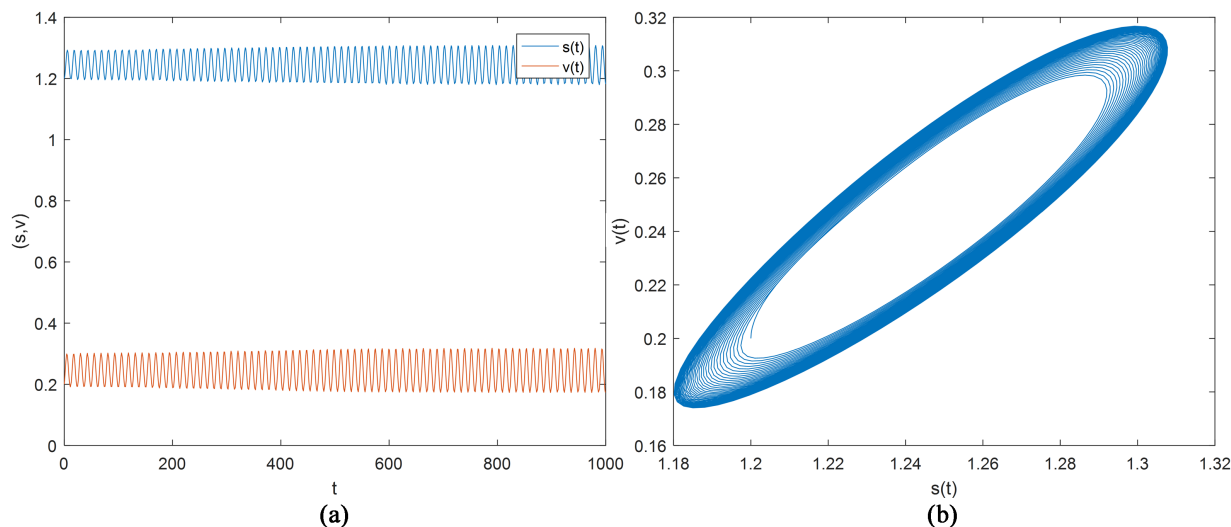


Figure 2. Parameter $\tau = 2.3 > \tau_0^+$, system (3) produces the stable periodic orbits. (a) Time diagram; (b) Phase diagram

图 2. 参数 $\tau = 2.3 > \tau_0^+$, 系统(3)产生稳定的周期闭轨。(a) 时间图; (b) 相图

5. 结论

本文在沙丘高度对植被生长产生时滞效应的情况下研究一类植被-沙模型, 分析了正平衡点的稳定性, 并给出时滞对植被和沙丘周期变化的影响。研究表明, 当时滞效应较小时, 正平衡点是稳定的; 当时滞效应较大时, 正平衡点在一定条件下失去稳定性, 系统会产生 Hopf 分支解, 植被和沙丘最终将呈现周期性变化, 这在一定程度上解释了风沙环境下植被时空分布的形成机制。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61872227, 12126420)。

参考文献

- [1] Sun, G.Q., Wang, C.H., Chang, L.L., *et al.* (2018) Effects of Feedback Regulation on Vegetation Patterns in Semi-Arid Environments. *Applied Mathematical Modelling*, **61**, 200-215. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.04.010>
- [2] Sun, G.Q., Li, L. and Zhang, Z.K. (2013) Spatial Dynamics of a Vegetation Model in an Arid Flat Environment. *Non-linear Dynamics*, **73**, 2207-2219. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-0935-3>
- [3] 李静, 孙桂全, 靳祯. 种内竞争时滞对植被周期振荡模式的影响研究[J]. *应用数学和力学*, 2022, 43(6): 669-681.
- [4] Eigentler, L. and Sherratt, J.A. (2019) Metastability as a Coexistence Mechanism in a Model for Dryland Vegetation Patterns. *Bulletin of Mathematical Biology*, **81**, 2290-2322. <https://doi.org/10.1007/s11538-019-00606-z>
- [5] Klausmeier, C.A. (1999) Regular and Irregular Patterns in Semiarid Vegetation. *Science*, **284**, 1826-1828. <https://doi.org/10.1126/science.284.5421.1826>
- [6] Meron, E., Gilad, E., Von Hardenberg, J., Shachak, M. and Zarmi, Y. (2004) Vegetation Patterns along a Rainfall Gradient. *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 367-376. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(03\)00049-3](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00049-3)
- [7] Zhang, F.F., Zhang, H.Y., Matthew, R. and Huang, T. (2017) Vegetation Patterns Generated by a Wind Driven Sand-Vegetation System in Arid and Semi-Arid Areas. *Ecological Complexity*, **31**, 21-33. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2017.02.005>

- [8] 曹佳会. 植被斑图形成机制的动力学研究[D]: [硕士学位论文]. 太原: 山西大学, 2021: 23-27.
- [9] 曹佳会, 李莉. 半干旱环境下植被-沙模型的斑图动力学[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(9): 232-238.
- [10] Xie, B.L. (2016) Pattern Dynamics in a Vegetation Model with Time Delay. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **443**, 460-466. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.09.075>
- [11] Xu, C.J. (2020) Delay Feedback Strategy for a Fractional-Order Chaotic Financial System. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, **10**, 553-569. <https://doi.org/10.1504/IJDSDE.2020.112760>
- [12] Wei, X. and Wei, J.J. (2017) Turing Instability and Bifurcation Analysis in a Diffusive Bimolecular System with Delayed Feedback. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **50**, 241-255. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.03.006>
- [13] 王颖, 王灵芝. 具有细胞内时滞的耦合传染病模型[J]. 吉林大学学报, 2022, 60(4): 784-792.
- [14] 王晶囡, 杨德中. 具时滞扩散效应的病原体 - 免疫模型的稳定性及分支[J]. 数学物理学报, 2021, 41(4): 1204-1217.
- [15] Guo, K., Song, K.Y. and Ma, W.B. (2022) Existence of Positive Periodic Solutions of a Delayed Periodic Microcystins Degradation Model with Nonlinear Functional Responses. *Applied Mathematics Letters*, **131**, Article ID: 108056. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108056>