Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(11), 7512-7523
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111796

双调和非线性Schrödinger方程的低正则算法

宁 翠

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2022年9月28日；录用日期：2022年10月21日；发布日期：2022年11月1日

摘 要

本文研究了双调和非线性Schrödinger方程的具有一阶收敛的一种低正则算法，得到的算法在损失三阶导数的前提下可以达到一阶收敛．同时，我们通过严格的误差分析，证明了当初值属于$H^{\gamma+3}(\mathbb{T}^d)$时，双调和非线性Schrödinger方程在$H^{\gamma}(\mathbb{T}^d)$上具有一阶收敛，其中$\gamma > \frac{d}{2}$。

关键词

双调和非线性Schrödinger方程，低正则算法，一阶收敛

Low-Regularity Integrator for the Biharmonic NLS Equation

Cui Ning

School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong

Received: Sep. 28th, 2022; accepted: Oct. 21st, 2022; published: Nov. 1st, 2022

Abstract

In this paper, we introduce a first order low-regularity integrator for the biharmonic

文章引用：宁翠．双调和非线性Schrödinger方程的低正则算法[J]．应用数学进展, 2022, 11(11): 7512-7523.
DOI: 10.12677/aam.2022.1111796

nonlinear Schrödinger equation. It only requires the boundedness of three additional derivatives of the solution to be the first order convergent. By rigorous error analysis, we show that the scheme provides first order accuracy in $H^\gamma(\mathbb{T}^d)$ for rough initial data in $H^{\gamma+3}(\mathbb{T}^d)$ with $\gamma > \frac{d}{2}$.

Keywords

Biharmonic Nonlinear Schrödinger Equation, Low-Regularity Integrator, First Order Convergent

1. 引言

本文考虑下述双调和非线性Schrödinger方程

$$\begin{cases} iu_t = (-\Delta)^2 u + \mu |u|^2 u, \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{T}^d), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\mathbb{T}^d = (0, 2\pi)^d$, $u(t, \boldsymbol{x})$是$(\mathbb{R}^+, \mathbb{T}^d)$上的复值函数, $u_0(\boldsymbol{x}) \in H^\gamma(\mathbb{T}^d)(\gamma \geq 0)$ 为给定初值, $\mu = \pm 1$, 并且$d \geq 2$.

双调和非线性Schrödinger方程也叫四阶非线性Schrödinger方程, 有大量的学者对其进行了研究. Zhu等[1] 证明了聚焦型四阶非线性Schrödinger方程质量临界时基态解的变分结构以及解的爆破性. Guo [2] 证明了聚焦型四阶非线性Schrödinger 方程质量超临界时的全局适定性以及径向初值解的散射性. 其他类型的Schrödinger方程的适定性、稳定性、爆破性方面也被广泛研究, 可参见[3–11] 等.

我们不仅可以从数学理论上去研究非线性Schrödinger方程, 其实, 我们还可以用数值方法去探讨非线性Schrödinger方程, 例如有限差分方法[12, 13], 有限元方法[14, 15], 分割法[16, 17], 谱方法[18, 19], 不连续Galerkin方法[20, 21], 指数积分器法[22, 23]等.

在实际生活中, 由于噪声扰动、测量误差性、随机性等原因, 初始数据通常无法满足较高的光滑性要求. 但大部分方法要求初值具有很高的光滑性, 当方程的解不够光滑时, 只有在该解上附加一

定的正则性的假设, 才能够实现某一阶的收敛. 因此, 对于精确解$u(t_n)$, 我们的目标是找到一种低正则数值解u^n, 使得下式成立:

$$\|u(t_n) - u^n\|_{H^\gamma} \leq C\tau^\alpha.$$

其中, τ表示时间步长, α表示收敛阶数, 初值$u_0(x) = u(0, x)$属于某个$H^{\gamma+s}$空间. 我们希望s 尽量小, 即初始值尽可能有较低的正则性, 而实现α阶的收敛, 这也是目前大家很关注的低正则性算法. 对于经典的非线性Schrödinger方程, Lubich [24]利用Strange Splitting算法, 当初值属于$H^{\gamma+2}$ 时, 得到了该方程在H^γ中的一阶收敛. 后来, Ostermann 和Schratz [25]利用新型指数型算法, 当初值属于$H^{\gamma+1}$时, 得到了在H^γ中的一阶收敛. 最近, Wu和Yao [26]给出了一种Fourier积分算法, 当初值属于H^γ 时, 证明了在H^γ中的一阶收敛, 该算法不需要损失任何导数.

本文研究双调和非线性Schrödinger方程(1), 结合上述方法, 我们构造了一种新的低正则算法, 定义为：

$$u^n = e^{-i\tau(-\Delta)^2} u^{n-1} - i\mu\tau e^{-i\tau(-\Delta)^2} \left[(u^{n-1})^2 \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2) \overline{u^{n-1}} \right]. \tag{2}$$

我们得到的主要定理为

定理 1. *设u^n是双调和非线性Schrödinger方程(1)满足(2)格式的数值解, 固定$T > 0$. 对任意的$\gamma > \frac{d}{2}$, 假设$u_0(\boldsymbol{x}) \in H^{\gamma+3}(\mathbb{T}^d)$, 存在常数$\tau_0$, $C > 0$使得对任意的$0 < \tau \leq \tau_0$, 有*

$$\|u(t_n) - u^n\|_{H^{\gamma+3}} \leq C\tau, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \frac{T}{\tau}, \tag{3}$$

其中τ_0和$C > 0$仅依赖于T和$\|u\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}$.

本文安排如下. 在第 2 节中, 我们给出了一些符号和一些有用的引理. 在第 3 节中, 我们给出一阶数值格式的主要构造过程. 在第 4 节中, 我们证明定理1.

2. 预备知识

在本节中, 我们介绍一些定义、性质和重要的估计. 为了方便记号, 我们使用$A \lesssim B$或者$B \gtrsim A$来表示如下含义：存在某绝对常数$C > 0$, 使得$A \leq CB$, 并使用$A \sim B$来表示$A \lesssim B \lesssim A$.

对于向量$\boldsymbol{\xi} := (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{\xi}_1 := (\xi_{11}, ..., \xi_{1d}) \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{x} := (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{T}^d$, 内积和模定义如下:

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x} = \xi_1 x_1 + ... + \xi_d x_d, \qquad |\boldsymbol{\xi}|^2 = |\xi_1|^2 + ... + |\xi_d|^2.$$

在周期$\mathbb{T}^d$上, 我们定义函数f的Fourier变换为

$$\hat{f}_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

其Fourier逆变换为$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{Z}^d} e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}$.

对函数$f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, 我们定义$f(\boldsymbol{x})$的Fourier展开式为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}\, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Fourier变换常用性质

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}|^2,$$

和

$$\widehat{fg}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_{\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_1} \hat{g}_{\boldsymbol{\xi}_1}.$$

定义Sobolev空间H^γ, $\gamma > 0$的范数为

$$\|f\|_{H^\gamma(\mathbb{T}^d)}^2 = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2\gamma} |\hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}|^2.$$

我们定义算子$(-\Delta)^{-1}$为

$$\widehat{(-\Delta)^{-1}}f = \begin{cases} |\boldsymbol{\xi}|^{-2} \hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}, & \text{当} \quad \boldsymbol{\xi} \neq 0, \\ 0, & \text{当} \quad \boldsymbol{\xi} = 0. \end{cases}$$

此外, 我们还需要用到如下函数：

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases} \tag{4}$$

现在, 我们给出要用到的一些重要的估计.

引理 2. *(等距性质)* 对$f \in H^\gamma$, $\quad t \in \mathbb{R}$ 有

$$\|e^{-i(-\Delta)^2 t} f\|_{H^\gamma} = \|f\|_{H^\gamma}.$$

Proof. 根据H^γ范数的定义, 可知

$$\begin{aligned} \|e^{-i(-\Delta)^2 t} f\|_{H^\gamma} &= \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2\gamma} |\widehat{e^{-i(-\Delta)^2 t} f}_{\boldsymbol{\xi}}|^2 \\ &= \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2\gamma} |e^{-i|\boldsymbol{\xi}|^4 t} \hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}|^2 \\ &= \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2\gamma} |\hat{f}_{\boldsymbol{\xi}}|^2 \\ &= \|f\|_{H^\gamma}. \end{aligned}$$

□

引理 3. *(Kato-Ponce不等式)* 对任意的$\gamma > \frac{d}{2}$, $f, g \in H^\gamma$, 有下面不等式成立

$$\|fg\|_{H^\gamma} \leq \|f\|_{H^\gamma} \|g\|_{H^\gamma}.$$

Proof. 该引理的证明可参见文献[27]. □

3. 数值格式的构造

在本节中, 我们介绍数值格式的构造过程. 为了简化符号, 我们将省略所涉及的时空相关函数中的空间变量$\boldsymbol{x}$, 如$u(t) = u(t, \boldsymbol{x})$. 另外, 我们用$\tau > 0$表示时间步长, $t_n = n\tau$ 表示时间网格.

双调和非线性Schrödinger方程(1), 通过Duhamel公式, 可得

$$u(t, \boldsymbol{x}) = e^{-it(-\Delta)^2} u_0 - i\mu \int_0^t e^{-i(t-s)(-\Delta)^2} (|u(s, x)|^2 u(s, \boldsymbol{x})) ds.$$

引入扭转变量

$$v(t, \boldsymbol{x}) = e^{it(-\Delta)^2} u(t, \boldsymbol{x}), \tag{5}$$

有

$$v(t_n + \tau) = v(t_n) - i\mu \int_0^\tau e^{i(t_n+s)(-\Delta)^2} \left[|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n + s)|^2 e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n + s) \right] ds. \tag{6}$$

此外, 扭转变量满足

$$\partial_t v(t) = -i\mu e^{it(-\Delta)^2} \left[|e^{-it(-\Delta)^2} v(t)|^2 e^{-it(-\Delta)^2} v(t) \right], \qquad v(0) = u_0. \tag{7}$$

因为我们只需要得到一阶收敛, 所以可以用$v(t_n + s) \approx v(t_n)$简化上述格式, 得

$$v(t_n + \tau) = v(t_n) + \Phi(v(t_n)) + \mathcal{R}_1^n,$$

其中

$$\Phi(v(t_n)) = -i\mu \int_0^\tau e^{i(t_n+s)(-\Delta)^2} \left[|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n)|^2 e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n) \right] ds,$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^n = -i\mu \int_0^\tau e^{i(t_n+s)(-\Delta)^2} \big[&|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n + s)|^2 e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n + s) \\ &- |e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n)|^2 e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2} v(t_n) \big] ds. \end{aligned} \tag{8}$$

这里的$\mathcal{R}_1^n$可以看作是一个不损失额外正则性的高阶项, 可以在算法构造中舍弃.

接下来, 我们只需要对$\Phi(v(t_n))$进行分析, 利用Fourier展开可得

$$\Phi(v(t_n)) = -i\mu \sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}} \bar{\hat{v}}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} e^{it_n\alpha} \int_0^\tau e^{is\alpha} ds,$$

其中我们简记$\bar{\hat{v}}_1 = \bar{\hat{v}}_{\boldsymbol{\xi}_1}(t_n)$, $\hat{v}_2 = \hat{v}_{\boldsymbol{\xi}_2}(t_n)$ 和$\hat{v}_3 = \hat{v}_{\boldsymbol{\xi}_3}(t_n)$, 且$\alpha = |\boldsymbol{\xi}|^4 + |\boldsymbol{\xi}_1|^4 - |\boldsymbol{\xi}_2|^4 - |\boldsymbol{\xi}_3|^4$. 利用$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3$, 则$\alpha$可以分解成

$$\begin{aligned}\alpha =& 2|\boldsymbol{\xi}_1|^4 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{3} |\boldsymbol{\xi}_j|^2 \boldsymbol{\xi}_j \bar{\boldsymbol{\xi}}_k + \sum_{\substack{j,k,h=1 \\ j\neq k\neq h}}^{3} |\boldsymbol{\xi}_j|^2 \boldsymbol{\xi}_k \bar{\boldsymbol{\xi}}_h + \sum_{\substack{j,k,h=1 \\ j\neq k\neq h}}^{3} \boldsymbol{\xi}_j^2 \bar{\boldsymbol{\xi}}_k \bar{\boldsymbol{\xi}}_h \\ =& 2|\boldsymbol{\xi}_1|^4 + \beta,\end{aligned}$$

其中

$$\beta = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{3} |\boldsymbol{\xi}_j|^2 \boldsymbol{\xi}_j \bar{\boldsymbol{\xi}}_k + \sum_{\substack{j,k,h=1 \\ j\neq k\neq h}}^{3} |\boldsymbol{\xi}_j|^2 \boldsymbol{\xi}_k \bar{\boldsymbol{\xi}}_h + \sum_{\substack{j,k,h=1 \\ j\neq k\neq h}}^{3} \boldsymbol{\xi}_j^2 \bar{\boldsymbol{\xi}}_k \bar{\boldsymbol{\xi}}_h = O(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{3} |\boldsymbol{\xi}_j|^3 |\boldsymbol{\xi}_k|).$$

因此, 我们可以将$\Phi(v(t_n))$写成

$$\begin{aligned}\Phi(v(t_n)) =& -i\mu \sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}} \bar{\hat{v}}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} e^{it_n\alpha} \int_0^\tau e^{is2|\boldsymbol{\xi}_1|^4} ds + \mathcal{R}_2^n \\ =& -i\mu \sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}} \bar{\hat{v}}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} e^{it_n\alpha} \frac{e^{i\tau 2|\boldsymbol{\xi}_1|^4} - 1}{i\tau 2|\boldsymbol{\xi}_1|^4} + \mathcal{R}_2^n \\ =& -i\mu\tau e^{it_n(-\Delta)^2} \left[(e^{-it_n(-\Delta)^2} v(t_n))^2 \cdot \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2) \overline{e^{-it_n(-\Delta)^2} v(t_n)} \right] \\ & + \mathcal{R}_2^n,\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{R}_2^n = -i\mu \sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d \\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}} \bar{\hat{v}}_1 \hat{v}_2 \hat{v}_3 \, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} e^{it_n\alpha} \int_0^\tau e^{is2|\boldsymbol{\xi}_1|^4} (e^{is\beta} - 1) ds. \tag{9}$$

这里的$\mathcal{R}_2^n$如果看成是一个高阶项不写进算法, 则要损失三阶导数作为代价. 因此, 扔掉高阶项$\mathcal{R}_1^n$和$\mathcal{R}_2^n$, 我们得到

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + \Psi^n(v(t_n)),$$

其中

$$\Psi^n(f) = -i\mu\tau e^{it_n(-\Delta)^2}\big[(e^{-it_n(-\Delta)^2}f)^2\cdot\varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}f}\big]. \tag{10}$$

最后, 我们完成了数值算法的构造:

$$v^{n+1} = v^n - i\mu\tau e^{it_n(-\Delta)^2}\big[(e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n)^2\cdot\varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n}\big], \tag{11}$$

这里的$n\geq 0$, $v^0 = u_0$, 并且$v^n = v^n(\boldsymbol{x})$.

将扭转变量(5)反过来代入到(11), 即可得到双调和非线性Schrödinger方程(1)的一阶收敛数值算法(2).

4. 定理1的证明

本节我们通过局部误差分析和稳定性分析对一阶收敛结果给出一个严格的证明. 由引理2可知, 扭转变量(5)在Sobolev空间是等距的, 则有

$$\|u(t_n)-u^n\|_{H^\gamma} = \|e^{-it_n(-\Delta)^2}v(t_n) - e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n\|_{H^\gamma} = \|v(t_n)-v^n\|_{H^\gamma}.$$

因此, 我们只需要证明对$v(t_n)$和v^n的一阶收敛定理.

回顾第 3 节中的精确解(6)

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + \Psi^n(v(t_n)) + \mathcal{R}_1^n + \mathcal{R}_2^n,$$

和数值解(11)

$$v^{n+1} = v^n + \Psi^n(v^n).$$

因此, 可得两个解的误差

$$v(t_{n+1}) - v^{n+1} = \mathcal{L}^n + \mathcal{S}^n,$$

其中

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{R}_1^n + \mathcal{R}_2^n,$$

和

$$\mathcal{S}^n = v(t_n) - v^n + \Psi^n(v(t_n)) - \Psi^n(v^n).$$

下面, 我们将估计局部误差$\mathcal{L}^n$和稳定性$\mathcal{S}^n$.

引理 4. *(局部误差) 设$\gamma > \frac{d}{2}$. 假设$u_0\in H^{\gamma+3}$, 则存在常数τ_0和$C>0$, 使得对于任意的$0<\tau\leq\tau_0$, 有下列不等式成立*

$$\|\mathcal{L}^n\|_{H^\gamma} \leq C\tau^2, \tag{12}$$

其中τ_0和$C>0$仅依赖于T和$\|v\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}$.

Proof. 根据$\mathcal{L}^n$的定义, 有

$$\|\mathcal{L}^n\|_{H^\gamma}\le\|\mathcal{R}_1^n\|_{H^\gamma}+\|\mathcal{R}_2^n\|_{H^\gamma}.$$

由$\mathcal{R}_1^n$的定义(8), 利用引理2和引理3可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_1^n\|_{H^\gamma}\lesssim&\int_0^\tau\|\big[(e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n+s)-e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n))|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n+s)|^2\\&+(|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n+s)|^2-|e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n)|^2)e^{-i(t_n+s)(-\Delta)^2}v(t_n)\big]\|_{H^\gamma}ds\\\lesssim&\int_0^\tau\|v(t_n+s)-v(t_n)\|_{H^\gamma}\|v(t_{n+1})\|_{H\gamma}^2\\&+\|v(t_n)\|_{H\gamma}\|v(t_n+s)-v(t_n)\|_{H^\gamma}(\|v(t_n+s)\|_{H\gamma}+\|v(t_n)\|_{H\gamma})ds.\end{aligned}$$

再由等式(7), 可知

$$\begin{aligned}\|v(t_n+s)-v(t_n)\|_{H^\gamma}\lesssim&\int_0^s\|\partial_t v(t_n+t)\|_{H^\gamma}dt\\\lesssim&\int_0^s\||e^{-i(t_n+t)(-\Delta)^2}v(t_n+t,x)|^2e^{-i(t_n+t)(-\Delta)^2}v(t_n+t,x)\|_{H^\gamma}dt\\\lesssim&\int_0^s\|v\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}^3dt\\\lesssim&Cs\|v\|_{L^\infty((0,T);H^\gamma)}^3.\end{aligned}$$

因此, 我们可得

$$\|\mathcal{R}_1^n\|_{H^\gamma}\lesssim C\tau^2\|v\|_{L^\infty((0,T);H^\gamma)}^5.$$

因为$|e^{is\beta}-1|\sim|s\beta|$, 根据$\mathcal{R}_2^n$的定义(9)可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_2^n\|_{H^\gamma}^2\lesssim&\sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{2\gamma}|\sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d\\\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}}\bar{\hat{v}}_1\hat{v}_2\hat{v}_3\,e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}e^{it_n\alpha}\int_0^\tau e^{is2|\boldsymbol{\xi}_1|^4}(e^{is\beta}-1)ds|^2\\\lesssim&C\sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{2\gamma}\sum_{\substack{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathbb{Z}^d\\\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3}}|\bar{\hat{v}}_1\hat{v}_2\hat{v}_3\int_0^\tau s\beta ds|^2.\end{aligned}$$

又由$|\beta|\lesssim O(\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^3|\boldsymbol{\xi}_j|^3|\boldsymbol{\xi}_k|)$, 可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_2^n\|_{H^\gamma}^2\lesssim&C\tau^4\sum_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{2\gamma}|\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^3(1+|\boldsymbol{\xi}_j|)^3(1+|\boldsymbol{\xi}_k|)\bar{\hat{v}}_1\hat{v}_2\hat{v}_3|^2\\\lesssim&C\tau^4\|v\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}^6.\end{aligned}$$

综上可知,

$$\|\mathcal{L}^n\|_{H^\gamma} \le \|\mathcal{R}_1^n\|_{H^\gamma} + \|\mathcal{R}_2^n\|_{H^\gamma} \le C\tau^2,$$

其中C仅依赖于$\|v\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}$. 至此, 我们完成了引理4的证明. □

引理 5. *(稳定性)* 设$\gamma > \frac{d}{2}$. 假设$u_0 \in H^{\gamma+3}$, 则存在常数τ_0和$C > 0$, 使得对于任意的$0 < \tau \le \tau_0$, 有下列不等式成立

$$\|\mathcal{S}^n\|_{H^\gamma} \le (1 + C\tau)\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma} + C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma}^3,$$

其中τ_0和$C > 0$仅依赖于T和$\|v\|_{L^\infty((0,T);H^\gamma)}$.

Proof. 由$\mathcal{S}^n$的定义可知,

$$\|\mathcal{S}^n\|_{H^\gamma} \le \|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma} + \|\Psi^n(v(t_n)) - \Psi^n(v^n)\|_{H^\gamma}.$$

回顾Ψ^n定义(10), 可得

$$\begin{aligned}\|\Psi(v(t_n)) - \Psi(v^n)\|_{H^\gamma} \lesssim & C\tau\|(e^{-it_n(-\Delta)^2}v(t_n))^2 \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v(t_n)} \\ & - (e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n)^2 \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n}\|_{H\gamma}.\end{aligned}$$

结合引理2, 可得

$$\begin{aligned}&\|\Psi(v(t_n)) - \Psi(v^n)\|_{H^\gamma} \\ &\qquad \lesssim C\tau\|(v(t_n) - v^n)(v(t_n) + v^n) \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v(t_n)}\|_{H\gamma} \\ &\qquad + C\tau\|(e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n)^2 \cdot \varphi(2i\tau(-\Delta)^2)\big[\overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v(t_n)} - \overline{e^{-it_n(-\Delta)^2}v^n}\big]\|_{H\gamma}.\end{aligned}$$

由引理3, 进一步可得

$$\begin{aligned}\|\Psi(v(t_n)) - \Psi(v^n)\|_{H^\gamma} \lesssim & C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma} + C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma}^2 + C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma}^3 \\ \lesssim & C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma} + C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma}^3,\end{aligned}$$

其中C仅依赖于$\|v\|_{L^\infty((0,T);H^\gamma)}$. 因此, 我们可以得到引理5的证明. □

下面, 结合局部误差估计和稳定性结果, 我们给出定理1的证明.

Proof. 根据引理4和引理5, 可得

$$\|v(t_{n+1}) - v^{n+1}\|_{H^\gamma} \le C\tau^2 + (1 + C\tau)\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma} + C\tau\|v(t_n) - v^n\|_{H^\gamma}^3,$$

其中$n = 0, 1, 2, ..., \frac{T}{\tau} - 1$和$C$仅依赖于$T$和$\|v\|_{L^\infty((0,T);H^{\gamma+3})}$.

利用迭代法和Gronwall's不等式, 我们可得

$$\|v(t_{n+1}) - v^{n+1}\|_{H^\gamma} \le C\tau^2 \sum_{j=0}^{n} (1 + C\tau)^j \le C\tau, \quad n = 0, 1, 2, ..., \frac{T}{\tau} - 1.$$

这就完成了一阶收敛定理的证明. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11901120)。

参考文献

[1] Zhu, S., Zhang, J. and Yang, H. (2010) Limiting Profile of the Blow-Up Solutions for the Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **7**, 187-205. https://doi.org/10.4310/DPDE.2010.v7.n2.a4

[2] Guo, Q. (2016) Scattering for the Focusing L^2-Supercritical and $\dot{H}^2$-Subcritical Biharmonic NLS Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **41**, 185-207. https://doi.org/10.1080/03605302.2015.1116556

[3] Li, Y., Wu, Y. and Xu, G. (2011) Global Well-Posedness for the Mass-Critical Nonlinear Schrödinger Equation on T. *Journal of Differential Equations*, **250**, 2715-2736. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.01.025

[4] Li, Y., Wu, Y. and Xu, G. (2011) Low Regularity Global Solutions for the Focusing Mass-Critical NLS in $\mathbb{R}$. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **43**, 322-340. https://doi.org/10.1137/090774537

[5] Wu, Y. (2013) Global Well-Posedness of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equations in Energy Space. *Analysis & PDE*, **6**, 1989-2002. https://doi.org/10.2140/apde.2013.6.1989

[6] Liu, X., Simpson, G. and Sulem, C. (2013) Stability of Solitary Waves for a Generalized Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Nonlinear Science*, **23**, 557-583. https://doi.org/10.1007/s00332-012-9161-2

[7] Wu, Y. (2015) Global Well-Posedness on the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Analysis & PDE*, **8**, 1101-1113. https://doi.org/10.2140/apde.2015.8.1101

[8] Ning, C., Ohta, M. and Wu, Y. (2017) Instability of Solitary Wave Solutions for Derivative Nonlinear Schrödinger Equation in Endpoint Case. *Journal of Differential Equations*, **262**, 1671-1689. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.020

[9] Le Coz, S. and Wu, Y. (2018) Stability of Multi-Solitons for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *International Mathematics Research Notices*, No. 13, 4120-4170. https://doi.org/10.1093/imrn/rnx013

[10] Ning, C. (2020) Instability of Solitary Wave Solutions for Derivative Nonlinear Schrödinger Equation in Borderline Case. *Nonlinear Analysis*, **192**, Article ID: 111665. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111665

[11] Feng, B. and Zhu, S. (2021) Stability and Instability of Standing Waves for the Fractional Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **292**, 287-324. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.05.007

[12] Courtès, C., Lagoutière, F. and Rousset, F. (2020) Error Estimates of Finite Difference Schemes for the Korteweg-de Vries Equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **40**, 628-685. https://doi.org/10.1093/imanum/dry082

[13] Holden, H., Koley, U. and Risebro, N. (2014) Convergence of a Fully Discrete Finite Difference Scheme for the Korteweg-de Vries Equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **35**, 1047-1077. https://doi.org/10.1093/imanum/dru040

[14] Aksan, E. and Özdeş, A. (2006) Numerical Solution of Korteweg-de Vries Equation by Galerkin B-Spline Finite Element Method. *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 1256-1265. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.08.038

[15] Dutta, R., Koley, U. and Risebro, N.H. (2015) Convergence of a Higher Order Scheme for the Korteweg-de Vries Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53**, 1963-1983. https://doi.org/10.1137/140982532

[16] Holden, H., Karlsen, K.H., Risebro, N.H. and Tang, T. (2011) Operator Splitting for the KdV Equation. *Mathematics of Computation*, **80**, 821-846. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2010-02402-0

[17] Holden, H., Lubich, C. and Risebro, N.H. (2012) Operator Splitting for Partial Differential Equations with Burgers Nonlinearity. *Mathematics of Computation*, **82**, 173-185. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2012-02624-X

[18] Ma, H. and Sun, W. (2001) Optimal Error Estimates of the Legendre-Petrov-Galerkin Method for the Korteweg-de Vries Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**, 1380-1394. https://doi.org/10.1137/S0036142900378327

[19] Shen, J. (2003) A New Dual-Petrov-Galerkin Method for Third and Higher Odd-Order Differential Equations: Application to the KdV Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **41**, 1595-1619. https://doi.org/10.1137/S0036142902410271

[20] Yan, J. and Shu, C.W. (2002) A Local Discontinuous Galerkin Method for KdV Type Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 769-791. https://doi.org/10.1137/S0036142901390378

[21] Liu, H. and Yan, J. (2006) A Local Discontinuous Galerkin Method for the Kortewegde Vries Equation with Boundary Effect. *Journal of Computational Physics*, **215**, 197-218. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.10.016

[22] Hochbruck, M. and Ostermann, A. (2010) Exponential Integrators. *Acta Numerica*, **19**, 209-286. https://doi.org/10.1017/S0962492910000048

[23] Hofmanová, M. and Schratz, K. (2017) An Exponential-Type Integrator for the KdV Equation. *Numerische Mathematik*, **136**, 1117-1137. https://doi.org/10.1007/s00211-016-0859-1

[24] Lubich, C. (2008) On Splitting Methods for Schrödinger-Poisson and Cubic Nonlinear Schrödinger Equations. *Mathematics of Computation*, **77**, 2141-2153. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-08-02101-7

[25] Ostermann, A. and Schratz, K. (2018) Low Regularity Exponential-Type Integrators for Semilinear Schrödinger Equations. *Foundations of Computational Mathematics*, **18**, 731-755. https://doi.org/10.1007/s10208-017-9352-1

[26] Wu, Y. and Yao, F. (2022) A First-Order Fourier Integrator for the Nonlinear Schrödinger Equation on $\mathbb{T}$ without Loss of Regularity. *Mathematics of Computation*, **91**, 1213-1235. https://doi.org/10.1090/mcom/3705

[27] Kato, T. and Ponce, G. (1988) Commutator Estimates and the Euler and Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**, 891-907. https://doi.org/10.1002/cpa.3160410704