

广义 Petersen 图 $P(4k,4)$ 的交叉数

卢 妮

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年10月11日; 录用日期: 2022年11月4日; 发布日期: 2022年11月15日

摘 要

图的交叉数是图论中一个重要的部分, 近百年来, 国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究。由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。本文主要对广义 Petersen 图 $P(4k,4)$ 的交叉数进行研究。采用反证法和数学归纳法, 将 $P(4k,4)$ 的边集分成边不相交的 $4k$ 组, 讨论所有可能情况, 从而证得 $P(4k,4)(k \geq 4)$ 的交叉数的下界至少是 $2k$ 。

关键词

交叉数, 好画法, 广义 Petersen 图

The Crossing Number of Generalized Petersen Graph $P(4k,4)$

Ni Lu

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 11th, 2022; accepted: Nov. 4th, 2022; published: Nov. 15th, 2022

Abstract

The crossing number of graphs is an important part of graph theory. In the past 100 years, many scholars at home and abroad have studied the problem of the crossing number of graphs. Due to the difficulty of proof, the research progress in the field of the crossing numbers at home and abroad is slow. This paper mainly studies the crossing number of generalized Petersen graph $P(4k,4)$. The method of proof by contradiction and mathematical induction are adopted, the edge set of $P(4k,4)$ is divided into $4k$ groups with disjoint edges, and discuss all possible situations to prove that the lower bound of the crossing number of $P(4k,4)(k \geq 4)$ is at least $2k$.

Keywords

Crossing Number, Good Drawing, Generalized Petersen Graph

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 交叉数研究进展

图的交叉数是图论中一个重要的部分, 近百年来, 国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究。图的交叉数问题的研究, 起源于 20 世纪 40 年代砖厂遇到的难题。第二次世界大战时期, Turan [1] 发现运砖车沿铁轨向仓库运砖时, 车很容易在铁轨交点的位置脱节。他因此想到通过减少铁轨交叉个数来降低损失的方法, 交叉数的概念由此而来。Garey 和 Johnson [2] 证明了确定一个图的交叉数是 NP-完全问题。由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。研究者们根据图的结构对图加以分类, 取得了一些研究成果, 下面主要介绍了完全图, 完全二部图以及广义 Petersen 图的部分研究成果。

1.1. 完全图

1960 年, R. K. Guy [3] 对 n 个顶点的完全图 K_n 的交叉数提出下面的猜想:

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

其中对任意实数 x , $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数。

1969 年, R. K. Guy [4] 在文献中对完全图的交叉数进一步研究, 验证了当 $n \leq 10$ 时, 猜想成立。

1970 年, Kieitman [5] 在文献中给出了当 n 足够大时, 完全图 K_n 交叉数的下界:

$$cr(K_n) \geq n(n-1)(n-2)(n-3)/80.$$

2002 年, Alcholzer, Aurenhammer 和 Krasserl [6] 用计算机穷举方法证明了 K_{11} 和 K_{12} 的交叉数分别是 100 和 150, 并给出了 K_{13} 的交叉数等于 229。

1.2. 完全二部图

1954 年, Zarankiewicz [7] 给出了完全二部图 $K_{m,n}$ 交叉数的猜想:

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

1970 年, Kieitman [5] 证明当 $\min(m, n) \leq 6$ 时, Zarankiewicz 的猜想成立。

1993 年, Woodall [8] 验证了 Zarankiewicz 的猜想对于 $K_{7,7}$ 和 $K_{7,9}$ 成立。

2003 年, N. H. Nahas [9] 进一步研究当 m, n 足够大时完全二部图的交叉数:

$$cr(K_{m,n}) \geq \frac{1}{5} m(m-1) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 9.9 \times 10^{-6} m^2 n^2.$$

1.3. 广义 Petersen 图

关于 Petersen 图的交叉数学者们进行了广泛的研究。最早研究广义 Petersen 图在 1981 年, Exoo, Harary 和 Kabel [10]证明了:

$$\begin{cases} cr(P(n,2)) = 0, & \text{如果 } n \text{ 为偶数或者 } n = 3; \\ cr(P(n,2)) = 2, & \text{如果 } n = 5; \\ cr(P(n,2)) = 3, & \text{如果 } n \text{ 为奇数或者 } n \geq 7. \end{cases}$$

1986 年 Fiorini [11]对广义 Petersen 图的交叉数进行研究, 计算出当 $n \geq 14$ 时所有 $P(n,k)$ 交叉数的具体值, 然而 Fiorini 的证明存在错误。对于 $cr(P(9,3)) = 2$ 给出了的数学证明, 确定了 $cr(P(10,3)) = 4$, 并且

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, & (h \geq 4); \\ h + 1 \leq cr(P(3h + 1,3)) \leq h + 3, & (h \geq 3); \\ cr(P(3h + 1,3)) = h + 2, & (h \geq 2). \end{cases}$$

2002 年, Richter 和 Salazar [12]指出 Fiorini 的证明存在错误, 用数学归纳法重新证明并更正了 Fiorini 的结论:

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, & (h \geq 3); \\ cr(P(3h + 1,3)) = 3h + 1, & (h > 2); \\ cr(P(3h + 1,3)) = h + 2, & (h > 2). \end{cases}$$

1997 年 Sarazin [13]在其文章中证明了 $cr(P(10,4)) = 4$ 。

Salazar [14]给出了对于任意的 $k \geq 5, n \geq k$, 有:

$$\frac{2}{5} \left[\left(1 - \frac{4}{k} \right) (n - k^4) \right] + (4k^2 + 1 - k^3) \leq cr(P(n,k)) \leq \left(2 - \frac{2}{k} \right) n + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1 \right).$$

2004 年, 林晓惠[15]在其论文中得出了 $P(4k + 2, 2k)$ 等部分广义 Petersen 图的交叉数的上界。

2005 年, 马登举等人[16]证明了 $G(2m + 1, m)$ 的交叉数。

2009 年, 杨元生等人[17]利用算法给出了 $n \geq 16$ 时 $P(n,k)$ 的交叉数的精确值。

Fiorini 和黄元秋等人[18]分别用不同方法证明了 $P(3k,k)$ 的交叉数。

2013 年, 郑百功[19]在硕士论文中证明了 $P(10,3)$ 的交叉数

2. 广义 Petersen 图 $P(4k,4)$

设广义 Petersen 图 $P(4k,4)$ 中的顶点集 $V(P(4k,4)) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq 4k\}$, 边集

$E(P(4k,4)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+4} \mid 1 \leq i \leq 4k\}$, $k \geq 3$, 其中下标取模 $4k$ 。设 $V(F_i) = \{u_i, u_{i+1}, v_i, v_{i+4}\}$, $E(F_i) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+4}\}$ 和 $H_i = F_i \cup F_{i+4}$, $1 \leq i \leq 4k$ 且 $k \geq 3$, 其中下标取模 $4k$ 。很容易得到 $\{F_1, F_2, \dots, F_i\}$ 是 $P(4k,4)$ 的一个可传递分解, 并且 $\{H_1, H_2, \dots, H_i\}$ 是 $P(4k,4)$ 的可传递一致 2 覆盖, 其中 $k \geq 3$, 即

$$\begin{aligned} E(P(4k,4)) &= \bigcup_{i=1}^{4k} F_i \\ 2E(P(4k,4)) &= \bigcup_{i=1}^{4k} H_i. \end{aligned}$$

画法 D 下的交叉数用 $cr(D)$ 或 $cr_D(G)$ 表示。设 H 是 G 的子图且 $f_D(H)$ 是 H 到所有非负实数集合的映射:

$$f_D(H) = cr_D(H) + cr_D(H, G \setminus E(H)) / 2.$$

设 $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ 是 G 的一个可传递的一致 k 覆盖。假设 $H_{i,j}$ 是 H_i, H_{i+1}, \dots, H_j 的并集, 下标取模 t , G 中每一条边最多出现在 H_i, H_{i+1}, \dots, H_j 中的一个, 否则设 $H_{i,j}$ 表示多重图使 $V(H_{i,j}) = V(G)$, $E(G) \subseteq E(H_{i,j})$, 对于 $uv \in E(H_k)$, uv 恰好出现在 H_i, H_{i+1}, \dots, H_j 的 $\mu(u, v)$ 个子图中, $\mu(u, v)$ 表示 $H_{i,j}$ 中连接 u 和 v 的平行边数目, 其中 $i \leq k \leq j$ 。如果 $H_{i,j}$ 是多重图, 那么

$$f_D(H_{i,j}) = \sum_{uv \in H_{i,j}} \mu(u, v) f_D(uv).$$

设 c 是一个正整数。对于 $1 \leq i \leq t$, 若存在一个正整数 l_i 满足 $f_D(H_{i, i-1+l_i}) \geq l_i c$, 则令 L_i^D 为 l_i 的最小值使 $f_D(H_{i, i-1+l_i}) \geq l_i c$, 若不存在这样的正整数 l_i , 则令 $L_i^D = +\infty$ 。

令 C_i 为圈 $u_{i+1}u_i v_i v_{i+4} u_{i+4} u_{i+5} v_{i+5} v_{i+1} u_{i+1}$, $P_0 = u_1 u_2 \dots u_{4k}$ 和 $P_j = v_j v_{j+4} \dots v_{4k-4+j}$, $1 \leq j \leq 4$ 。对于路径 P , 如果 $u, v \in V(P)$, 则 uPv 表示 P 从 u 到 v 的连续顶点。

在本节中如果没有特别说明, 假设 i 和 k 是正整数, 当 $1 \leq i \leq 4k, k \geq 5$ 时, 设 $cr(P(4(k-1)k, 4)) \geq 2(k-1)$ 且 D 为 $P(4k, 4)$ 的一个好画法, $cr(D) < 2k$ 。令 $V(B_i) = \{u_i, v_i\}$, $E(B_i) = \{u_i v_i\}$, 由于 $P(4k, 4) \setminus E(B_{i+3})$ 是 $P(4(k-1), 4)$ 的一个细分, 我们得到以下结果。

引理 2.1 $cr_D(B_{i+3}) + cr_D(B_{i+3}, P(4k, 4) \setminus E(B_{i+3})) \leq 1$ 。

根据 Jordan 曲线定理, 我们有以下引理。

引理 2.2 在图 G 中, 设 C 和 C' 为两个顶点不相交的圈, $P_k = u_1 u_2 \dots u_k$ 为 k 阶路径且 $V(P_k) \cap V(C) = \emptyset$ 。假设 D 是 G 的一个好画法, 那么 $cr_D(C, C')$ 是偶数; 当 u_1 和 u_k 在 $D(C)$ 的同一区域时, $cr_D(C, P_k)$ 为偶数, 否则为奇数。

为了后续证明叙述方便, 现将引理 2.2 统称为引理 2。

3. 广义 Petersen 图 $P(4k, 4)$ 的交叉数

引理 3.1 若 $L_i^D > 2$ 且 $cr_D(H_{i, i+1}) = 1$, 则 u_{i+2} , u_{i+6} , v_{i+8} 和 v_{i+9} 都位于 $D(H_{i, i+1})$ 划分的同一区域的同一边界上。

证明: 不失一般性, 假设 $L_1^D > 2$ 和 $cr_D(H_{1, 2}) = 1$ 。如果 u_3 和 u_7 不在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上, 则由引理 2 可知, 路径 $u_3 v_3 v_7 u_7$ 和 $u_3 u_4 v_4 v_8 u_8 u_7$ 交 $H_{1, 2}$, 因此 $L_1^D \leq 2$, 得出矛盾, 则 u_3 和 u_7 在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上。如果 v_9 和 v_{10} 不在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上, 则由引理 2 可知, 路径 $v_9 u_9 u_{10} v_{10}$ 和 $v_9 v_{13} u_{13} u_{14} v_{14} v_{10}$ 交 $H_{1, 2}$, 因此 $L_1^D \leq 2$, 得出矛盾, 则 v_9 和 v_{10} 在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上。如果 u_7 和 v_9 不在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上, 则由引理 2 可知, 路径 $u_7 u_8 u_9 v_9$ 和 $u_7 v_7 v_{11} u_{11} u_{10} u_9 v_9$ 交 $H_{1, 2}$, 因此 $L_1^D \leq 2$, 得出矛盾, 则 u_7 和 v_9 在 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域。因此 u_3 , u_7 , v_9 和 v_{10} 都位于 $D(H_{1, 2})$ 划分的同一区域的同一边界上。

若 $L_i^D > 2$ 且 $cr_D(H_{i, i+1}) \leq 1$, 由引 3.1, 我们得到如下结果。

引理 3.2 若 $L_i^D > 2$ 且 $cr_D(C_i) = 1$, 则 $D(H_{i, i+1})$ 与图 1 中的其中一个图同构。

引理 3.3 若 $L_i^D > 2$ 且 $cr_D(C_i) = 1$, 则 $cr_D(C_i, u_{i+2}v_{i+2}v_{i+6}u_{i+6}) = 0$ 。

证明: 不失一般性, 假设 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) \geq 1$ 时 $L_1^D > 2$ 且 $cr_D(C_1) = 1$ 。通过 $L_1^D > 2$, 得到 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 。由于 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) \geq 1$, 由引理 3.2 和引理 2 得到 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) \geq 2$, 因此 $f_D(H_{1,2}) \geq 2$, 得出矛盾。

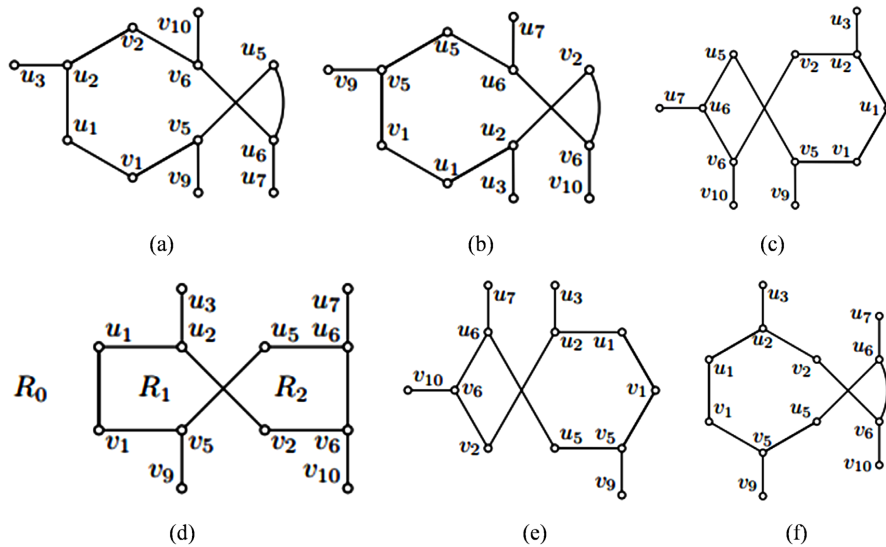


Figure 1. Subdrawings of D
图 1. D 的子画法

引理 3.4 若 $L_i^D > 2$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(a), 则 $L_i^D \leq 3$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 4$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(a)。通过 $L_1^D \geq 4$, 得到 $f_D(H_1) < 1$ 和 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 。由于 B_5 被交, 由引理 2.1 可知在画法 D 下 B_3 和 B_7 是干净的。则在好的画法 D 下有 $cr_D(u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。由引理 7 得到 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。

由 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 得到 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) \leq 1$ 。因此我们只需考虑以下情况:

情况 1 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 1$ 。

情况 2 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。

引理 3.5 若 $L_i^D > 2$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(b), 则 $L_i^D \leq 4$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 5$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(b)。通过 $L_1^D \geq 5$, 得到 $f_D(H_{1,2}) < 2$, $f_D(H_{1,3}) < 3$ 和 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 。由于 B_6 被交, 由引理 2.1 可知在画法 D 下 $B_{3,4}$ 和 $B_{7,8}$ 都是干净的。因此 $cr_D(u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。由引理 3.3 得到 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。由 $f_D(H_{1,2}) < 3$ 得到 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) \leq 1$ 。因此我们考虑以下情况。

情况 1 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。

情况 2 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 1$ 。

引理 3.6 若 $L_i^D > 2$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(c), 则 $L_i^D \leq 4$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 5$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(c)。通过 $L_1^D \geq 5$, 得到 $f_D(H_1) < 1$, $f_D(H_{1,3}) < 3$ 和 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 。由于 B_5 被交, 由引理 4 可知在画法 D 下 $B_{2,4}$ 和 $B_{6,8}$ 都是干净的。因此

$cr_D(u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。由引理 7 得到 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。由 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 得到 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) \leq 1$ 。因此我们考虑以下情况。

情况 1 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。

情况 2 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 1$ 。

引理 3.7 若 $L_i^D \geq 5$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(d), 则 $D(H_{i,i+1} \cup u_{i+2}v_{i+2}v_{i+6}u_{i+6})$ 与图 2 同构, 且 u_{i+3} 位于 R_0 或 R_1 区域, 如图 2 所示。

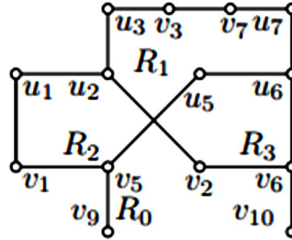


Figure 2. Subdrawings of D
图 2. D 的子画法

证明: 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 5$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(d)。通过 $L_1^D \geq 5$, 得到 $f_D(H_1) < 1$, $f_D(H_{1,2}) < 2$, $f_D(H_{1,3}) < 3$ 和 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 。由于 B_2 和 B_5 被交, 由引理 2.1 可知在画法 D 下 $B_{3,4}$ 和 $B_{6,8}$ 都是干净的。因此 $cr_D(u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。

由 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 得到 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) \leq 1$ 。由 $f_D(H_1) < 1$, 可知在画法 D 下 v_5v_9 是干净的。由引理 3.3 得到 $cr_D(C_1, u_3v_3v_7u_7) = 0$ 。当 $cr_D(H_{1,2}, u_3v_3v_7u_7) = 1$ 时, $D(H_{1,2} \cup u_3v_3v_7u_7)$ 与图 3(a), 图 3(b) 和图 3(c) 中的一个图同构。

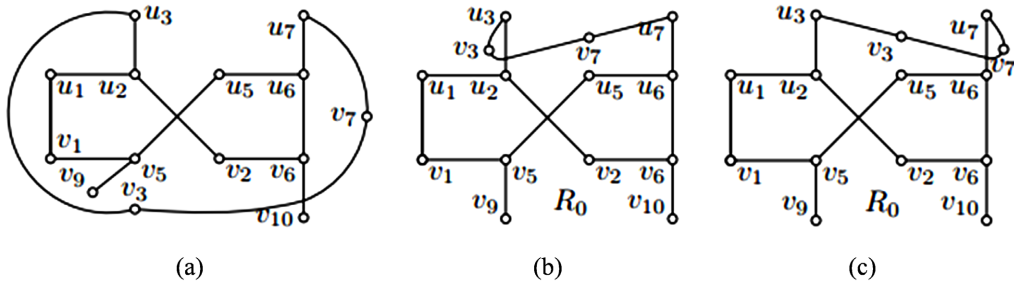


Figure 3. Subdrawings of D
图 3. D 的子画法

引理 3.8 若 $L_i^D \geq 5$, $D(H_{i,i+1} \cup u_{i+2}v_{i+2}v_{i+6}u_{i+6})$ 与图 2 同构且 u_{i+3} 位于 R_1 区域, 则 $L_i^D = 5$ 。

引理 3.9 若 $L_i^D \geq 5$, $D(H_{i,i+1} \cup u_{i+2}v_{i+2}v_{i+6}u_{i+6})$ 与图 2 同构且 u_{i+3} 位于 R_0 区域, 则 $L_i^D = 5$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 6$ 时 $D(H_{1,2} \cup u_3v_3v_7u_7)$ 同构于图 2 且 u_4 在 R_0 中。通过 $L_1^D \geq 6$, 得到 $f_D(H_1) < 1$, $f_D(H_{1,2}) < 2$, $f_D(H_{1,3}) < 3$, $f_D(H_{1,4}) < 4$ 和 $\sum_{i=1}^5 f_D(H_i) < 5$ 。由于 B_2 和 B_5 被交, 由引理 2.1 可知在画法 D 下 $B_{3,4}$ 和 $B_{6,8}$ 都是干净的。由引理 2 以及 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 可知 $cr_D(u_4u_5, C_2) = 1$ 。若 $cr_D(u_4u_5, H_{1,2}) = 1$, 由 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 可知 $cr_D(u_4u_5, v_3v_7) \leq 1$ 。

假设 $cr_D(u_4u_5, H_{1,2})=1$ 且 $cr_D(u_3u_4, v_3v_7)=0$ 。此时 $D(H_{1,2} \cup F_3 \cup B_7 \cup u_4u_5)$ 与图 4(a), 图 4(b)和图 4(c) 其中一个图同构。

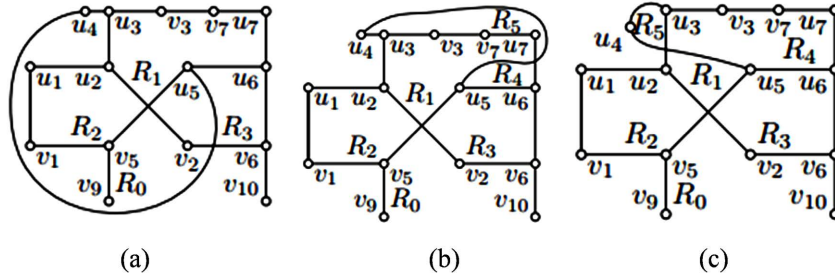


Figure 4. Subdrawings of D
图 4. D 的子画法

假设 $cr_D(u_4u_5, H_{1,2})=1$ 且 $cr_D(u_3u_4, v_3v_7)=1$ 。此时 $D(H_{1,2} \cup F_3 \cup B_7 \cup u_4u_5)$ 与图 5(a), 图 5(b)和图 5(c) 其中一个图同构。

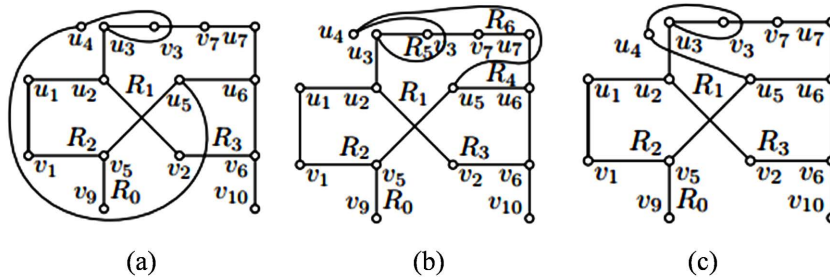


Figure 5. Subdrawings of D
图 5. D 的子画法

假设 $cr_D(u_4u_5, v_3v_7)=1$ 。由 $f_D(H_{1,4}) < 4$ ，得到 $cr_D(u_3u_4, H_{1,2} \cup v_3v_7) + cr_D(u_4u_5, H_{1,2}) \leq 1$ 。此时 $D(H_{1,2} \cup F_3 \cup B_7 \cup u_4u_5)$ 与图 6(a), 图 6(b)和图 6(c) 其中一个图同构。

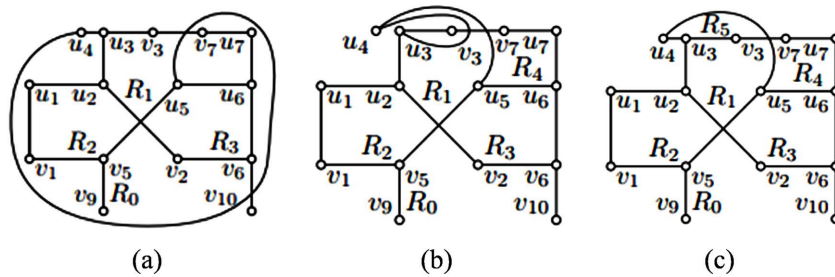


Figure 6. Subdrawings of D
图 6. D 的子画法

引理 3.10 若 $L_i^D > 2$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(e), 则 $L_i^D \leq 5$ 。

证明: 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 6$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(e)。通过 $L_1^D \geq 6$, 得到 $f_D(H_1) < 1$, $f_D(H_{1,3}) < 3$, $f_D(H_{1,4}) < 4$ 和 $\sum_{i=1}^5 f_D(H_i) < 5$ 。由于 B_2 和 B_5 被交, 由引理 2.1 可知在画法 D 下 $B_{3,4}$ 和 $B_{6,8}$ 都是干净的。

因此 $cr_D(u_3 v_3 v_7 u_7) = 0$ 。

引理 3.11 若 $L_i^D > 2$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 同构于图 1(f), 则 $L_i^D \leq 5$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $L_1^D \geq 6$ 且 $D(H_{1,2})$ 同构于图 1(f)。通过 $L_1^D \geq 6$, 得到 $f_D(H_1) < 1$, $f_D(H_{1,3}) < 3$, $f_D(H_{1,4}) < 4$ 和 $\sum_{i=1}^5 f_D(H_i) < 5$ 。由于 $f_D(H_1) < 1$, 可知在画法 D 下 $v_3 v_7$ 是干净的。由引理 7 得到 $cr_D(C_1, u_3 v_3 v_7 u_7) = 0$ 。由 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 得到 $cr_D(u_3 v_3 v_7 u_7) \leq 1$ 。

当 $cr_D(u_3 v_3 v_7 u_7) = 1$ 时。由引理 2 可知有路径 $v_{10} P_2 v_2$ 交 $H_{1,2} \cup u_3 v_3 v_7 u_7$ 。由 $f_D(H_{1,3}) < 3$, 得到 $cr_D(u_3 u_4 u_5, H_{1,2} \cup u_3 v_3 v_7 u_7) = 0$, 且有路径 $v_9 u_9 u_{10} v_{10}$, $v_9 v_{13} u_{13} u_{12} u_{11} v_{11} v_7$ 和 $u_7 P_0 u_1$ 交 $H_{1,2} \cup F_3 \cup B_7 \cup u_4 u_5$, 与 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 相矛盾。因此 $cr_D(u_3 v_3 v_7 u_7) = 0$ 。由 $f_D(H_{1,3}) < 3$ 得到 $cr_D(H_{1,2}, u_3 v_3 v_7 u_7) \leq 1$ 。因此我们考虑以下情况。

情况 1 $cr_D(H_{1,2}, u_3 v_3 v_7 u_7) = 1$ 。

情况 2 $cr_D(H_{1,2}, u_3 v_3 v_7 u_7) = 0$ 。

综上所述对于 $L_i^D > 2$ 且 $cr_D(C_i) = 1$ 时, 总有 $cr(P(4k, 4)) \geq 2k, k \geq 4$ 。

4. 结论

本文通过反证法和数学归纳法证明广义 Petersen 图 $P(4k, 4) (k \geq 4)$ 的交叉数, 给出相应的好的画法, 通过结合不同的计数公式和特殊的定义, 对 $P(4k, 4)$ 的边进行分类, 探究每组边上的交叉计数, 最终验证关于图 $P(4k, 4)$ 在 $f_D(H_i) < 1$ 且 $cr_D(C_i) = 1$ 时交叉数的下界至少等于 $2k$, 即 $cr(P(4k, 4)) \geq 2k (k \geq 4)$ 。

参考文献

- [1] Turan, P. (1997) A Note of Welcome. *Journal of Graph Theory*, **1**, 7-9. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190010105>
- [2] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1993) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic & Discrete Methods*, **1**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [3] Guy, R.K. (1960) A Combinatorial Problem. *Malaysian Mathematical Society*, **7**, 68-72.
- [4] Guy, R.K. (1969) Proof Techniques in Graph Theory. Academic Press, New York.
- [5] Kieitman, D.J. (1970) The Crossing Number of $K_{5,n}$. *Combinatorial Theory (Series B)*, **9**, 315-325. [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(70\)80087-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(70)80087-4)
- [6] Aichholzer, O., Aurenhammer, F. and Krasser, H. (2002) On the Crossing Number of Complete Graphs. *Proceedings of the Eighteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, Barcelona, 5-7 June 2002, 19-24. <https://doi.org/10.1145/513400.513403>
- [7] Zarankiewicz, K. (1954) On a Problem of P. Turan Concerning Graphs. *Fundamenta Mathematicae*, **41**, 137-145. <https://doi.org/10.4064/fm-41-1-137-145>
- [8] Woodall, D.R. (1993) Cyclic-Order Graphs and Zarankiewicz's Crossing Number Conjecture. *Journal of Graph Theory*, **17**, 657-671. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190170602>
- [9] Nahas, N. (2003) On the Crossing Number of $K_{m,n}$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **10**, 1-6. <https://doi.org/10.37236/1748>
- [10] Exoo, G., Harary, F. and Kabell, J. (1981) The Crossings of Some Generalized Petersen Graphs. *Mathematica Scandinavica*, **48**, 184-188. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11910>
- [11] Fiorini, S. (1986) On the Crossing Number of Generalized Petersen Graph. *Discrete Mathematics*, **30**, 221-242.
- [12] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [13] Sarazin, M.L. (1997) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph $P(10, 4)$. *Mathematica Slovaca*, **47**, 189-192.
- [14] Salazar, G. (2005) On the Crossing Number of Loop Networks and Generalized Petersen Graphs. *Discrete Mathematics*,

-
- 302**, 243-253. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.07.036>
- [15] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.
- [16] 马登举, 任韩, 卢俊杰. 广义 Petersen 图 $G(2m+1, m)$ 的交叉数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2005(1): 34-39.
- [17] Lin, X.H., Yang, Y.S., Zheng, W.P., *et al.* (2009) The Crossing Number of Generalized Petersen Graphs with Small Order. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.012>
- [18] Fiorini, S. and Gauci, J.B. (2003) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph $P(3k, k)$. *Mathematica Bohemica*, **128**, 337-347. <https://doi.org/10.21136/MB.2003.134001>
- [19] 郑百功. 冒泡排序图 B_n 和广义 Petersen 图 $P(10,3)$ 的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.