Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(11), 7960-7967
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111843

Hans汉斯

4阶双星符号模式矩阵允许代数正

焦　旸

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年10月16日；录用日期：2022年11月10日；发布日期：2022年11月21日

摘　要

本文将引入双星符号模式矩阵的概念，通过研究双星符号模式矩阵，将所有4阶双星符号模式矩阵进行分类，分别给出4阶双星符号模式矩阵非允许代数正和允许代数正的等价刻画。

关键词

符号模式矩阵，双星符号模式矩阵，允许代数正，非允许代数正

The Double Star Sign Pattern Matrix with Order 4 That Allow Algebraic Positivity

Yang Jiao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 16th, 2022; accepted: Nov. 10th, 2022; published: Nov. 21st, 2022

Abstract

In this paper, we will introduce the concept of double star sign pattern matrix, and classify all the 4th order double star sign pattern matrix by studying the double star sign pattern matrix, and give the equivalent characterization of the 4th order double star sign pattern matrices that do not allow algebraic positivity, and that allow algebraic positivity respectively.

Keywords

Sign Pattern Matrix, Double Star Sign Pattern Matrix, Allow Algebraic Positivity, Not Allow Algebraic

文章引用: 焦旸. 4 阶双星符号模式矩阵允许代数正[J]. 应用数学进展, 2022, 11(11): 7960-7967.
DOI: 10.12677/aam.2022.1111843

Positivity

1. 引言

在组合矩阵论中，符号模式矩阵是一个十分活跃的研究课题，它在众多领域中具有广泛的实际应用背景。符号模式矩阵主要研究实矩阵所确定的定性矩阵类的组合结构。1987 年，C. Eschenbach 引出并研究了符号模式允许和要求某种实矩阵的性质。随后许多专家和学者对符号模式矩阵的一些性质进行了研究[1]-[7]。在 2016 年，代数正矩阵的概念首次被 Steve Kirkland [8]等人提出。同时，他们也提出了符号模式矩阵要求代数正和允许代数正这两个公开问题。2019 年，Das [9]等人给出了 n 阶三对角符号模式矩阵和星符号模式矩阵要求代数正的等价刻画。同年，Abagat [10]等人讨论所有 3 阶不可约符号模式矩阵，分别给出符号模式矩阵非允许代数正、允许代数正和要求代数正的刻画。2022 年，Biswas [11]等人给出了所有 3 阶对称的符号模式矩阵要求代数正的等价刻画。Das [12]研究符号模式矩阵允许代数正的充分条件，并且给出从低阶代数正矩阵构造高阶代数正矩阵的方法。同年，田岩和焦旸[13]通过对代数正矩阵的研究，给出代数正矩阵的一些性质，可以将实矩阵进行约化，简化证明。另外，她们[14]将 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵分为三类：不是允许代数正、允许代数正、允许代数正且要求代数正，并且给出具体形式。近些年来，很多学者和专家关于符号模式矩阵的研究已经取得了丰硕成果，但是还有许多问题亟待解决，符号模式矩阵要求代数正和允许代数正仍是组合矩阵论中的两个非常重要的问题。

在 2001 年，高玉斌在博士学位论文中给出了双星符号模式矩阵的强蕴含稳定性[15]。同年，黄延祝刻画了蕴含最终正性质的双星符号模式矩阵的特征[16]。由此可以看出双星符号模式矩阵具有一定的研究价值。因此，本文研究 4 阶双星符号模式矩阵。首先，给出 4 阶双星符号模式矩阵的概念，证明所有 4 阶双星符号模式矩阵是不可约的，并且给出 4 阶双星符号模式矩阵 A 对应的矩阵 B_A 是不可约的等价条件。其次，通过列出所有 4 阶双星符号模式矩阵的形式，将 4 阶双星符号模式矩阵分为两类：非允许代数正、允许代数正。最后，给出 4 阶双星符号模式矩阵非允许代数正和允许代数正的充分必要条件。

2. 预备知识

符号模式矩阵是指所有元素都取自集合 $\{+,-,0\}$ 的矩阵。对于实矩阵 $A=(a_{ij})$，以 a_{ij} 的符号为元素组成的符号模式矩阵称为 A 的符号模式矩阵。所有元素都是正实数的矩阵称为正矩阵，即矩阵中每个元素都大于零，记作 $A>0$。设 A 是实方阵，如果存在一个实系数多项式 f 使得 $f(A)>0$，那么称 A 是代数正矩阵。对于任意符号模式矩阵 A，所有与 A 的符号相同的实矩阵组成的集合称为 A 所决定的定性矩阵类，记为 $Q(A)$。设 V 是有限集合，$E\subseteq V^2$，则集合对 $D=(V,E)$ 称为一个有向图。V 中的元素称为顶点。E 中的元素称为弧。D 中首尾相连的一串弧称为有向路径。若存在一条从 a 到 b 的有向路径，也存在一条从 b 到 a 的有向路径，则称有向图 $D=(V,E)$ 的两个顶点 a 和 b 是强连通的[17]。设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵，有向图 $D(A)$ 的顶点在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中，(i,j) 为弧当且仅当 $A_{(i,j)}\neq 0$。

本文中 $A_{(i,j)}$ 表示矩阵 A 的第 i 行 j 列元素。本文讨论的矩阵都是实方阵。R 表示是实数域。

定义 1. 形如

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & \\ c_2 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ c_{m-1} & & & a_{m-1} & & & & \\ c_m & & & & a_m & b_{m+1} & \cdots & b_n \\ & & & & c_{m+1} & a_{m+1} & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & c_n & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \in \{+,-,0\}, i=1,2,\cdots,n$ ，$b_j, c_j \in \{+,-\}, j=2,3,\cdots,n$ ，其它位置的元素全为 0，称矩阵 A 是双星符号模式矩阵。

定义 2. 设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中存在代数正矩阵，那么称符号模式矩阵 A 是允许代数正的。

定义 3. 设 A 是符号模式矩阵，如果 $Q(A)$ 中任意矩阵都是代数正矩阵，那么称符号模式矩阵 A 是要求代数正的。

3. 主要结论

首先，我们证明 4 阶双星符号模式矩阵 A 是不可约的，同时给出 4 阶双星符号模式矩阵对应的 B_A 是不可约的等价条件；然后，给出所有 4 阶双星符号模式矩阵的具体形式，分别讨论它们是否允许代数正；最后，将所有的 4 阶双星符号模式矩阵分为两类：非允许代数正和允许代数正。

引理 3.1. [18]方阵 A 不可约当且仅当其有向图 $D(A)$ 强连通。

引理 3.2. 4 阶双星符号模式矩阵 A 是不可约的。

证明：设 A 是 4 阶双星符号模式矩阵，则

$$A_{(1,2)}A_{(2,1)}A_{(1,3)}A_{(3,4)}A_{(4,3)}A_{(3,1)} \neq 0,$$

故 A 的有向图 $D(A)$ 中任意两个顶点 $i \neq j \in \{1,2,3,4\}$ 之间都存在有向路径，则 $D(A)$ 是强连通的。由引理 3。1 可知，A 是不可约的。

以下符号模式矩阵中的元素 $* \in \{+,-,0\}$ ，$+_0$ 表示非负，$-_0$ 表示非正。设 A 是 n 阶符号模式矩阵，取 A 中+的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_+ ，取 A 中−的元素，其余元素用 0 替代，记为 A_- ，则 $B_A = A_+ - A_-^{\mathrm{T}}$ 。

定理 1. 设 A 是 4 阶双星符号模式矩阵。若 A 是对称的当且仅当矩阵 B_A 是不可约的。

证明：必要性 设 A 是 4 阶对称的双星符号模式矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{pmatrix}，\text{其中 } a_1,a_2,a_3,a_4 \in \{+,-,0\}, b_2,b_3,b_4 \in \{+,-\}.$$

当 $A=\begin{pmatrix} a_1 & + & - & 0 \\ + & a_2 & 0 & 0 \\ - & 0 & a_3 & + \\ 0 & 0 & + & a_4 \end{pmatrix}$ 时，$A_+=\begin{pmatrix} +_0 & + & 0 & 0 \\ + & +_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +_0 & + \\ 0 & 0 & + & +_0 \end{pmatrix}$，$A_-^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -_0 & 0 & - & 0 \\ 0 & -_0 & 0 & 0 \\ - & 0 & -_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -_0 \end{pmatrix}$.

由 $B_A = A_+ - A_-^{\mathrm{T}}$ 可知，$B_A = \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}$，则 B_A 是 4 阶双星符号模式矩阵。由引理 3.2 可知，B_A 不可约。

当 A 取其它形式时，同理可证。

充分性：假设 A 是不对称的双星符号模式矩阵，不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & + & + & 0 \\ - & a_2 & 0 & 0 \\ + & 0 & a_3 & + \\ 0 & 0 & + & a_4 \end{pmatrix}.$$

由 $B_A = A_+ - A_-^{\mathrm{T}}$ 可知，

$$B_A = \begin{pmatrix} +_0 & + & + & 0 \\ 0 & +_0 & 0 & 0 \\ + & 0 & +_0 & + \\ 0 & 0 & + & +_0 \end{pmatrix},$$

矩阵 B_A 的第二行中除了对角线位置的元素 $\left(B_A\right)_{(2,2)}$ 外其余元素都是 0，则 B_A 的有向图 $D\left(B_A\right)$ 中任意顶点 $k\left(k \in \{1,3,4\}\right)$ 到 2 都不存在有向路径，所以 $D\left(B_A\right)$ 不是强连通的。由引理 3.1 可知，B_A 是可约的，产生矛盾。因此，A 是对称的符号模式矩阵。

定理 2. 设 A 是 4 阶双星符号模式矩阵，则

1) A 不是允许代数正当且仅当 A 或 $-A$ 是不对称的符号模式矩阵。

2) A 允许代数正当且仅当 A 或 $-A$ 的形式如下：

$$\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & -_0 & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & + & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & -_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}.$$

证明：设 A 是 4 阶双星符号模式矩阵，则 A 或-A 的形式如下

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & - \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & - \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}\right\}.$$

首先，考虑 A 不是允许代数正的充分必要条件。

设 A 不是允许代数正矩阵。由引理 3.2 可知，4 阶双星符号模式矩阵 A 是不可约的，观察可以发现，S 中除了第一个、第十个、第十九个和倒数第五个符号模式矩阵外其余符号模式矩阵都是不对称的。由定理 1 可知，B_A 是可约的。根据[10，定理 4]可知，S 中除了第一个、第十个、第十九个和倒数第五个符号模式矩阵外其余符号模式矩阵符合条件。

反之，由引理 3.2 可知，4 阶双星符号模式矩阵 A 是不可约的。S 中除了第一个、第十个、第十九个和倒数第五个符号模式矩阵外其余符号模式矩阵是不对称的符号模式矩阵，由定理 1 可知，B_A 是可约的。由[10，定理 4]可知，S 中除了第一个、第十个、第十九个和倒数第五个符号模式矩阵外其余符号模式矩阵不是允许代数正矩阵。

其次，讨论 A 是允许代数正的充分必要条件。

设 A 是允许代数正矩阵。考虑 S 中第一个符号模式矩阵。由[8，定理 12]可知，A 的每行和每列含有 +，则 S 中第一个符号模式矩阵符合条件。

反之，设 A 是 S 中第一个符号模式矩阵。由引理 3.2 可知，A 是不可约的，则存在不可约的实矩阵 $M \in Q(A)$，则 M 是除对角线外所有非零元素全相同。由[8，定理 5]可知，M 是代数正矩阵，故 S 中第一个符号模式矩阵 A 是允许代数正矩阵。

考虑 S 中第十个符号模式矩阵 A。设 A 是允许代数正矩阵，观察可以发现，S 中第十个符号模式矩阵 A 是对称的 4 阶双星符号模式矩阵，由引理 3.2 可知，B_A 是不可约的。再根据引理 3.1，A 是不可约的。因此，由[10，定理 4]可知，S 中第十个符号模式矩阵符合条件。

考虑 S 中第十九个符号模式矩阵，设允许代数正矩阵 $A=\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & * \end{pmatrix}$，则存在实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1' & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3' & -b \\ 0 & 0 & -b & a_4' \end{pmatrix} \in Q(A), b>0$$

是代数正矩阵，则存在实系数多项式 f，使得 $f(M)=\alpha M^3+\beta M^2+\gamma M+tI>0$。由 $f(M)_{(1,4)}=a_1'+a_3'+a_4'-\beta>0$ 和 $f(M)_{(2,3)}=-a_1'-a_2'-a_3'+\beta>0$ 可得，$a_2'<a_4'$。由[8，定理 12]可知，A 的每行和每列含有+，则 M 的每行和每列含有正数，故 $a_4'>0$，为使其恒成立，则 $a_2'\le 0$。因此，$A_{(2,2)}$ 可取−和 0，则

$$A=\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & -_0 & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}.$$

考虑 S 中倒数第五个符号模式矩阵，设允许代数正矩阵 $A=\begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & * & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}$，则存在实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1' & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3' & b \\ 0 & 0 & b & a_4' \end{pmatrix} \in Q(A), b>0$$

是代数正矩阵，则存在实系数多项式 f，使得 $f(M)=\alpha M^3+\beta M^2+\gamma M+tI>0$。由 $f(M)_{(1,4)}=-b(a_1'+a_3'+a_4'+\beta)>0$ 和 $f(M)_{(2,3)}=a_1'+a_2'+a_3'-\beta>0$ 可得，$a_4'<a_2'$。由[8，定理 12]可知，A 的每行和每列含有+，则 M 的每行和每列含有正数，故 $a_2'>0$，为使其恒成立，则 $a_4'\le 0$。因此，$A_{(4,4)}$ 可取−和 0，则

$$A=\begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & + & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & -_0 \end{pmatrix}.$$

反之，设 $A=\begin{pmatrix} * & + & - & 0 \\ + & * & 0 & 0 \\ - & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & * \end{pmatrix}$，取实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1' & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a_2' & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_3' & b \\ 0 & 0 & b & a_4' \end{pmatrix} \in Q(A).$$

那么存在 $\alpha=-1$，$\beta=a_1'+a_3'+m-1, m=\min\{a_2',a_4'\}$，

$$\gamma=a_3'^2+b^2-\beta a_3'+\frac{3+a_4'^2+a_1'^2+a_1'a_3'+a_3'a_4'-\beta a_1'-\beta a_4'}{2}$$

和足够大的 $t\in R$，使得 $\alpha M^3+\beta M^2+\gamma M+tI>0$，所以 M 是代数正矩阵，所以 A 是允许代数正。

设 $A=\begin{pmatrix} * & + & + & 0 \\ + & -_0 & 0 & 0 \\ + & 0 & * & - \\ 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}$，取实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1' & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3' & -b \\ 0 & 0 & -b & a_4' \end{pmatrix}\in Q(A).$$

那么存在 $\alpha=-1$，$\beta=a_1'+a_3'+\frac{a_2'}{2}+\frac{a_4'}{2}$，

$$\gamma=a_3'^2+b^2-\beta a_3'+\frac{3+a_4'^2+a_1'^2+a_1'a_3'+a_3'a_4'-\beta a_1'-\beta a_4'}{2}$$

和足够大的 $t\in R$，使得 $\alpha M^3+\beta M^2+\gamma M+tI>0$，所以 M 是代数正矩阵，所以 A 是允许代数正。

设 $A=\begin{pmatrix} * & - & + & 0 \\ - & + & 0 & 0 \\ + & 0 & * & + \\ 0 & 0 & + & -_0 \end{pmatrix}$，取实矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_1' & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3' & b \\ 0 & 0 & b & a_4' \end{pmatrix}\in Q(A).$$

那么存在 $\alpha=-1$，$\beta=a_1'+a_3'+\frac{a_2'}{2}+\frac{a_4'}{2}$，

$$\gamma=\frac{3+a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2+a_4'^2+a_1'a_2'+a_3'a_4'+b^2-\beta a_1'-\beta a_2'-\beta a_3'-\beta a_4'}{2}$$

和足够大的 $t\in R$ 使得 $\alpha M^3+\beta M^2+\gamma M+tI>0$，所以 M 是代数正矩阵，所以 A 是允许代数正。

4. 结论

本文主要通过对所有 4 阶双星符号模式矩阵进行研究，证明 4 阶双星符号模式矩阵 A 对应的矩阵 B_A 是不可约的等价条件，分别给出 4 阶双星符号模式矩阵非允许代数正和允许代数正的等价条件。本文对于特殊符号模式矩阵的允许代数正的研究可以提供一定的证明思路和研究方法。

参考文献

[1] Shao, J. (1999) On Sign Inconsistent Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **296**, 245-257. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00130-5

[2] Shao, J. (2000) On the Digraphs of Sign Solvable Linear Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **33**, 115-126.

https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00107-5

[3] Shao, J. and Ren, L. (2004) Some Properties of Matrices with Signed Null Spaces. *Discrete Mathematics*, **279**, 423-435. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00286-3

[4] Shan, H. and Shao, J. (2004) Matrices with Totally Signed Powers. *Linear Algebra and Its Applications*, **376**, 215-224. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00643-8

[5] Shao, J. and Shan, H. (2002) The Solution of a Problem on Matrices Having Signed Generalized Inverses. *Linear Algebra and Its Applications*, **345**, 43-70. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(01)00452-9

[6] Shao, J. and Shan, H. (2005) The Determinantal Regions of Complex Sign Pattern Matrices and Ray Pattern Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **395**, 211-228. https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.08.023

[7] Shao, Y. and Gao, Y. (2003) Sign Patterns That Allow Diagonalizability. *Linear Algebra and Its Applications*, **359**, 113-119. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00433-0

[8] Kirkland, S., Qiao, P. and Zhan, X. (2016) Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **504**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.049

[9] Das, S. and Bandopadhyay, S. (2019) On Some Sign Patterns of Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **562**, 91-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.007

[10] Abagat, J.L. and Pelejo, D.C. (2019) On Sign Pattern Matrices That Allow or Require Algebraic Positivity. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **35**, 331-356. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3862

[11] Biswas, A. and Kundu, S. (2022) On Algebraically Positive Matrices with Associated Sign Patterns. *Resonance*, **27**, 1211-1235. https://doi.org/10.1007/s12045-022-1415-1

[12] Das, S. (2022) Sign Patterns That Allow Algebraic Positivity. *Linear Algebra and Its Applications*, **653**, 151-182.

[13] 田岩, 焦旸. 代数正矩阵的若干研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(2): 152-158.

[14] 焦旸, 田岩. 3 阶 Hessenberg 符号模式矩阵允许代数正和要求代数正[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5293-5300.

[15] 高玉斌. 符号模式矩阵[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2001.

[16] 余柏林. 矩阵模式谱性质研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2011.

[17] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[18] Brualdi, R.A. and Ryser, H.J. (1991) Combinatorial Matrix Theory. Cambridge University Press, New York, 55 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325708