

Steklov特征值问题间断有限元自适应方法

陈兴龙

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2022年10月3日; 录用日期: 2022年10月27日; 发布日期: 2022年11月7日

摘要

本文研究了Steklov特征值问题的自适应间断有限元法。我们推导了相应的离散格式并给出了特征值的后验误差估计子。通过构造辅助的泡泡函数和提升算子, 我们证明了后验误差估计子的可靠性和有效性。此外, 我们通过数值实验验证了后验误差估计子在自适应网格下的鲁棒性。

关键词

Steklov特征值, 间断有限元, 自适应方法

Discontinuous Finite Element Adaptive Method for Steklov Eigenvalue Problems

Xinglong Chen

School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 3rd, 2022; accepted: Oct. 27th, 2022; published: Nov. 7th, 2022

Abstract

This paper studies the eigenvalue problem of adaptive discontinuous finite element method (fem). We derive the corresponding discrete format and give the posterior error estimators of the eigenvalues. By constructing auxiliary bubble functions and lifting operators, we prove the reliability and validity of the posterior error estimator. In addition, we verify the robustness of the posterior error estimator under the adaptive grid through numerical experiments.

Keywords

Steklov Eigenvalue, Discontinuous Galerkin, Self-Adaption Method



1. 引言

Steklov 特征值问题在力学和工程科学中有许多应用。例如，在表面波[1]、沉浸在粘性流体中的机械振子的稳定性、与不可压缩流体接触的结构的振动模式[1]的研究中发现了这样的谱问题。

为了解决文献[2]的 Remark 3.11 中关于 Steklov 特征值问题中后验误差估计研究的问题，本文针对该问题的间断有限元方法提出了一个后验误差估计子，并从理论和数值上证明了估计子的可靠性和有效性。间断有限元方法的主要特点是测试函数在网格中沿面(或边)不连续，具有局部质量守恒、易于与其他方法组合耦合、hp 自适应、可在多边形网格上工作等优点。因此，间断有限元方法被用于解决许多问题，如[3]。此外，DG 方法还被用于求解各种特征值问题，如拉普拉斯特征值问题[4]、经典自伴随 Steklov 特征值问题[2]、双调和特征值问题[5]、Maxwell 特征值问题[6]等。

对于自共轭 Steklov 特征值问题，Zeng 等人[2]首先研究了间断有限元方法并给出了它的先验误差估计。对于逆散射的 Steklov 特征值问题，李等人[7]研究了间断有限元方法的后验误差估计和自适应方法。在上述工作的基础上，本文进一步研究了间断有限元方法的后验误差估计子。我们利用提升算子的性质，证明了特征函数的后验误差估计子的可靠性和有效性，分析了有限元特征值后验误差估计子的可靠性。本文的分析方法可以推广至一般的二阶椭圆特征值问题。

我们在均匀网格和自适应加密网格上完成了数值实验。从数值结果可以看出，我们的方法对于简单特征值和多重特征值都能达到最优收敛阶。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节和第 3 节中，我们提出模型问题并介绍一些初步内容及讨论了先验误差估计。在第 4 节中，我们讨论了后验误差并进行估计。最后，通过数值算例验证了理论分析的正确性。

2. 问题模型的弱形式及相应的离散格式

令 $\Omega \subset R^2$ 是有界域，其 Lipschitz 边界为 $\partial\Omega$ ，设 \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向。考虑 Steklov 特征值问题：求 $\lambda \in R$ 和非平凡函数 $u \in H^1(\Omega)$ ，使得：

$$-\Delta u + u = 0, \text{ in } \Omega \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \lambda u, \text{ on } \Omega \quad (2.2)$$

设 $T_h = \{\kappa\}$ 为 Ω 的形状规则网格，边 e 的直径用 h_e 表示，单元 $\kappa \in T_h$ 的直径用 h_κ 表示，并且 $h = \max_{\kappa \in T_h} h_\kappa$ 。单元格的一组边 $\Gamma_h = \Gamma_h^i \cup \Gamma_h^b$ ，其中 Γ_h^i 表示内部边的集合， Γ_h^b 表示边界上的集合。下面表示边 e 上 v 的均值和跳跃：

$$\{v\} = \frac{1}{2}(v^+ + v^-), [v] = v^+ \cdot \mathbf{n}^+ + v^- \cdot \mathbf{n}^- \quad (2.3)$$

其中， $e = \partial\kappa^+ \cap \partial\kappa^-$ ， $v^+ = v|_{\kappa^+}$ ， $v^- = v|_{\kappa^-}$ ， \mathbf{n} 是 κ^+ 到 κ^- 的单位外法向。

注意，当 $e \in \Gamma_h^b$ 时

$$\{v\} = v, [v] = v \cdot \mathbf{n} \quad (2.4)$$

(2.1)的弱形式为

$$a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.5)$$

其中 $(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx$, $\langle u, v \rangle = \int_{\partial\Omega} u \cdot v dx$, 双线性形式 $a(u, v) = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)$ 。

任取分片多项式 v , $\Omega = \bigcup_{\kappa \in \Gamma_h} \kappa$, 有

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \int_{\Omega} u \cdot v dx dy - \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \{\nabla u\} [v] ds = \int_{\partial\Omega} \lambda u \cdot v ds \quad (2.6)$$

定义间断有限元空间: $S^h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in P_m(\kappa)\}$, $\forall \kappa \in T_h$, $P_m(\kappa)$ 是关于 κ 的 m 次多项式空间。

定义

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h dx dy + \int_{\Omega} u_h \cdot v_h dx dy - \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \{\nabla_h u_h\} [v_h] ds \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \{u_h\} [\nabla_h v_h] ds + \sigma \cdot h e^{-1} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \{u_h\} [v_h] ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 σ 是大于零的待定参数。

问题(2.5)的离散形式为

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\partial\Omega} \lambda_h u_h \cdot v_h ds, \quad \forall v_h \in S^h \quad (2.8)$$

3. 与特征值相关的源问题的误差估计

问题(2.5)的源问题是: 求 $w \in H^1(\Omega)$, 使得

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.1)$$

问题(3.1)的间断有限元逼近是求 $w_h \in S^h$, 使得

$$a_h(w_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in S^h \quad (3.2)$$

引入间断有限元范数的求和空间 $V(h) = S^h + H^1(\Omega)$,

$$\|u_h\|_G^2 = \sum_{\kappa \in T_h} \left(\|\nabla u_h\|_{0,\kappa}^2 + \|u_h\|_{0,\kappa}^2 \right) + \sum_{e \in \Gamma_h^i} \sigma \cdot h e^{-1} \| [u] \|_{0,e}^2 \quad (3.3)$$

和定义空间 $H^{1+s}(T_h)$ ($s > \frac{1}{2}$) 上的其它范数如下:

$$\|u_h\|_h^2 = \|u_h\|_G^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i} h e \|\{\nabla u_h\}\|_{0,e}^2 \quad (3.4)$$

注意, 在空间 S^h 上 $\|\cdot\|_G$ 等价于 $\|\cdot\|_h$ 。

参考文献[7]的命题3.3和运用格林公式, 得到间断有限元的一致性, 即: 设 w 是(3.1)的解, $f \in L^2(\partial\Omega)$, 有

$$a_h(w, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V(h) \quad (3.5)$$

从(3.2)可以得到误差公式:

$$a_h(w - w_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S^h \quad (3.6)$$

很容易知道下面的稳定性成立:

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq \|u\|_h \|v\|_h, \forall u_h, v_h \in S^h + H^{1+s}(T_h) \left(s > \frac{1}{2} \right). \tag{3.7}$$

$$\|u_h\|_G^2 \leq \left| a_h(u_h, v_h) + \sum_{\kappa \in T_h} \|u_h\|_{0,\kappa}^2 \right|, \forall u_h \in S^h. \tag{3.8}$$

引理 3.1 (文献[7]中引理 2.2): 设 $\phi \in H^{1+\zeta}(\kappa)$ ($0 < \zeta < \frac{1}{2}$) 和 $\Delta\phi \in L^2(\kappa)$, 有下列迹不等式成立:

$$\|\nabla\phi \cdot \mathbf{n}\|_{\zeta-\frac{1}{2},e} \leq h^\delta \left(\|\Delta\phi\|_{\zeta,\kappa} + h_\kappa^{1-\zeta} \|\Delta\phi\|_{0,\kappa} \right), \forall \kappa \in T_h, e \in \partial\Omega. \tag{3.9}$$

引理 3.2 (文献[7]中定理 3.1): 假设 $M(\lambda) \in H^{1+s}(\Omega)$ ($s > \frac{1}{2}$), $t = \min(m, s)$, 有

$$|\lambda_h - \lambda| \leq h^{2t} \tag{3.10}$$

$$\|u - u_h\|_h \leq h^t \tag{3.11}$$

$$\|u - u_h\|_{0,\partial\Omega} \leq h^r \|u - u_h\|_h \tag{3.12}$$

其中 u_h 是(2.8)的特征函数, $u \in M(\lambda)$ 是(2.5)的特征函数, λ 是(2.5)的特征值。

4. 特征值问题的后验误差估计

4.1. 特征函数的估计子及其可靠性

设 (λ_h, u_h) 是(2.8)的特征对。在每个单元 $\kappa \in T_h$ 和每个边 $e \in \Gamma_h$ 上, 有下面的元素残差和面残差。

$$R_\kappa = -\Delta u_h + u_h$$

$$J_{F,1} = [\nabla u_h], \forall e \in \Gamma_h^i$$

$$J_{F,1} = \lambda_h u_h - \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}}, \forall e \in \Gamma_h^b$$

$$J_{F,2} = [u_h], \forall e \in \Gamma_h^i$$

单元上的局部误差估计子定义为:

$$\begin{aligned} \eta_\kappa^2 &= h_\kappa^2 \|-\Delta u_h + u_h\|_{0,\kappa}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} h e \|J_{F,1}\|_{0,e}^2 \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_h^b \cap \partial\kappa} h e \|J_{F,1}\|_{0,e}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} \sigma h e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

全局误差估计子如下:

$$\eta(u_h) = \left(\sum_{\kappa \in T_h} \eta_\kappa^2 \right)^{1/2} \tag{4.2}$$

后文将证明误差估计子是可靠的且有效的。

引入具有稳定性的提升算子 $\Lambda: V_h \rightarrow [S^h]^2$

$$\int_\Omega \Lambda(v) \cdot \mathbf{w} dx = \sum_{e \in T_h} \int_e [v] \cdot \{\mathbf{w}\} ds, \forall \mathbf{w} \in [S^h]^2 \tag{4.3}$$

$$\|\Lambda(v)\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{e \in \Gamma_h^i} \|he^{-1/2} [v]\|_{0,e}^2 \tag{4.4}$$

同时定义一个辅助双线性形式 $\bar{a}_h(\cdot, \cdot): V_h \times V_h \rightarrow R$

$$\begin{aligned} \bar{a}_h(w, v) = & \sum_{\kappa \in T_h} \int_{\kappa} \nabla w \cdot \nabla v dx + \sum_{\kappa \in T_h} \int_{\kappa} w \cdot v dx - \sum_{\kappa \in T_h} \int_{\kappa} \nabla w \cdot \Lambda(v) dx \\ & + \theta \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \Lambda(w) \cdot \nabla v dx + \sigma \cdot he^{-1} \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e [w][v] ds \end{aligned} \tag{4.5}$$

易知在 $S^h \times S^h$ 上 $\bar{a}_h = a_h$ ，在 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上 $\bar{a}_h = a$ ，也满足

$$\|\bar{a}_h(w, v)\| \leq \|w\|_G + \|v\|_G, \quad \forall w, v \in V(h)$$

引理 4.1 (文献[7]中引理 4.1): 对任意 $v \in S^h$ ，存在改进算子 $E_h: S^h \rightarrow S^h \cap H^1(\Omega)$ ，使得

$$\sum_{\kappa \in T_h} \left(h_{\kappa}^{-2} \|v - E_h v\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla(v - E_h v)\|_{0,\kappa}^2 \right) \leq \sum_{e \in \Gamma_h^i} \|he^{-1} [v]\|_{0,e}^2 \tag{4.6}$$

从 Scott-zhang 插值，可以得到以下引理。

引理 4.2 (文献[7]中引理 4.2): 用 U_h 表示线性有限元空间，对于任意 $\varphi \in H^1(\Omega)$ ，有一个分段的线性插值 I^h 满足

$$\|\varphi - I^h \varphi\|_{0,\kappa} + h_{\kappa} \|\nabla(\varphi - I^h \varphi)\|_{0,\kappa} \leq h_{\kappa} \|\nabla \varphi\|_{0,w_{\kappa}}, \quad \forall \kappa \in T_h \tag{4.7}$$

$$\|\varphi - I^h \varphi\|_{0,e} \leq h_e^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{0,w_e}, \quad \forall e \in T_h \tag{4.8}$$

其中 w_{κ} 是与 κ 共享一个节点的所有单元的并集， w_e 是与 e 共享一个节点的所有单元的并集。

定理 4.1: 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是(2.5)，(2.8)的特征对， $u \in H^{1+s}(\Omega)$ ($s > \frac{1}{2}$) 对任意 $v \in H^1(\Omega)$ ，

有下列不等式成立。

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_G \leq & \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle \lambda_h u_h, v \rangle + \bar{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \inf_{v \in H^1(\Omega)} \|u_h - v\|_G \\ & + \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\partial\Omega} + \|u_h - u\|_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{4.9}$$

证明: 注意在 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上 $\bar{a}_h = a$ 。设 $w \in H^1(\Omega)$ ，从(2.5)中我们可以推导出

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_G^2 \leq & \left| \bar{a}_h(u - w, u - w) + \|u - w\|_0^2 \right| \\ \leq & \left| \langle \lambda u, u - w \rangle - \bar{a}_h(u_h, u - w) + \|u_h - w\|_G \|u - w\|_G + \|u - w\|_0^2 + \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\partial\Omega} \|u - w\|_{0,\partial\Omega} \right| \end{aligned} \tag{4.10}$$

因此

$$\|u - u_h\|_G \leq \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle \lambda_h u_h, v \rangle + \bar{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \|u_h - w\|_G + \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\partial\Omega} + \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \|u_h - w\|_{0,\Omega} \tag{4.11}$$

由三角不等式推导出

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_G \leq & \|u - w\|_G + \|u_h - w\|_G \\ \leq & \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle \lambda_h u_h, v \rangle + \bar{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \|u_h - w\|_G + \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\partial\Omega} + \|u - u_h\|_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{4.12}$$

由 w 的任意性, 就可以得到估计式(4.9)。

定理 4.2: 在定理 4.1 的条件下, 有下列不等式成立:

$$\|u - u_h\|_G \leq \eta(u_h) + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\partial\Omega} + \|u - u_h\|_{0,\Omega} \tag{4.13}$$

证明: 对于(4.12)的右端第二项, 使用(3.3)和(4.6), 注意到 $[E_h u_h] = 0$, 我们有

$$\inf_{v \in H^1(\Omega)} \|u_h - v\|_G^2 \leq \|E_h u_h - u_h\|_G^2 \leq \sum_{e \in \Gamma_h^i} \sigma h e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2$$

见上式和[7]中引理 4.3 带入的(4.13)。证毕。

由定理 4.1 可知, $\|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\partial\Omega}$ 和 $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ 的高阶项是比 $\|u - u_h\|_G$ 小的高阶量, 同时由定理 4.2 知 $\eta(u_h)$ 是能量范数误差的上界之一。因此, 误差估计子是可靠的。

4.2. 特征函数的估计子的有效性

为了保证估计子在实际的自适应细化中是有效的, 我们下证局部误差估计子 η_k 为邻域 κ 上的误差并提供了局部下界。 $b_k \in H_0^1(\kappa)$ 为标准单元泡泡函数, $b_e \in H_0^1(w_e)$ 为边泡泡函数, 其中 w_e 是两个单元 κ^+ 和 κ^- 共享 e 的集合, 由参考文献[7], 引入以下知识。

引理 4.4 (文献[7]中引理 4.4): 对于所有多项式函数 $v \in P_m(\kappa)$, $w \in P_m(e)$, 有

$$\|v\|_{0,\kappa} \leq \|b_\kappa^{1/2} v\|_{0,\kappa} \tag{4.15}$$

$$\|w\|_{0,e} \leq \|b_e^{1/2} w\|_{0,e} \tag{4.16}$$

和对每一个 $b_e w$, 存在一个延拓 w_b 满足 $w_b|_e = b_e w$, $w_b \in H_0^1(w_e)$ 且

$$\|w_b\|_{0,w_e} \cdot \|\nabla w_b\|_{0,w_e} \leq \|w\|_{0,e}^2 \tag{4.17}$$

根据上面的引理, 使用标准参数, 可证下面局部上界。

引理 4.5 (文献[7]中引理 4.5): 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是(2.5)和(2.8)的特征对。有下面局部上界:

(i) 对任意

$$h_k \|\Delta u_h + u_h\|_{0,\kappa} \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_k \|u - u_h\|_{0,\kappa} \tag{4.18}$$

(ii) 设 $e \in \Gamma_h^i$ 是相邻单元 κ^+ 和 κ^- 的内部边

$$h_e^{1/2} \|J_{F,1}\|_{0,e} \leq \sum_{\kappa \in U_e} \left(\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_k \|u - u_h\|_{0,\kappa} \right) \tag{4.19}$$

其中 $U_e = \{\kappa^+, \kappa^-\}$ 。

(iii) 对于每一个边界边 $e \in \Gamma_h^i$ 且 $e \in \partial\Omega$, 有

$$h_e^{1/2} \|J_{F,1}\|_{0,e} \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_e \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_e^{1/2} \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,e} \tag{4.20}$$

(iv) 对任意边 $e \in \Gamma_h^i$

$$h_e^{-1} \|[u_h]\|_{0,e}^2 = h_e^{-1} \|[u - u_h]\|_{0,e}^2 \tag{4.21}$$

定理 4.3: 在定理 4.1 的条件下有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \eta_\kappa \leq & \sum_{\kappa \in \mathcal{W}_\kappa} \left(\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_k \|u - u_h\|_{0,\kappa} \right) \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\Omega} h e^{-1/2} \|[u - u_h]\|_{0,e} + \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\Omega} h e^{1/2} \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,e} \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\eta(u_h) \leq \|u - u_h\|_G + h^{1/2} \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\partial\Omega} \tag{4.23}$$

证明：由 η_κ 的定义和引理 4.5 推出(4.21)

$$\begin{aligned} \eta_\kappa^2 &= h_\kappa^2 \|\Delta u_h + u_h\|_{0,\kappa}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} h e \|J_{F,1}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^b \cap \partial\kappa} h e \|J_{F,1}\|_{0,e}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} \sigma h e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2 \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{0,e}^2 + c \cdot h_\kappa^2 \|u - u_h\|_{0,e}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^b \cap \partial\kappa} \|\nabla(u - u_h)\|_{0,e}^2 \\ &\quad + h_e \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,e}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i \cap \partial\kappa} \sigma h e^{-1} \|[u - u_h]\|_{0,e}^2 \end{aligned}$$

对上式整理就可以得到(4.21)，对(4.21)两边的 $\kappa \in T_h$ 求和并利用 $\|\cdot\|_G$ 的定义，得到(4.22)。

定理 4.3 表明误差估计子 $\eta(u_h)$ 是有效的。

4.3. 特征函数的估计子的可靠性

引理 4.6 (文献[7]中引理 4.6)：设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是(2.5)和(2.8)的特征对，且 $(u_h, u_h) \neq 0$ ，则有

$$\lambda - \lambda_h = \frac{a_h(u - u_h, u - u_h)}{(u_h, u_h)} + \lambda \frac{\langle u - u_h, u - u_h \rangle}{(u_h, u_h)} \tag{4.24}$$

由定理 4.2 和定理 4.3 可知，特征函数 $\|u - u_h\|_G^2$ 的估计子 $\eta(u_h)^2$ 在数据振荡前是可靠和高效的，因此基于该估计子的自适应算法可以生成良好的分级网格，即近似特征函数在 $\|\cdot\|_G^2$ 内达到最优收敛速度 $O(dof^{-m})$ 。同时，根据[7]有 $\sum_{\kappa \in T_h} h_\kappa |u - u'|_{3/2,\kappa} \leq dof^{-m}$ ，即 $|\lambda - \lambda_h| \leq dof^{-m}$ 。因此，我们认为 $\eta(u_h)^2$ 可以看作是 λ_h 的误差估计(注意 dof^{-m} 表示自由度)。

第 5 节的数值实验表明 $\eta(u_h)^2$ 作为 λ_h 的误差估计是可靠和有效的。

5. 数值实验

在这部分，我们将会针对问题(2.1)使用间断有限元自适应方法进行数值实验去验证方法的有效性。程序是在 IFEM 包下编译的，计算得出的特征值采用降序排列。

我们考虑了两个区域：L 型 $(-1,1)^2 \setminus ([0,1] \times (-1,0])$ 和有四个顶点的方形 (Ω_s) ：顶点为 $(0,1)(1,0)(0,-1)(-1,0)$ ，计算了二维一次元，并且在计算的时候两个区域惩罚参数都取固定的数 $\sigma = 10$ 。

由于准确的特征值未知，我们分别取了参考值，这些参考特征值都是通过自适应计算得到的，尽可能的准确。

Table 1. The adaptive results by using the P1 element with initial meshes $h = 1/8$

表 1. 采用初始网格 $h = 1/8$ 一次元自适应结果

Domain	ref	k	dof	$\lambda_{1,h}$	Error
Ω_L	0.182964362611	1	1152	0.182990767525793	-0.001906271534182
		5	3324	0.182973954000749	-0.000737187186949
		10	9846	0.182967388414938	-0.000230594919086
		15	32388	0.182965251347290	-0.000073924569877
		20	101190	0.182964554908930	-0.000024031543177

Continued

Domain	ref	k	dof	$\lambda_{2,h}$	Error
Ω_s	0.253398187247910	1	384	0.253556274724143	-0.008407894740894
		5	1260	0.253437841254342	-0.002853604209954
		10	4236	0.253409067016017	-0.000852962866167
		15	12216	0.253400793229426	-0.000272120513436
		19	32178	0.253398503178599	-0.000087819423518

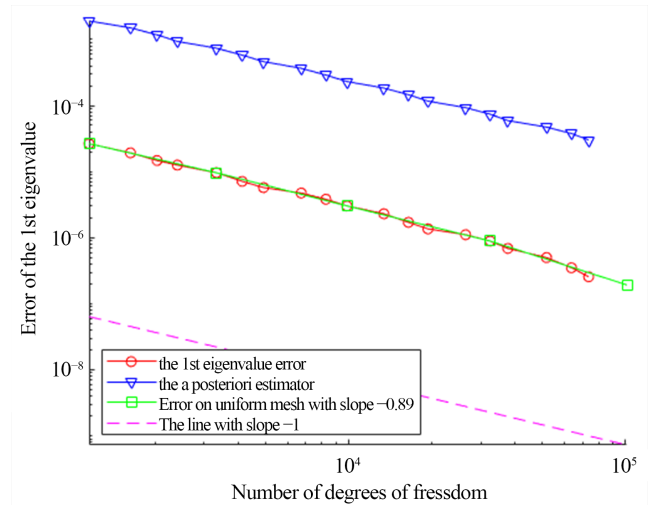
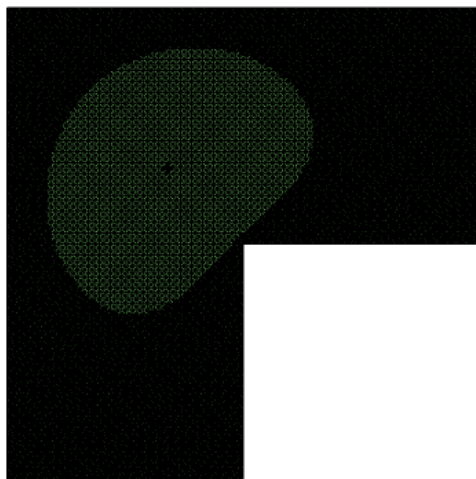


Figure 1. Adaptive refined mesh and the error curves on Ω_L with initial mesh $h = 1/8$ using the P1 element
 图 1. Ω_L 采用初始网格 $h = 1/8$ 一次元自适应网格与误差曲线图

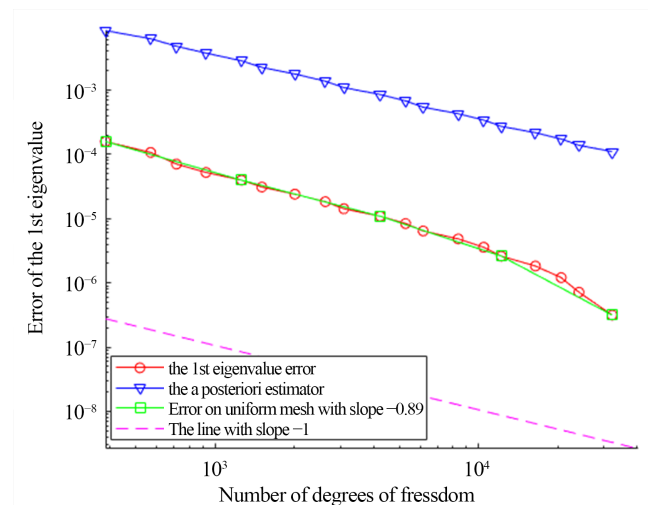
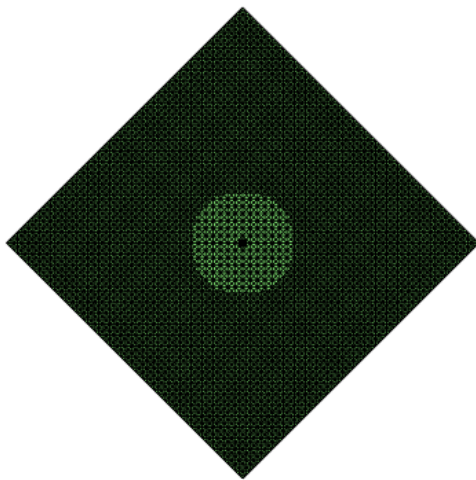


Figure 2. Adaptive refined mesh and the error curves on Ω_S with initial mesh $h = 1/8$ using the P1 element
 图 2. Ω_S 采用初始网格 $h = 1/8$ 一次元自适应网格与误差曲线图

表 1 列出了自适应计算的结果，图 1、图 2 描述了自适应网格与误差曲线，可以看出线性不连续单元(一次元)的误差曲线近似平行于斜率为-1 的直线。这表明自适应算法能达到最优收敛，从误差曲线上也可以看出在相同自由度下，自适应算法得到的近似比均匀网格上的近似更准确。

6. 总结

由于自共轭 Steklov 特征值问题中特征值的后验误差估计的可靠性和有效性的间断有限元问题至今做的人很少, 所以为了解决这个问题, 本文采用了间断有限元法, 先写出了选取的问题模型的变分形式和间断有限元离散形式, 在 L 型区域和方形区域上计算了后验误差估计的可靠性和有效性, 在数值实验部分本文对其进行编程, 实现了二维一次元的算法的有效实现, 得到了我想要的结果, 但是我认为这并不是最理想的结果, 后期的工作是二维二次元算法的有效实现, 甚至更高维和其他区域的有效实现。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金(黔师新苗[2021]A01)。

参考文献

- [1] Bergman, S. and Schiffffer, M. (1953) Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. Pure and Applied Mathematics 4, Academic Press, New York.
- [2] Zeng, Y. and Wang, F. (2017) A Posteriori Error Estimates for a Discontinuous Galerkin Approximation of Steklov Eigenvalue Problems. *Applied Mathematics*, **62**, 243-267. <https://doi.org/10.21136/AM.2017.0115-16>
- [3] Cockburn, B., Karniadakis, G.E. and Shu, C.W. (1999) Discontinuous Galerkin Methods, Thoery, Computation and Applications. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3>
- [4] Antonietti, P., Buffa, A. and Perugia, I. (2006) Discontinuous Galerkin Approximation of the Laplace Eigenproblem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 3483-3503. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.06.023>
- [5] Wang, L., Xiong, C., Wu, H. and Luo, F. (2019) A Priori and a Posteriori Error Analysis for Discontinuous Galerkin Finite Element Approximations of Biharmonic Eigenvalue Problems. *Advances in Computational Mathematics*, **45**, 2623-2646. <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09689-7>
- [6] Buffa, A. and Perugia, I. (2006) Discontinuous Galerkin Approximation of the Maxwell Eigenproblem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**, 2198-2226. <https://doi.org/10.1137/050636887>
- [7] Li, Y.J., Bi, H. and Yang, Y.D. (2022) The a Priori and a Posteriori Error Estimates of DG Method for the Steklov Eigenvalue Problem in Inverse Scattering. *Journal of Scientific Computing*, **32**, 2-10.