Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(11), 8148-8162**
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111863

Hans汉斯

一类液晶系统基态解和无穷多解的存在

李飞翔[#*]**，滕凯民**

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2022年10月23日；录用日期：2022年11月18日；发布日期：2022年11月28日

摘 要

在这篇文章中，我们主要证明一类液晶系统基态解的存在性。在V和 g的假设下，我们利用Nehari流形的方法找到了这个解。之后，我们利用山路定理的方法证明了这类液晶系统非平凡解的存在性。最后我们对上述系统做了一些改进，利用亏格理论的方法证明了液晶系统的多重性结果，即证明了该系统无穷多解的存在性。

关键词

基态解，非平凡解，无穷多解

Existence of Ground State Solutions and Infinitely Many Solutions for a Class of Liquid Crystal Systems

Feixiang Li[#*]**, Kaimin Teng**

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Oct. 23rd, 2022; accepted: Nov. 18th, 2022; published: Nov. 28th, 2022

Abstract

In this paper, we aim to prove the existence of ground state solutions for a class of liquid crystal system. Under the assumptions of V and the nonlinearity g, we find this solution using the Nehari manifold. After that, we prove the existence of nontrivial solutions of liquid crystal system by using the method of Mountain Pass Theorem. Finally, we have made some improvements, and prove

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 李飞翔, 滕凯民. 一类液晶系统基态解和无穷多解的存在[J]. 应用数学进展, 2022, 11(11): 8148-8162.
DOI: 10.12677/aam.2022.1111863

a different type of multiplicity result by applying the Krasnoselskii genus theory, the existence of infinitely many solutions to the system.

Keywords

Ground State Solutions, Nontrivial Solutions, Infinitely Many Solutions

1. 引言

本文考虑下面的液晶系统

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \gamma u\theta = g(u), & x \in \mathbb{R}^2. \\ -\Delta\theta + c^2 = u^2, & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$

其中参数 $\gamma \geq 0$，$c > 0$ 是一个常数。$(x,y) \in \mathbb{R}^2$，$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 是横向的拉普拉斯算子。$u(x,y)$ 是一个实值函数。方程(1)与文[1]中的光电场 (E,θ)

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{x,y}E + \alpha\left[\sin^2\theta - \sin^2\theta_0\right]E = 0, \\ 2\Delta_{x,y}\theta + \left[\beta + \alpha|E|^2\right]\sin(2\theta) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中，θ_0 为预倾斜角，表示由静电场诱导的取向，$\Delta_{x,y}$ 是拉普拉斯算子。α 和 β 代表向列向液晶分子的光学和静态介电常数。系统(2)模拟了激光在向列相液晶中的传播。在文[2]中，Strinic 等人利用快速傅里叶变换算法从数值上证明了在狭窄阈值区域内存在稳定孤子。在文[3]中，Aleksic 等人利用改进的 Petviashvili 方法和变分法，计算了基本孤子的分布。Panayotaros 和 Marchant 在文[4]中，研究了具有贝塞尔势核的二维 Hartree 型非局域 NLS 方程的孤子解。

设 $\theta = \bar{\theta} + \theta_0$，其中，$\bar{\theta}$ 对应于光诱导的分子重定向，并且 $\bar{\theta} \ll 1$，$\bar{\alpha} = \alpha\sin(2\theta_0)$，$\bar{\beta} = 2\beta\cos(2\theta_0)$。利用一阶近似，可推得下列的低阶近似模型：

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{x,y}E + \bar{\alpha}\bar{\theta}E = 0, \\ 2\Delta_{x,y}\bar{\theta} + \bar{\beta}\bar{\theta} + \bar{\alpha}|E|^2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

在文[3]中，Aleksic 等人使用了一种迭代的数值方法求该模型的精确基本型不变解，将变分法应用于单轴向列相液晶中光束传播的标量模型，并与数值模拟结果进行了比较，通过直接的数值模拟，在有噪声和无噪声的情况下，验证了孤子解的稳定性，之后对(3)应用无量纲化过程，得到下列无量纲动力演化系统

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{x,y}E + \gamma\psi E = 0, \\ \Delta_{x,y}\psi - c^2\psi = 4\pi|E|^2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

其中参数 $\gamma \geq 0$，$c > 0$ 是一个常数。Hu 等人在文[5]中证明了(4)向列向液晶中非局域孤子间的相互作用可

以由非局域程度来控制。对于给定的波束宽度，可以通过偏置电压 V 改变 NLC 分子的前倾角 θ_0 来调整非局域程度。文[6]中，作者考虑了系统(4)的驻波解，其形式为

$$E(x,y,z)=\mathrm{e}^{i\omega z}u(x,y),$$

其中，$\omega>0$，$u(x,y)$ 是实值函数，则系统(4)退化为下列系统

$$\begin{cases}\Delta u-2\omega u+\gamma u\psi=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2.\\ -\Delta\psi+c^2\psi=4\pi u^2, & (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{cases} \tag{5}$$

文[6]中，作者利用山路定理和亏格理论，证明了径向对称孤立波的存在性和多重性。

当 $c=0$ 时，(5)退化为下列 Schrödinger-Possion 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\phi u=f(x,u), & x\in\mathbb{R}^2,\\ \Delta\phi=u^2, & x\in\mathbb{R}^2.\end{cases} \tag{6}$$

关于 $\mathbb{R}^2$ 上 Schrödinger-Possion 系统的变分方法研究，许多学者研究了其基态解、束缚态解，无穷多解的存在性。特别地，在文[7]中，Alves 等人利用 Nehari 流形的方法证明了 Schrödinger-Poisson 系统(6)当 $V(x)=1$ 时其最小能量正解的存在性。Chen 等人在系统(6)的基础上，令 $f(x,u)=f(u)$，采用变分方法在文[8]中研究了平面薛定谔泊松系统在轴对称函数空间中存在一个非平凡解和一个具有最小能量的基态解，其中 $V(x)$ 是轴对称的，进一步改进 $V=1$，$f(u)=|u|^{p-2}u$，且 $2<p<6$ 的情形。之后，在文[9]中，假设 V 轴对称和 f 满足 Trudinger-Moser 的意义上是次临界或临界指数增长，利用 Nehari 流形以及山路定理，证明了系统(6)基态解以及无穷多解的存在性。

受上述文献的启发，我们主要研究系统(1)基态解的存在性和无穷多解的存在性。本文主要关注系统(1)正解的存在性，不妨假设 $g(t)=0,t<0$。假设 V,g 满足如下条件：

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^2,(0,\infty))$，存在 $\alpha_0>0$，使得 $\inf_{\mathbb{R}^2}V(x)\geq\alpha_0>0$，并且有 $\lim_{|x|\to\infty}V(x)=+\infty$；

(g_1) $g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，存在 $\alpha_0>0$，使得

(i) 当 $\alpha>\alpha_0$ 时，$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t^2}}=0$；

(ii) 当 $\alpha<\alpha_0$ 时，$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t^2}}=+\infty$；

(g_2) $\lim_{t\to0}\frac{g(t)}{t}=0$；

(g_3) 存在 $\vartheta>2$，使得对任意的 $t>0$，都有 $0<\vartheta G(t)\leq g(t)t$；

(g_4) 函数 $t\to\frac{g(t)}{t^3}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(g_5) 存在 $p>4$，$\tau>\max\{1,\tau^*\}$，使得 $g(t)>\tau t^{p-1},\forall t>0$，其中，

$$\tau^*:=\left(\frac{2p\alpha_0c_p}{\pi(p-4)}\right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

我们主要结果陈述如下：

定理 1.1 设 V 满足 V_1，g 满足(g_1)~(g_5)。那么系统(1)至少存在一个基态解。

定理 1.2 设 V 满足 V_1，g 满足(g_1)~(g_5)。那么系统(1)至少存在一个非平凡解。

定理 1.3 设 V 满足 V_1，g 满足(g_1)~(g_4)。那么存在无穷多解 $(\gamma_n,u_n,\theta_n)\in\mathbb{R}^+\times E\times H^1(\mathbb{R}^2)$，使得 (γ_n,u_n,θ_n) 是下列系统

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u-\gamma u\theta=\gamma g(u), & x\in\mathbb{R}^2.\\ -\Delta\theta+c^2\theta=u^2, & x\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

的弱解。

本文结构如下：在第二节我们给出了几个准备性引理。在第三节证明定理 1.1。第四节将给出定理 1.2 的证明。第五节证明定理 1.3。

2. 准备性工作

设 $H^1(\mathbb{R}^2)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^2)\,|\,\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^2)\}$，其上赋予范数

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(|u|^2+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义空间

$$E:=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^2)\,|\,\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其上赋予范数

$$\|u\|_E=\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x$$

在此范数下，E 是一个 Hilbert 空间。由假设(V_1)，显然可得 $E\subset H^1(\mathbb{R}^2)$，并且 E 紧嵌入 $L^q(\mathbb{R}^2)$，$2\le q<+\infty$。

对于系统(1)中的第二个方程，利用 Lax-Milgram 定理，易证得如下结论，证明见[6]。

引理 2.1. 对任意的 $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$，存在唯一的 $\theta=\theta(u)\in H^1(\mathbb{R}^2)$，使得

(i) θ 是系统(1)第二个方程的解；

(ii) θ 满足：$\|\theta(u)\|\le C\|u\|_p^2$，其中 $p>2$，C 是一个常数；

(iii) $\theta:H^1(\mathbb{R}^2)\to H^1(\mathbb{R}^2)$ 连续；

(iv) 在 $\mathbb{R}^2$ 上，$\theta(u)\ge 0$，且对于任意的 $s\in\mathbb{R}$，$\theta[su]=s^2\theta[u]$。

此外，由文[10]可知，系统(1)第二个方程的解 $\theta(u)$ 显示表达为

$$\theta[u](x,y)=\int_{\mathbb{R}^2}4\pi E_2\left(c(x-s),c(y-t)\right)u^2(s,t)\mathrm{d}t,$$

其中，$E_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\in L^r(\mathbb{R}^2),1\le r<+\infty$，

这里，$K_0(r)\ge 0$，是第二类零阶修正贝塞尔函数，且具有如下性质：

(i) $K_0\in C^\infty((0,\infty))$，$K_0(r)>0$，$r>0$，并且 $\{K_0(r)\}'=-K_1(r)$，$r>0$；

(ii) 当 $r\to 0$ 时，有 $\frac{K_0(r)}{-\ln r}\to 1$，$rK_0'(r)\to -L_0$，$L_0>0$；

(iii) 当 $r\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^rK_0(r)\to 0$，$\mathrm{e}^rK_0'(r)\to 0$。

由引理 2.1，系统(1)可约化为经典的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+V(x)u+\gamma u\theta=g(u),\ x\in\mathbb{R}^2 \tag{7}$$

根据文[10]中定理 2.14 知($W^{2,p}$-估计)，如果 $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$ 固定，那么 $\theta\in W^{2,r}(\mathbb{R}^2)$，对任意 $r\geq 2$，利用 Sobolev 嵌入定理，知 $\theta\in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$，$\alpha\in(0,1)$。椭圆正则性的 $W^{2,p}$ 估计，蕴含了 $u\in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$，对任何 $p\geq 1$，利用 Sobolev 嵌入定理，知 $u\in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^2)$，$\beta\in(0,1)$。对第二个方程使用 Shauder 估计，得 $\theta\in C^{3,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^2)$，$\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$。

问题(7)对应的能量泛函 $I:E\to\mathbb{R}$ 为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}_2}u^2\theta[u]\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}_2}G(u)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

由假设(g_1)和(g_2)，容易验证 $I\in C^1(E,\mathbb{R})$，且对任意的 $v\in E$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u\nabla v+V(x)uv\right)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}_2}u\theta[u]v\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}_2}g(u)v\,\mathrm{d}x$$

因此，$u\in E$ 是方程(7)的弱解当且仅当 u 是泛函 I 的临界点。

引理 2.2. [6]如果在 E 中，u_n 弱收敛于 u，那么在 E 中 $\theta[u_n]\to\theta[u]$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\theta(u_n)u_n^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}\theta(u)u^2\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

我们回顾 $\mathbb{R}^2$ 上的 Trudinger-Moser 不等式，见文[11]。

引理 2.3. 对于任意的 $u\in H^1(\mathbb{R}^2)$，$\alpha>0$，都有 $\mathrm{e}^{\alpha|u|^2}-1\in L^1(\mathbb{R}^2)$。此外，对于 $M>0$，$\alpha<4\pi$，如果 $\|\nabla u\|_2^2\leq 1$，$\|u\|_2^2\leq M$，那么存在 $C=C(M,\alpha)>0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha|u|^2}-1\right)\mathrm{d}x\leq C.$$

注： 由(g_2)可得，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|g(t)|\leq\varepsilon|t|,\ |G(t)|\leq\frac{1}{2}\varepsilon|t|^2,\ 0<t\leq\delta \tag{10}$$

另一方面，由(g_1)，给定 $\alpha>\alpha_0$，存在 $\delta_1>0$，使得

$$|g(t)|\leq\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\alpha t^2}-1\right),\ t\geq\delta_1.$$

于是，当 $t\geq\delta_1$ 时，有

$$|g(t)t|\leq\frac{\varepsilon}{\delta_1^2}t^2\left(\mathrm{e}^{\alpha t^2}-1\right),\ |G(t)|\leq\frac{\varepsilon}{\delta_1^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha t^2}-1\right) \tag{11}$$

因此，根据(10)~(11)，对于 $\varepsilon>0$，$\alpha>\alpha_0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得对任意的 $u\in E$，$q>2$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^2}g(u)u\,\mathrm{d}x\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1\right)\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\,\mathrm{d}x\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x+\bar{C}_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1\right)\mathrm{d}x \tag{13}$$

引理 2.4. 函数 $h(t)=g(t)t-4G(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

证明：当 $0<s<t$ 时，由(g_4)得，

$$h(s)=g(s)s-4G(s)=\frac{g(s)}{s^3}s^4-4G(t)+4\int_s^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\le\frac{g(t)}{t^3}s^4-4G(t)+\frac{g(t)}{t^3}\left(t^4-s^4\right)<g(t)-4G(t)=h(t)$$

得证。

3. 定理 1.1 的证明

定义. Nehari 流形

$$N=\left\{u\in E\setminus\{0\},\left\langle I'(u),u\right\rangle=0\right\}.$$

引理 3.1. $N\ne\varnothing$。

证明：设 $u\in E\setminus\{0\}$，且 $u\ge0$，令 $\eta_u(t)=I(tu),t>0$。显然 $\eta_u(t)\in C^1(\mathbb{R})$，并且 $tu\in N$ 当且仅当 $\eta_u'(t)=0$。由(12)以及 Holder 不等式可得

$$\begin{aligned}\eta_u'(t)&=t\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\gamma t^3\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}g(tu)u\mathrm{d}x\\&\ge t\|u\|_E^2+\gamma t^3\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-\varepsilon t\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x-t^{q-1}\bar{C}_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha|u|^2}-1\right)\mathrm{d}x\\&\ge t\left(\frac{1}{2}-\frac{C\varepsilon}{2}\right)\|u\|_E^2+\gamma t^3\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-t^{q-1}\bar{C}_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{qs'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha s\|tu\|_{H^1}^2\left(\frac{u}{\|u\|_{H^1}}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{s}}\end{aligned},$$

其中 $s,s'>1$。选取 $\alpha>\alpha_0$，$t_1>0$，使得 $\alpha s\|t_1u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2<4\pi$，利用引理 2.4，可得

$$\eta_u(t)\ge D_1t+D_2t^3-D_3t^{q-1},\ 0<t\le t_1$$

其中，$D_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{C\varepsilon}{2}\right)\|u\|_E^2$，$D_2=\gamma\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x$，$D_3=\bar{C}_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{qs'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}$。由于 $q>2$，因此存在 $0<t^*<t_1$，使得对所有的 $0<t<t^*\le t_1$，都有 $\eta_u(t)>0$。

另一方面，由(g_5)和引理 2.3，易得

$$\eta_u'(t)\le t\|u\|_E^2+\gamma t^3\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-\tau t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^2}u^p\mathrm{d}x.$$

由于 $p>4$，则 $\lim_{n\to\infty}\eta_u'(t)\to-\infty$。因此，至少存在一个 $t_u>0$，使得 $\eta_u'(t_u)=0$，即 $t_uu\in N$，因此 $N\ne\varnothing$。

引理 3.2. 存在常数 $C>0$，使得对任意的 $u\in N$，都有 $\|u\|_E\ge C$。

证明：反证法，假设存在序列 $\{u_n\}\subset N$，使得在 E 上

$$u_n\to0\tag{14}$$

因此，由(12)可得

$$\|u\|_E^2\le\gamma\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u_n^2}-1\right)\mathrm{d}x$$

由 Hölder 不等式，$s', s>1$，有

$$\left(1-C_\varepsilon\right)\|u_n\|_E^2 \le \bar{C}_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^{qs'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha s\|u_n\|_{H^1}^2\left(\frac{u}{\|u_n\|_{H^1}}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{s}}$$

利用(14)，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $\sup\limits_{n\ge n_0}\left\{\alpha s\|u_n\|_E^2\right\}=\alpha^*<4\pi$，由引理 2.3，Sobolev 嵌入定理，可得

$$\left(1-C_\varepsilon\right)\|u_n\|_E^2 \le MC_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^{qs'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}\le MC_\varepsilon C\|u_n\|_E^q.$$

上述不等式蕴含着 $\dfrac{1-C_\varepsilon}{MC_\varepsilon C}\le\|u_n\|_E^{q-2}$。由于 $q>2$ 与(14)矛盾。得证。

考虑极小化问题

$$\inf_{u\in N} I(u)=c$$

引理 3.3. $c>0$。

证明：对任意的 $u\in N$，由引理 3.2 和引理 2.4 得

$$\begin{aligned}I(u)&=I(u)-\frac{1}{4}\langle I'(u),u\rangle\\&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}_2}\left(\frac{1}{4}g(u)u-G(u)\right)\mathrm{d}x.\\&\ge\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x\ge C>0\end{aligned}$$

因此，$c>0$。

引理 3.4. 设 $u_n\in N$，满足 $I(u_n)\to c$，则 $\{u_n\}$ 在 E 中有界。

证明：由 $I(u_n)\to c$，$\langle I'(u_n),u_n\rangle=0$，以及引理 2.4，计算得

$$c+o_n(1)=I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\frac{1}{4}\|u_n\|_E^2+\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4}g(u_n)u_n-G(u_n)\right)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{4}\|u_n\|_E^2$$

上式蕴含了 $\{u_n\}$ 在 E 中有界。

下面我们考虑问题

$$-\Delta u+V(x)u+\gamma u\theta=|u|^{p-2}u,\ \mathbb{R}^2,$$

其中 $p>4$，该问题对应的能量泛函 $I_p:E\to\mathbb{R}$ 为

$$I_p(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}_2}u^2\theta[u]\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}_2}|u|^p\,\mathrm{d}x.$$

显然 $I_p\in C^1(E,\mathbb{R})$。记其对应的 Nehari 流形为

$$N_p=\left\{u\in E\setminus\{0\},\langle I_p'(u),u\rangle=0\right\}$$

定义 $c_p=\inf\limits_{u\in N_p}I_p(u)$。类似于文[12]中的讨论，存在 $w_p\in E$，且 $w_p>0$，使得 $I_p(w_p)=c_p$，$I_p'(w_p)=0$，

并且

$$c_p = I_p\left(w_p\right) = I_p\left(w_p\right) - 4\left\langle I_p'\left(w_p\right), w_p\right\rangle = \frac{1}{4}\left\|w_p\right\|_E^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^2} w_p^p \mathrm{d}x \ge \frac{p-4}{4p}\int_{\mathbb{R}^2} w_p^p \mathrm{d}x \tag{15}$$

下面我们对极小能量值 $c = \inf_N I$ 进行估计。

引理 3.5. $c \le \dfrac{2pc_p}{(p-4)\tau^{\frac{2}{p-2}}}$。

证明：利用 $\left\langle I_p'\left(w_p\right), w_p\right\rangle = 0$，以及条件(g5)可得

$$\left\|w_p\right\|_E^2 + \gamma\int_{\mathbb{R}^2} w_p^2\theta\left[w_p\right]\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} w_p^p \mathrm{d}x \le \tau\int_{\mathbb{R}^2} w_p^p \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^2} g\left(w_p\right)w_p \mathrm{d}x$$

上述不等式蕴含了 $\left\langle I'\left(w_p\right), w_p\right\rangle \le 0$。类似于之前的证明，利用零点定理可得存在 $\beta \in (0,1]$，使得 $\beta w_p \in N$。利用条件(g5)，以及 $\left\langle I_p'\left(w_p\right), w_p\right\rangle = 0$，推得

$$\begin{aligned}
c &\le \frac{\beta^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\left|\nabla w_p\right|^2 + V(x)w_p^2\right)\mathrm{d}x + \frac{\gamma\beta^4}{4}\int_{\mathbb{R}_2} w_p^2\theta\left[w_p\right]\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}_2} G\left(\beta w_p\right)\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\beta^2}{2}\left(\left\|w_p\right\|_E^2 + \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}_2} w_p^2\theta\left[w_p\right]\mathrm{d}x\right) - \frac{\tau}{p}\beta^p\int_{\mathbb{R}_2} w_p^p \mathrm{d}x \\
&\le \frac{\beta^2}{2}\left(\left\|w_p\right\|_E^2 + \gamma\int_{\mathbb{R}_2} w_p^2\theta\left[w_p\right]\mathrm{d}x\right) - \frac{\tau}{p}\beta^p\int_{\mathbb{R}_2} w_p^p \mathrm{d}x \\
&\le \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\tau}{p}\beta^p\right)\int_{\mathbb{R}_2} w_p^p \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由(15)得 $c \le \left(\dfrac{\beta^2}{2} - \dfrac{\tau}{p}\beta^p\right)\dfrac{c_p 4p}{p-4} \le \max\limits_{s\ge 0}\left[\dfrac{s^2}{2} - \dfrac{\tau}{p}s^p\right]\dfrac{c_p 4p}{p-4}$。因此可以推得

$$c \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{2}{p-2}}\frac{4pc_p}{p-4} = \frac{2pc_p}{(p-4)\tau^{\frac{2}{p-2}}}.$$

引理 3.6. 设 $u_n \in N$ 为极小化序列。则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|_E^2 < \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$。不妨假设存在 $m \in \left(0, \dfrac{4\pi}{\alpha_0}\right)$，使得 $\left\|u_n\right\|_E^2 \le m,\ \forall n \in \mathbb{N}$。

证明：由引理 3.4 和引理 3.5，可得 $\left\|u_n\right\|_E^2 \le 4c + o_n(1) \le \dfrac{8pc_p}{(p-4)\tau^{\frac{2}{p-2}}} + o_n(1)$，利用条件(g5)可得：$\tau > \tau^*$，因此 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\|u_n\right\|_E^2 \le \dfrac{8pc_p}{(p-4)\tau^{\frac{2}{p-2}}} < \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$。

固定 $\alpha > \alpha_0$，使得 $m \in \left(0, \dfrac{4\pi}{\alpha}\right)$。另外，由引理 3.4，对于上述的极小化序列 $\{u_n\}$，通过取子列，仍记为 $\{u_n\}$，假设存在 $u \in E$ 使得在 E 中，u_n 弱收敛于 u，在 $L^p\left(\mathbb{R}^2\right)(p \ge 2)$ 中，u_n 强收敛于 u，在 $\mathbb{R}^2$ 上，

u_n 几乎处处收敛于 u。

引理 3.7. 存在 $R,\eta>0$，$\{y_n\}\subset\mathbb{R}^2$，使得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\int\limits_{B_R(y_n)}|u_n|^2\,\mathrm{d}x\ge\eta$。

证明：利用文[13]中的消失引理，可得 $u_n\to 0$，在 $L^s(\mathbb{R}^2)(2<s<+\infty)$。由引理 2.1，易推得 $\int\limits_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x\to 0$。

另一方面，由引理 3.6 和引理 2.3，得 $C_\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u_n^2}-1\right)\mathrm{d}x\le CC_\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n|^q\,\mathrm{d}x\to 0$。

因此，由(12)得 $\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\le\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u_n|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u_n^2}-1\right)\mathrm{d}x\to 0,\varepsilon\to 0$。联合 $\langle I'(u_n),u_n\rangle=0$，可推得 $\|u_n\|_E\to 0$，这与引理 3.2 矛盾，得证。

类似于文[7]中的引理 4.5，可证得如下结论：

引理 3.8.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u)u\mathrm{d}x$$

和

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u_n)w\mathrm{d}x\to\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u)w\mathrm{d}x,\quad\forall w\in E\,.$$

定理 1.1 的证明下证序列 $\{u_n\}$ 的弱极限 $u\in N$，并且 $I(u)=c$。设 $u_n\in N$，满足 $I(u_n)\to c$。由范数函数的弱下半连续性，可得

$$\|u_n\|_E^2\le\liminf_{n\to\infty}\left(\|\nabla u_n\|_{L^2}^2+\int\limits_{\mathbb{R}^2}V(x)u_n^2\mathrm{d}x\right)$$

因此，利用引理 2.2 和引理 3.8，可得

$$\|u_n\|_E^2\le\gamma\int\limits_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int\limits_{\mathbb{R}^2}g(u)u\mathrm{d}x\,.$$

类似于引理 3.1 的证明，存在 $t\in(0,1]$，使得 $tu\in N$。因此

$$c\le I(tu)=I(tu)-\frac{1}{4}\langle I'(tu),tu\rangle=\frac{1}{4}\|tu\|_E^2+\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4}g(tu)tu-4G(tu)\right)\mathrm{d}x\,.$$

若 $0<t<1$，则利用引理 2.4 和 Fatou's 引理，得

$c\le I(tu)<\frac{1}{4}\|u\|_E^2+\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4}g(u)u-4G(u)\right)\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\liminf\limits_{n\to\infty}\left(\|u_n\|_E^2+\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(g(u)u-4G(u)\right)\mathrm{d}x\right)$ 即 $c\le I(tu)<\lim\limits_{n\to\infty}I(u_n)=c$，说明 $0<t<1$ 不可能发生。因此 $t=1$，即 $u\in N$，$I(u)=c$，得证。

4. 定理 1.2 的证明注意到 $I(0)=0$，由引理 2.1，以及(12)可得，存在常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{\gamma}{4}\int\limits_{\mathbb{R}_2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-\int\limits_{\mathbb{R}_2}G(u)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|u\|_E^2+C_1\gamma\|u\|_E^4-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}x-\bar{C}_\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

存在 $s,s'>1$，使得 $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$，由引理 3.6，可选取适当的 s，使得 $\alpha s\|u\|_{H^1}^2<4\pi$。利用引理 2.3，Sobolev 嵌入定理以及 Hölder 不等式，存在 $C=C(M,\alpha)>0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1\right)\right)\mathrm{d}x\le C_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{qs'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha s\|u_n\|_{H^1}^2\left(\frac{u}{\|u_n\|_{H^1}}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{s}}\le C\|u\|_{qs'}^q\le C\|u\|_E^q \tag{16}$$

因此，存在 $D_1,D_2>0$，有

$$I(u)\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|u\|_E^2+\gamma D_1\|u\|_E^4-D_2\|u\|_E^q.$$

那么存在常数 $\rho>0,r_0>0$，对于任意的 $u\in\partial B_\rho(0)$，都有 $I(u)\ge r_0$。设 $u_0\in E$，$u_0\ge0$，我们有

$$I(su_0)=\frac{s^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_0|^2+V(x)u_0^2\right)\mathrm{d}x+\frac{\gamma s^4}{4}\int_{\mathbb{R}_2}u_0^2\theta[u_0]\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}_2}G(su_0)\mathrm{d}x,\ \ s>0.$$

由条件(g_5)可得，$\int_{\mathbb{R}_2}G(su_0)\mathrm{d}t>\frac{\tau}{p}\int_{\mathbb{R}_2}(su_0)^p\,\mathrm{d}t$。由于 $\gamma\ge0$，因此当 $s\to+\infty$ 时，$I(su_0)\to-\infty$。那么存在 $s_0>0$，使得 $s_0u_0\not\subset B_\rho(0)$，并且 $I(s_0,u_0)<0<r_0$。

下面证明泛函 I 满足 PS 条件。设 $d\in\mathbb{R}$，以及 $\{u_n\}$ 是 E 中的序列满足

$$I(u_n)\to d,\ I'(u_n)\to0$$

直接计算得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right)\mathrm{d}x-4\int_{\mathbb{R}_2}G(u_n)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}_2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to\infty}\left[4I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle\right]=4d$$

又因为

$$\int_{\mathbb{R}_2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x-4\int_{\mathbb{R}_2}G(u_n)\mathrm{d}x\ge0.$$

因此，$\|u_n\|_E^2\le d$，即 u_n 在 E 中有界。通过取子列，仍记为 u_n，不妨假设存在 $u\in E$，使得在 E 中，u_n 弱收敛于 u，在 $L^p(\mathbb{R}^2)(p\ge2)$ 中，u_n 强收敛于 u，在 $\mathbb{R}^2$ 上，u_n 几乎处处收敛于 u。

对于任意的 $\varphi\in E$，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u_n]u_n\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u]u\varphi\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^2}(\theta[u_n]-\theta[u])u_n\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u](u_n-u)\varphi\mathrm{d}x\\&\le\left(\int_{\mathbb{R}^2}(\theta[u_n]-\theta[u])^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\varphi|^6\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\\&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^2}(\theta[u_n]-\theta[u])^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n-u|^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\varphi|^6\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\to0\end{aligned} \tag{17}$$

由于在 E 中，u_n 弱收敛于 u，因此

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_n\varphi\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u\varphi\mathrm{d}x \tag{18}$$

利用(17)，(18)和引理 3.8 可得

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n),\varphi\rangle&=\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_n\varphi\mathrm{d}x+\gamma\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u_n]u_n\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)\varphi\mathrm{d}x\\&\to\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u\varphi\mathrm{d}x+\gamma\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u]u\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}g(u)\varphi\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{19}$$

因此，$I'(u)=0$，即 u 是泛函 I 的临界点。在(19)中，取 $\varphi=u_n-u$，即

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n),u_n-u\rangle=&\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\\&+\gamma\int_{\mathbb{R}^2}\theta[u_n]u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to0\end{aligned}$$

利用引理 2.2，引理 3.4，以及 $\langle I'(u_n),u_n-u\rangle-\langle I'(u),u_n-u\rangle=0$ 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u_n-u)|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)(u_n-u)^2\mathrm{d}x\to0$$

即 $\|u_n-u\|_E^2\to0$。因此，在 E 中，$u_n\to u$。

因此，利用文[14]中的山路定理，I 至少有一个非平凡临界点 $u\in E$，从而是方程(7)的弱解。

注： 定义 $c_0=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{u\in g([0,1])}I(u)$，其中 $\Gamma=\left\{g\in C\left([0,1],H_0^1(\mathbb{R}^2)\right)\mid g(0)=0,g(1)=s_0u_0\right\}$。当 g 满足条件 (g_1)~(g_5)时，利用文[13]中的定理 4.2 可得：$c=c_0$。

5. 定理 1.3 的证明

本节我们将证明下面系统

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u-\gamma u\theta=\gamma g(u), & x\in\mathbb{R}^2.\\-\Delta\theta+c^2\theta=u^2, & x\in\mathbb{R}^2.\end{cases} \tag{20}$$

存在无穷多解 $(\gamma,u,\theta)\in\mathbb{R}^+\times E\times H^1(\mathbb{R}^2)$。

定义泛函 $J:E\times H^1(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$，

$$J(u,\theta)=J_1(u)-\gamma J_2(u,\theta),$$

其中，

$$J_1(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{21}$$

$$J_2(u,\theta)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla\theta|^2+c^2\theta^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x$$

显然，在 g 满足(g_1)~(g_2)的假设条件下，$J\in C^1\left(E\times H^1(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}\right)$，并且 J 的临界点对应于系统(20)的弱解。

由引理 2.1，系统(20)可约化为单个未知函数 u 的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+V(x)u=\gamma u\theta[u]+\gamma g(u),\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{22}$$

其对应的能量泛函 $\mathrm{II}:E\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(u)&=J(u,\theta[u])\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2\right)\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla\theta|^2+c^2\theta^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta\mathrm{d}x-\gamma\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2\right)\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x-\gamma\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{23}$$

由引理 2.1，$\mathrm{II}\in C^1(E,\mathbb{R})$，通过求导，对任意的 $v\in E$，有

$$\langle\mathrm{II}'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x-\gamma\int_{\mathbb{R}_2}u\theta[u]v\mathrm{d}x-\gamma\int_{\mathbb{R}_2}g(u)v\mathrm{d}x,$$

因此，$u\in E$ 是方程(22)的弱解当且仅当 u 是 II 的临界点。

定义泛函 $F:E\to\mathbb{R}$ 如下

$$F(u)=J_2(u,\theta[u])=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\|\nabla\theta[u]\|^2+c^2|\theta[u]|^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x$$

引理 5.1. [6] (A) F 在 E 中是连续可微的，即 $F\in C^1(E,\mathbb{R})$；

(B) 对于 $\sigma>0$，定义集合 $M_\sigma=\{u\in E\,|\,F(u)=\sigma\}$，那么 M_σ 是维数为 1 的非空 C^1 流形。

证明：利用隐函数定理，我们有 $\frac{\partial J_2}{\partial\theta}(u,\theta[u])=0,\ \forall u\in E$。容易证明，$F(u)$在 E 中是连续可微的，并且

$$\begin{aligned}\langle F'(u),v\rangle&=\frac{\partial J_2(u,\theta[u])}{\partial u}v+\frac{\partial J_2(u,\theta[u])}{\partial\theta}\theta'[u]v=\frac{\partial J_2(u,\theta[u])}{\partial u}v\\&=\int_{\mathbb{R}^2}u\theta[u]v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u)v\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{24}$$

因为 $\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla\theta[u]|^2+c^2|\theta[u]|^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x$，所以我们有

$$F(u)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x.\tag{25}$$

因此，M_σ 可以表示为

$$M_\sigma=\left\{u\in E\,|\,\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x=\sigma\right\}$$

下面，证明 M_σ 非空。定义 $K:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，对于任意的 $u\in E$，$u\neq0$，有

$$K(s)=F(su)=\frac{s^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(su)\mathrm{d}x,$$

那么 $K(0)=0$，并且 $K(s)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上单调递增。因此，存在 $s_0>0$，使得

$$K(s_0)=F(s_0u)=\sigma.$$

因此，M_σ 非空。利用引理 2.1，(24)，(25)可得，若 $u\in E$，满足 $F'(u)=0$，那么 $\langle F'(u),u\rangle=0$，这就蕴含着 $u=0$。因此，M_σ 是维数为 1 的 C^1 流形。

回顾回顾亏格理论[15]。设 χ 是实值巴拿赫空间。设 $\aleph$ 表示所有的闭子集 $A\subset\chi\setminus\{0\}$ 的集合，这些闭子集关于原点是对称的。当 $x\in A$ 时可以推得 $-x\in A$。对于 $A\in\aleph$，定义 A 的亏格 $\gamma_0(A)$ 为最小正整数 k，使得其是一个奇映射，$h\in C\left(A,\mathbb{R}^k\setminus\{0\}\right)$。如果这样的 k 不存在，我们设 $\gamma_0(A)=+\infty$。如果 $A=\varnothing$，那么 $\gamma_0(A)=0$。如果，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个开集，并且是有界对称的，$0\in\Omega$，那么 $\gamma_0(\partial\Omega)=N$。

引理 5.2. [15]设 χ 是实值巴拿赫空间。假设 II 是完全对称的 $C^{1,1}$ 流形，$M\subset\chi\setminus\{0\}$ 上的一个偶 C^1 泛函，并且 II 满足(PS)条件，在 M 上是有下界的。设

$$\overline{\gamma}_0(M)=\sup\{\gamma_0(K):K\subset M\}\le\infty,$$

其中，$K\subset M$ 是紧的，并且是对称的。那么 II 在 M 上至少有 $\overline{\gamma}_0(M)$ 对临界点。

定理 1.3 的证明给定 $\sigma>0$，考虑泛函 $J_1|_{M_\sigma}$，其中，J_1 由(21)给出。我们有

$$J_1(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0.$$

因此，$J_1(u)$ 在 M_σ 上有下界。假设在 E 中，u_n 弱收敛于 u，利用引理 2.2，和引理 2.3，我们有

$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u_n)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\theta[u]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u)\mathrm{d}x=F(u),$$

因此，M_σ 在 E 中弱闭。

下面，我们证明 $J_1|_{M_\sigma}$ 满足(PS)条件。设序列 $\{u_n\}\in M_\sigma$，使得

(i) $\{J_1(u_n)\}$ 有界；

(ii) 当 $n\to\infty$ 时，$J_1'|_{M_\sigma}(u_n)\to 0$，

其中，$J_1'|_{M_\sigma}$ 表示 J_1 限制在 M_σ 上的导数，那么利用文[16]中拉格朗日乘子定理，文[17]中 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子序列 $\{u_n\}$，仍定义为 $\{u_n\}$，序列 $\{\beta_n\}\subset\mathbb{R}$，$d\subset\mathbb{R}$，使得对任意的 $v\in E$，

$$\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u_n\nabla v+V(x)u_nv)\mathrm{d}x-\beta_n\left(\int_{\mathbb{R}^2}u_n\theta[u_n]v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)v\mathrm{d}x\right)\to 0 \tag{26}$$

并且当 $n\to\infty$ 时，有

$$J_1(u_n)=\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_n|^2+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_n^2\right)\mathrm{d}x\to d. \tag{27}$$

由(27)可得，$\{u_n\}$ 在 E 中有界。在(26)中，取 $v=u_n$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right)\mathrm{d}x-\beta_n\left(\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\right)\to 0,\quad n\to\infty \tag{28}$$

由引理 2.1，$\theta[u_n]$ 在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 中有界，且 $\{u_n\}\in M_\sigma$。记对任意的 $n\ge 1$，由引理 2.4，则 $0<4G(u_n)\le g(u_n)u_n$。因此

$$\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)u_n\mathrm{d}x\ge\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x+4\int_{\mathbb{R}^2}G(u_n)\mathrm{d}x=4\sigma>0 \tag{29}$$

由(27)~(29)可得，$\{\beta_n\}$是收敛的，并且

$$0<\beta=\lim_{n\to\infty}\beta_n\leq\frac{d}{4\sigma}.$$

因为$\{u_n\}$在E中有界，我们可以假设在E中，u_n弱收敛于u，由引理2.2得，在$H^1(\mathbb{R}^2)$中$\theta[u_n]\to\theta[u]$。若$u=0$，那么我们有$\sigma<\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}G(u_n)\mathrm{d}x=0$，这与$\sigma>0$矛盾。因此$u\neq0$。在(26)中，设$v=u_n-u$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u_n\nabla(u_n-u)+V(x)u_n(u_n-u)\right)\mathrm{d}x-\beta_n\left(\int_{\mathbb{R}^2}u_n\theta[u_n](u_n-u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\right)\to0 \quad (30)$$

利用在$L^p(\mathbb{R}^2)(p\geq2)$中，$u_n$强收敛于$u$，和定理1.2证明类似，由(30)可得，在$E$中，$u_n\to u$。

下面，我们证明$\overline{\gamma}_0(M_\sigma)=\infty$。考虑序列$\{H_m\}\subset E$，其中$H_m$是$E$的子空间，并且维数等于$m$。设$K_m=H_m\cap M_\sigma$。我们断言$K_m$是有界的。否则，存在序列$\{u_n\}\subset K_m$，使得$\|u_n\|_E\to\infty$。现在考虑序列$\{w_n\}=\dfrac{u_n}{\|u_n\|_E}$，因为$\|w_n\|_E=1(n\geq1)$，通过取子列，仍记为$\{w_n\}$，使得在$E$中，$w_n$弱收敛于$w$。

由引理2.2可得$\int_{\mathbb{R}^2}w_n^2\theta[w_n]\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}w^2\theta[w]\mathrm{d}x$，注意到$0<\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2\theta[u_n]\mathrm{d}x<\sigma$，在该方程的等号两边同时除以$\|u_n\|_E^4$，并且令$n\to\infty$，就有$\int_{\mathbb{R}^2}w^2\theta[w]\mathrm{d}x=0$。

因此，在$\mathbb{R}^2$上有$w=0$，并且K_m是有限维的，w_n弱收敛于w与w_n强收敛于w等价，即与$\|w\|_E=1$矛盾。因此，K_m有界。

设S^{m-1}是H_m中的单位群。定义映射$\eta:S^{m-1}\to K_m$，$\eta(u)=\lambda^*(u)u$，其中$\lambda^*(u)u$是直线$\{\lambda u\mid\lambda>0\}$与$M_\sigma$相交的唯一相交的点。因为$M_\sigma$是维数为1的非空流形，$\eta$在$S^{m-1}$上有定义。因此，$\eta$是奇连续映射。由[15]的命题 5.2，我们有$\overline{\gamma}_0(S^{m-1})=m$。因此可得$\overline{\gamma}_0(K_m)\geq m$。由$K_m=H_m\cap M_\sigma\subset M_\sigma$，可得$\overline{\gamma}_0(M_\sigma)\geq\overline{\gamma}_0(K_m)\geq m$。因为$m$是任意的，我们有$\overline{\gamma}_0(M_\sigma)=\infty$。

因此，由引理 5.2，$J_1|_{M_\sigma}$在M_σ上有无穷多个临界点。利用拉格朗日乘子定理，设序列$\{u_n\}\subset M_\sigma$，使得$J_1(u_n)$是有界的，$\{\gamma_n\}\subset\mathbb{R}^+$，使得对任意的$v\in E$，都有：

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u_n\nabla v+V(x)u_nv\right)\mathrm{d}x-\gamma_n\left(\int_{\mathbb{R}^2}u_n\theta[u_n]v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}g(u_n)v\mathrm{d}x\right)=0,$$

定理1.3得证。

6. 结论

本文研究了一类液晶系统基态解以及无穷多解的存在性，通过对$V(x)$和$g(u)$做出一些适当的假设，证明了能量泛函在Nehari流形上存在一个极小化序列，从而证明基态解的存在性。最后又利用山路定理和亏格理论证明了非平凡解以及无穷多解的存在性。在证明非平凡解的存在性时，对于$g(u)$的假设可保证$c=c_0$。上述的这些结论推广和完善了文[6]和文[7]中的研究成果。

基金项目

山西省自然科学基金面上项目(201901D111085)。

参考文献

[1] Conti, C., Peccianti, M. and Assanto, G. (2003) Route to Nonlocality and Observation of Accessible Solitons. *Physical Review Letters*, **91**, Article ID: 073901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.073901

[2] Strinic, A., Jovic, D. and Petrovic, M. (2008) Spatiotemporal Instabilities of Counterpropagating Beams in Nematic Liquid Crystals. *Optical Materials*, **30**, 1213-1216. https://doi.org/10.1016/j.optmat.2007.05.053

[3] Aleksic, N., Petrovic, M., Strinic, A. and Belic, M. (2012) Solitons in Highly Nonlocal Nematic Liquid Crystal: Variational Approach. *Physical Review A*, **85**, Article ID: 033826.

[4] Panayotaros, P. and Marchant, T.R. (2014) Solitary Waves in Nematic Liquid Crystals. *Physical D*: *Nonlinear Phenomena*, **268**, 106-117. https://doi.org/10.1016/j.physd.2013.10.011

[5] Hu, W., Zhang, T. and Guo, Q. (2006) Nonlocality Controlled Interaction of Spatial Solitons in Nematic Liquid Crystals. *Applied Physics Letters*, **89**, Article ID: 071111. https://doi.org/10.1063/1.2337268

[6] Zhang, G.Q. and Ding, Z.H. (2015) Existence of Solitary Waves in Nonlocal Nematic Liquid Crystals. *Nonlinear Analysis*, **22**, 107-114. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.006

[7] Claudianor, O. and Giovany, M. (2019) Existence of Positive Solution for a Planar Schrödinger-Poisson System with Exponential Growth. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, Article ID: 011503. https://doi.org/10.1063/1.5039627

[8] Chen, S. and Tang, X. (2020) On the Planar Schrödinger-Poisson System with the Axially Symmetric Potential. *Journal of Differential Equations*, **268**, 945-976. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.08.036

[9] Chen, S. and Tang, X. (2020) Axially Symmetric Solutions for the Planar Schrödinger-Poisson System with Critical Exponential Growth. *Journal of Differential Equations*, **269**, 9144-9174. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.043

[10] Ambrosetti, A., Chang, K. and Ekeland, I. (1998) Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. *Proceedings of the Second School*, Trieste, 21 April-9 May 1997, 296. https://doi.org/10.1142/9789814528535

[11] Do, Ó.J.M. (1997) N-Laplacian Equations in R^N with Critical Growth. *Abstract and Applied Analysis*, **2**, 301-315. https://doi.org/10.1155/S1085337597000419

[12] Cingolani, S. and Weth, T. (2016) On the Planar Schrödinger-Poisson System. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, *Analyse non Linéaire*, **33**, 169-197. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2014.09.008

[13] Willem, M. (1997) Minimax Theorems. Springer Science & Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[14] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[15] Struwe, M. (2008) Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[16] Aubin, J.P. (2011) Applied Functional Analysis. John Wiley & Sons, Hoboken.

[17] Royden, H.L. and Fitzpatrick, P. (1988) Real Analysis. Macmillan, New York.