Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 9017-9025
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112951

k树的完美消除序列

王　蕾，杨卫华*

太原理工大学数学学院，山西　太原

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月21日；发布日期：2022年12月29日

摘　要

弦图的完美消除序列可应用于用高斯消去法求解稀疏正定线性方程组的研究，并且弦图的完美消除序列在多个学科均有应用。本文主要研究弦图的子类——k树的完美消除序列，首先证明了k树的完美消除序列可以通过k度点来刻画。其次证明了k树 $T_k(n)$ 的节点按照完美消除序列排序后满足：1) $|MAdj(x_i)| = k(i \le n-k)$；2) $|MAdj(x_i)| = n-i(i > n-k)$。最后证明了$k$树完美消除序列与$k$树构造过程之间以互逆的方式一一对应。此外，本文也将前述证明应用于k树的识别，给出了相应的算法。

关键词

k树，弦图，完美消除序列，k树的识别

Perfect Elimination Orderings of k-Trees

Lei Wang, Weihua Yang*

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 21st, 2022; published: Dec. 29th, 2022

Abstract

The perfect elimination orderings of chordal graphs can be applied to the study of solving sparse positive definite systems of linear equations by Gaussian elimination method, and the perfect elimination orderings of chordal graphs is applied in many disciplines. In this paper, we mainly study the perfect elimination orderings of k-trees, a subclass of chordal graphs. First, we prove that the perfect elimination orderings of k-trees can be characterized by vertices with k degrees. Secondly, it is proved that the vertices of k-trees which are sorted according to the perfect elimination orderings satisfy: 1) $|MAdj(x_i)| = k(i \le n-k)$; 2) $|MAdj(x_i)| = n-i(i > n-k)$. Finally, this

*通讯作者。

文章引用: 王蕾, 杨卫华. k 树的完美消除序列[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 9017-9025.
DOI: 10.12677/aam.2022.1112951

paper proves that the perfect elimination orderings of *k*-trees corresponds to the construction process of *k*-trees in a reciprocal way. In addition, this paper also applies the above proofs to the recognition of *k*-trees and gives the corresponding algorithm.

Keywords

***k*-Trees, Chordal Graphs, Perfect Elimination Orderings, Recognition of *k*-Trees**

1. 引言

弦图自 20 世纪 50 年代产生于稀疏线性系统的研究中，其历史与半定优化的历史有重要关联。Parter S 曾将图的“弦化[1]”与求解线性方程组的高斯消去法对应起来，由图“弦化”的复杂性来估计求解线性方程组的复杂性[1]。弦图的概念被提出来后，许多学者研究发现弦图的应用与变量消除相辅相成，任意图的变量消除过程都可以对应其“弦化”过程。变量消除在许多应用中是一种自然的方法，基于不同形式的变量消除的各种算法可以通过图中节点的删除来描述和分析，这在一定程度上解释了弦图研究的学科多样性。之后 Rose D J 对弦图上的变量消除以及弦图的特殊性质做了一个介绍，给出了弦图完美消除序列的概念，弦图上的完美消除序列可以在不引入填充边的情况下完成变量消除[2]。弦图变量消除的其中一个应用是概率图模型，在概率图模型上，概率计算可以以变量消除的形式出现，而在以弦图为模型的概率计算中，弦图的完美消除序列就是计算代价最小的变量消除推理的消除顺序，这也说明了关于完美消除序列的研究意义[3]。

近年来，大量学者发现以弦图为研究对象时，图论问题会变得更加容易解决，于是，学者们开始在弦图上讨论图论中的组合问题：最大团、最大独立集、k 着色等；同时，基于弦图结构的研究也获得了一些进展，Rouzbahani Malayeri M 已经证明了弦图的二项式边理想的正则性上界[4]，Arvind V 已经证明弦图 GI (graph isomorphism，图同构)问题的复杂性以叶龄为参数[5]；并且，弦图子类在图论问题上的表现也是近年的热点问题，Liu C H 已经给出了罗马支配问题在强弦图上的线性时间算法[6]，Uehara R 已经证明 GI 问题在弦二部图和强弦图上是 GI 完全的[7]；此外，弦图在许多领域都有应用，包括编译器构造和数据库[8]。

k 树是弦图的一个特殊子类，同时 k 树作为树这一概念的扩展，可以作为很多图论问题的模型，而 k 树本身的特殊结构在约束满足问题，组合问题等问题上存在多项式时间算法。目前对于 k 树的研究主要集中于部分 k 树(树宽由 k 限定的图)，Telle J A 已经将部分 k 树上的算法设计应用于顶点划分问题，得到了以树宽为时间复杂性参数的算法[9]。k 树作为有特殊结构的弦图子类，在某些问题上会比弦图发挥更好的性能，后续可以进一步研究。

本文启发于 Rose D J 在文献[2]里提出的“k 树是弦图的一个子类”，于是，“具有特殊结构的弦图子类——k 树的完美消除序列的特殊性质”成为了一个研究方向。本文主要证明了以下结果：

定理 1 任取 k 树 $T_k(n)$，其完美消除序列可通过迭代地删除其中的 k 度点来刻画(即首先删除 $T_k(n)$ 中的一个 k 度点，得到 $T_k(n-1)$，再删去 $T_k(n-1)$ 中的一个 k 度点，得到 $T_k(n-2)$，重复该操作，直至所

[1]“弦化”表示一个无向图通过加边的方式变为弦图的过程。

得图为 k 个节点，最后按任意顺序删除这 k 个节点，该删除顺序就是其完美消除序列)。

定理 2 任取 k 树 $T_k(n)=(X,E)$ 及 $T_k(n)$ 的序列 α，α 标记 X 为 $\{x_i\}_{i=1}^n$，则 α 是 $T_k(n)$ 的完美消除序列，当且仅当 x_i 满足：

1) $i\le n-k$ 时，$|MAdj(x_i)|=k$，即 x_i 与 $\{x_j\}_{j=i}^n$ 里的一个 k 团中的每一个节点均连接；

2) $i>n-k$ 时，$|MAdj(x_i)|=n-i$，即 $\{x_j\}_{j=i}^n$ 是团。

定理 2 给出了 k 树完美消除序列的特点，k 树 $T_k(n)$ 的节点按照完美消除序列排序后满足 1) $|MAdj(x_i)|=k(i\le n-k)$；2) $|MAdj(x_i)|=n-i(i>n-k)$，由此可知 k 树的所有完美消除序列都满足定理 1 中的 k 度点的删除顺序，换而言之，通过定理 1 节点删除的方式可以找到 k 树的所有完美消除序列。

定理 3 k 树 $T_k(n)$ 的完美消除序列集合与构造过程集合之间存在双射，且两个集合的元素之间以互为逆序的方式一一对应。

定理 3 给出了 k 树的完美消除序列与构造过程之间的关系。根据定理 3 的结论，可以从完美消除序列的角度去分析 k 树的构造过程，可以通过刻画 k 树的完美消除序列来刻画 k 树的构造过程，也可以通过计算 k 树完美消除序列的个数来计算 k 树构造过程的个数。

2. 基础知识

本文用 $G=(X,E)$ 来表示一个无向图，其中，X 是一个非空有限的节点集合，E 是 X 中成对节点的集合，E 中节点对 (x,y) 由无向边 $x-y$ 连接(本文基于无向图进行讨论，后续简称无向图为图)。在图 $G=(X,E)$ 中，任取一个含于 X 的非空节点集合 C，如果 C 里任意两个节点都在 G 中连接，则称 C 为一个团(后续简称 k 个节点构成的团为 k 团)，如果 X 里任意两个节点都在 G 中连接，则称 G 为完全图。

一个双射 $\alpha:\{1,2,\cdots,n\}\leftrightarrow X\,(|X|=n)$ 被叫做图 G 的序列，令 α^{-1} 是 α 的逆映射，$\alpha^{-1}(x)$ 定义为节点 x 对应的序列号。可以根据序列 α 标记点集 X，并且得到点集 X 的一个表示: $X=\{x_i\}_{i=1}^n$。在图 $G=(X,E)$ 中，如果对每一个 $i=1,2,\cdots,k-1$，都有 x_i-x_{i+1}，即 $(x_i,x_{i+1})\in E$，则 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 称为 G 的一条路径。在图 $G=(X,E)$ 中，如果节点 x_i 与节点 x_j 可以通过一条路径连接，则称 x_i 与 x_j 连通，如果点集 X 里任意两个节点都连通，则称图 G 为连通图(本文基于连通图进行讨论)，如果路径 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 满足 $x_1=x_k$，则 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 称为图 G 的一个环，且环长为 $k-1$，以下基于环长给出弦图的定义。

定义 1 [3]令 $x_1-x_2-\cdots-x_k-x_1$ 是图 $G=(X,E)$ 中的一个环，环中的一条弦是连接两个不连贯节点 x_i 与 x_j 的一条边，对 $k\ge 4$，如果任意环 $x_1-x_2-\cdots-x_k-x_1$ 有一条弦，那么图 G 称为弦图。

对于图 $G=(X,E)$ 和子集 $A\subseteq X$，有导出子图 $G(A)=(A,E(A))$，其中 $E(A)=\{(x,y)\in E\,|\,x,y\in A\}$。对于图 $G=(X,E)$ 以及节点 $x\in X$，用 $[G]_x=G(X-\{x\})$ 表示图 G 删除节点 x 及其连接边所得到的图。图 $G=(X,E)$ 的一个割 S 是使得导出子图 $G(X-S)$ 有两个及以上连通分支的 X 的子集，且连通分支可以表示为 $G_i=(X_i,E_i)$，导出子图 $G(S\cup X_i)$ 就是图 G 相对于割 S 的叶。图 G 的一个 a,b 割是使得节点 a 与节点 b 分别在不同分支的割，图 G 的一个极小割是不存在真子集是割的一个割。关于割，Rose D J。已证明以下结果：

定理 4 [2]一个图 $G=(X,E)$，G 带有割团 S 和叶 L_i，若 S_0 是 L_i 的割，则 S_0 也是图 G 的割，若 S_0 是 L_i 的一个极小 a,b 割，则 S_0 也是图 G 的一个极小 a,b 割。

本文用 $Adj(x_i)$ 表示节点 x_i 在图 G 中相邻节点(简称邻节点)的集合，用 $d(x_i)=|Adj(x_i)|$ 表示节点 x_i 在图 G 中邻节点的个数，并称其为度。用 $MAdj(x_i)=Adj(x_i)\cap\{x_j\}_{j=i+1}^n$ 表示节点 x_i 在图 G 中的单调相邻节点(简称单调邻节点)的集合。在图 $G=(X,E)$ 中，对任意节点 $x\in X$，其邻节点集合 $Adj(x)$ 里不相邻的成对节点的集合，表示为 $D(x)=\{\{y,z\}\,|\,y,z\in Adj(x),y\notin Adj(z)\}$，并称为亏数，而满足 $D(x)=\varnothing$ 的节点 x 被称为单纯点。相应的，其单调邻节点集合 $MAdj(x)$ 里不相邻的成对节点的集合，表示为

$MD(x)=\{\{y,z\}|y,z\in MAdj(x),y\notin Adj(z)\}$，并称为单调亏数。

定义 2 [2]取图$G=(X,E)$的一个序列α，α标记点集X为$\{x_i\}_{i=1}^n$，如果满足对任意节点$x_i\in X$，都有$MD(x_i)=\varnothing$，则称序列α是图G的一个完美消除序列。

定理 5 [2]一个图$G=(X,E)$是弦图当且仅当图G存在序列α，使得α是G的完美消除序列。

下面给出本文的中心——k树的定义。

定义 3 [10] k树的定义如下：

1) k个节点的k树是k个节点的完全图；

2) 给定任意n个节点的k树$T_k(n)$，可以通过连接第$n+1$个节点与$T_k(n)$中某个k团的所有节点，得到$n+1$个节点的k树$T_k(n+1)$。

(由k树的递归定义可知，每一个k树都有一个k团作为初始状态，该k团被称为k树的初始团。)

定理 6 [10]一个图$G=(X,E)$是一个k树当且仅当

1) 图G是连通图；

2) 图G有一个k团但没有$k+2$团；

3) 图G的每一个极小a,b割都是一个k团。

3. 定理 1 和定理 2 的证明

为了讨论k树的完美消除序列，本文先证明了关于k树和完美消除序列的几个引理。引理 2 的证明过程对k树的结构有一个初步的分析。引理 3 进一步分析了完美消除序列在k树上的特点。

引理 1 一个完全图的任意序列都是其完美消除序列。

证 任取完全图$G=(X,E)$，其中$|X|=n$，任取X的序列α，由α标记X为$\{x_i\}_{i=1}^n$，易知$MAdj(x_i)=\{x_j\}_{j=i+1}^n$，于是$MAdj(x_i)$是个团，从而$MD(x_i)=\varnothing$，故$\alpha$是完全图$G$的完美消除序列。由$\alpha$的任意性，引理得证。

引理 2 k树是弦图。

证 任取n个节点的k树$T_k(n)=(X,E)$，令$T_k(k),T_k(k+1),\cdots,T_k(n)$表示$T_k(n)$的构造过程，由$T_k(n)$的构造过程标记$X$为$\{x_i\}_{i=1}^n$，其中$T_k(k)=\{x_i\}_{i=1}^k$是$k$树的初始团，$x_i(i>k)$代表构造$T_k(i)$时在$T_k(i-1)$上添加的节点，令$V_i(i>k)$表示节点$x_i$连接的$T_k(i-1)$中的$k$团，且$y_i=x_{n+1-i}(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$MAdj(y_i)=Adj(y_i)\cap\{y_j\}_{j=i+1}^n=Adj(x_{n+1-i})\cap\{x_j\}_{j=1}^{n-i}=\begin{cases}\{x_j\}_{j=1}^{n-i}(n+1-i\le k)\\ V_{n+1-i}(n+1-i>k)\end{cases}.$$

易知$MAdj(y_i)$是团，从而$MD(y_i)=\varnothing$，由定义 2 可知$\{y_i\}_{i=1}^n$对应的序列就是k树$T_k(n)$的完美消除序列，由定理 5 可知k树是弦图。

引理 3 在节点个数大于k的k树中，一个节点是单纯点当且仅当它的度为k。

证 任取k树$T_k(n)(n>k)$，当$n=k+1$时，易知$T_k(k+1)$是个完全图，其节点均为k度，同时均为单纯点，命题成立。下面对$n>k+1$时的情况进行证明。

设k树$T_k(n)=(X,E)$，由$T_k(n)$的构造过程标记X为$\{x_i\}_{i=1}^n$，其中$\{x_i\}_{i=1}^k$是k树的初始团，由构造过程可知$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$也是个团。令$V_i(k+2\le i\le n)$表示引入x_i时，与x_i相连接的k团。下面将X分为$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$和$\{x_i\}_{i=k+2}^n$分别进行讨论。在$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$里，已知$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$是个团，由$T_k(n)$的构造过程可知，设节点x_p是$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$里的k度点，则x_p一定不含于后续连接团，即$x_p\notin\bigcup_{i=k+2}^n V_i$ (因为$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$是个团，x_p至少有k个邻节点，若x_p含于后续连接团，则其度一定大于k)，于是有$Adj(x_p)=\{x_i\}_{i=1}^{k+1}-\{x_p\}$，易知$Adj(x_p)$是个团，从而

$D(x_p)=\varnothing$。在$\{x_i\}_{i=k+2}^{n}$里，$\{x_i\}_{i=k+2}^{n}$里的节点在引入时就已经连接了一个k团，设节点x_q是$\{x_i\}_{i=k+2}^{n}$里度为k的节点，则x_q一定不含于后续连接团，即$x_q\notin\bigcup_{i=q+1}^{n}V_i$，于是有$Adj(x_q)=V_q$，而$V_q$是引入$x_q$时，$x_q$所连接的$k$团，于是$D(x_q)=\varnothing$。综上，$T_k(n)$中的$k$度点$x$均满足$D(x)=\varnothing$，均为单纯点。

反之，由$T_k(n)$的构造过程易知$T_k(n)$的任意节点x均满足$d(x)\ge k$ (因为$T_k(n)$的节点集合由构造过程排序后，前$k+1$个节点本身构成了一个$k+1$团，它们的度至少为k，后$n-k-1$个节点，在引入的时候就已经与一个k团相连接，它们的度也至少为k)。假设存在度大于k的单纯点y，那么$\{y\}\cup Adj(y)$是个团，且$|\{y\}\cup Adj(y)|>k+1$，这与定理 6 中k树没有$k+2$团的性质相矛盾，所以$T_k(n)$中单纯点的度均为k。

综上，引理得证。

引理 4 任意节点个数大于k的k树去掉一个k度点还是k树。

证 任取k树$T_k(n)(n>k)$。当$n=k+1$时，易知$T_k(k+1)$是个完全图，其节点的度均为k，$T_k(k+1)$去掉一个k度点后，变为k个节点的完全图，依旧是k树，命题成立。当$n>k+1$时，设k树$T_k(n)=(X,E)$，由$T_k(n)$的构造过程标记X为$\{x_i\}_{i=1}^{n}$，其中$\{x_i\}_{i=1}^{k}$是k树的初始团，由构造过程可知$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$也是个团。令$V_i(k+2\le i\le n)$表示引入x_i时，与x_i相连接的k团。这里任取$T_k(n)$中的k度点x，由引理 3 可知$D(x)=\varnothing$，$Adj(x)$是一个k团。令$G=[T_k(n)]_x$，下面证明图G有以下三个性质：

1) 假设G不连通，则易知G的不连通是由于节点x的删除导致的，所以$Adj(x)$里至少有两个节点不连通。而$Adj(x)$是一个k团，里面的节点两两相连，与假设矛盾，所以图G是连通图；

2) 由引理 3 可知$\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$里的k度点不出现在后续连接团里，而$V_{k+2}\subset\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$，所以连接团$V_{k+2}$里没有$k$度点，即$x\notin V_{k+2}$，从而$G$有$k$大小的团$V_{k+2}$，图$G$是$k$树$T_k(n)$删除节点$x$得到的，而$T_k(n)$作为$k$树不包含$k+2$大小的团，故$G$没有$k+2$大小的团；

3) 由割和叶的定义可知，G是相对于割团$Adj(x)$的叶，由定理 4 可知G中任意一个极小a,b割也是$T_k(n)$中的极小a,b割，而$T_k(n)$是k树，由定理 6 可知，$T_k(n)$中的极小a,b割均为k团，从而G中的极小a,b割也均为k团。

于是，由定理 6 可知图G是k树。

综上，引理得证。

定理 1 的证明 任取k树$T_k(n)=(X,E)$。当$n=k$时，$T_k(n)=T_k(k)$是k个节点的k树，此时$T_k(k)$是一个完全图，由引理 1 可知，$T_k(k)$里节点的任意序列都是其完美消除序列，命题成立。

当$n=k+1$时，$T_k(n)=T_k(k+1)$是$k+1$个节点的k树，由k树的构造过程可知，此时$T_k(k+1)$的节点集合X是一个$k+1$团，且每个节点的度均为k，任选一个k度点删除，得到一个k团，可以按任意顺序删除这k个节点。这$k+1$个节点的删除顺序就是其完美消除序列，命题成立。

假设$n=l(l\ge k+2)$时，命题成立。则当$n=l+1$时，$T_k(n)=T_k(l+1)$，$|X|=l+1$，任取$T_k(l+1)$里的k度点x，由引理 3 可知$D(x)=\varnothing$，由引理 4 可知$[T_k(l+1)]_x$是l个节点的k树，于是由假设可知，$[T_k(l+1)]_x$可以通过迭代地删除k度点，直至剩余k个节点，最后按任意顺序删除这k个节点的方式标记$X-\{x\}$为$\{y_i\}_{i=1}^{l}$，且$\{y_i\}_{i=1}^{l}$对应的序列就是$[T_k(l+1)]_x$的完美消除序列，满足$MD(y_i)=\varnothing$。这里标记$x=x_1$，标记$y_i=x_{i+1}(1\le i\le l)$，则$X=\{x_i\}_{i=1}^{l+1}$，且有 1) $MD(x_i)=MD(x)=D(x)=\varnothing(i=1)$；2) $MD(x_i)=MD(y_{i-1})=\varnothing(2\le i\le l+1)$。由定义 2，$\{x_i\}_{i=1}^{l+1}$所对应的序列就可以作为$T_k(l+1)$的完美消除序列。由$k$度点$x$选择的任意性和$\{y_i\}_{i=1}^{l}$序列的构造过程，命题成立。

综上，定理得证。

定理 2 的证明 首先，设x_i满足 1) 2)，则按照序列α对$T_k(n)$的节点进行删除时，因为前$n-k$个节

点满足 $\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=k$，所以每个节点都是作为 k 度点被删除的，满足定理 1 中 k 度点的删除方式，后 k 个节点的删除也满足定理 1 中任意顺序的删除方式，于是由定理 1 可知 α 是 $T_k\left(n\right)$ 的完美消除序列。

反之，设 α 是 $T_k\left(n\right)$ 的完美消除序列，当 $n=k$ 时，$n-k=0$，$T_k\left(n\right)=T_k\left(k\right)$ 是完全图，$\left\{x_i\right\}_{i=1}^{k}$ 是一个团，对任意 x_i 有 $MAdj\left(x_i\right)=\left\{x_j\right\}_{j=i+1}^{k}$，即 $i>0$ 时，$\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=k-i$，命题成立。

当 $n=k+1$ 时，$n-k=1$，$T_k\left(n\right)=T_k\left(k+1\right)$，由 k 树的递归构造可知，$T_k\left(k+1\right)$ 是完全图，$\left\{x_i\right\}_{i=1}^{k+1}$ 是一个团，对任意 x_i 有 $MAdj\left(x_i\right)=\left\{x_j\right\}_{j=i+1}^{k+1}$，则有：a) $\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=k+1-i=k+1-1=k\left(i=1\right)$；b) $\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=k+1-i\left(i>1\right)$。命题成立。

假设 $n=l\left(l\ge k+2\right)$ 时命题成立。当 $n=l+1$ 时，$n-k=l+1-k$，$T_k\left(n\right)=T_k\left(l+1\right)$，$\alpha$ 标记 X 为 $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{l+1}$，则 $D\left(x_1\right)=MD\left(x_1\right)=\varnothing$，$x_1$ 是单纯点，由引理 3 可知，x_1 是 k 度点。令 $G=\left[T_k\left(l+1\right)\right]_{x_1}$，则 $X-\left\{x_1\right\}$ 是图 G 的节点集合，且由引理 4 及 x_1 是 k 度点可知 G 是 k 树，令 $y_i=x_{i+1}\left(i=1,2,\cdots,l\right)$，标记 $X-\left\{x_1\right\}$ 为 $\left\{y_i\right\}_{i=1}^{l}$，则 $MD\left(y_i\right)=MD\left(x_{i+1}\right)=\varnothing$，故 $\left\{y_i\right\}_{i=1}^{l}$ 对应的序列是 G 的完美消除序列，而 G 的节点个数为 l，则由假设有：(a) $\left|MAdj\left(y_i\right)\right|=k\left(i\le l-k\right)$；(b) $\left|MAdj\left(y_i\right)\right|=l-i\left(i>l-k\right)$。对于 $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{l+1}$ 来讲，$i\le l+1-k$ 时，$i-1\le l-k$，有

$$\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=\begin{Bmatrix}\left|MAdj\left(y_{i-1}\right)\right|=k\left(i\ge 2\right)\\ \left|MAdj\left(x_1\right)\right|=\left|Adj\left(x_1\right)\right|=k\left(i=1\right)\end{Bmatrix}=k.$$

$i>l+1-k$ 时，$i-1>l-k$，有

$$\left|MAdj\left(x_i\right)\right|=\left|MAdj\left(y_{i-1}\right)\right|=l-\left(i-1\right)=l+1-i.$$

命题成立。

综上，定理得证。

4. 定理 3 的证明

一般来说，k 树的构造是从 k 个节点的完全图开始的，本文为了使 k 树的完美消除序列与构造过程之间的关系有一个更清晰的表达，定义 k 树的构造从第一个节点开始，下面给出 k 树构造过程的定义。

定义 4 对于 k 树 $T_k\left(n\right)=\left(X,E\right)$，取 $\beta:\left\{1,2,\cdots,n\right\}\leftrightarrow X$ 是一个双射，且根据 β 标记 X 为 $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$，通过以下递归步骤：

1) $i\le k$ 时，分别连接 x_i 与 $x_j\left(j<i\right)$，使 $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{i}$ 成为一个团；

2) $i>k$ 时，找 $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{i-1}$ 中的一个 k 团 V_i，使 x_i 与 V_i 中的每一个节点连接。

得到图 G，若 $G=T_k\left(n\right)$，则称 β 是 $T_k\left(n\right)$ 的一个构造过程。

(注意，这里的递归步骤也可以看作是 $T_k\left(n\right)$ 边集的一个表达)

定理 3 的证明 令 A 是 $T_k\left(n\right)$ 的所有完美消除序列的集合，$\forall\alpha\in A$ 是 $T_k\left(n\right)$ 的一个完美消除序列 ($\alpha:\left\{1,2,\cdots,n\right\}\leftrightarrow X$ 是一个双射)。令 B 是 $T_k\left(n\right)$ 的所有构造过程的集合，$\forall\beta\in B$ 是 $T_k\left(n\right)$ 的一个构造过程。令 ψ 是 A 到 B 的一个映射，满足对 $\forall i\in\left\{1,2,\cdots,n\right\}$，$\forall\alpha\in A$，有 $\psi\left(\alpha\right)\left(i\right)=\alpha\left(n+1-i\right)$，即如果将 α 看作对 X 的排序，则 $\psi\left(\alpha\right)$ 是相对于 α 的对 X 的一个逆排序。下面证明 ψ 是一个双射。

$\forall\alpha\in A$，α 标记 X 为 $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$，令 $\beta=\psi\left(\alpha\right)$，$\beta$ 标记 X 为 $\left\{y_i\right\}_{i=1}^{n}$，由 ψ 的定义可知 $y_i=x_{n+1-i}\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，由 α 是 $T_k\left(n\right)$ 的完美消除序列可知：(1) $i\le n-k$ 时，x_i 与 $\left\{x_j\right\}_{j=i+1}^{n}$ 中的一个 k

团的每一个节点均连接；(2) $i > n-k$ 时，$\{x_j\}_{j=i}^{n}$ 是团。相应地，β 作为 α 的逆序序列，满足：1) $n+1-i \ge k+1$ 时，y_{n+1-i} 与 $\{y_j\}_{j=1}^{n-i}$ 中的一个 k 团的每一个节点均连接(即 $p \ge k+1(p>k)$ 时，y_p 与 $\{y_j\}_{j=1}^{p-1}$ 中的一个 k 团的每一个节点均连接)；2) $n+1-i < k+1$ 时，$\{y_j\}_{j=1}^{n+1-i}$ 是团(即 $p < k+1(p \le k)$ 时，$\{y_j\}_{j=1}^{p}$ 是团)。由定义 4 可知 β 是 $T_k(n)$ 的一个构造过程，从而有 $\beta = \psi(\alpha) \in B$。

$\forall \beta \in B$，β 标记 X 为 $\{y_i\}_{i=1}^{n}$，令 $\alpha:\{1,2,\cdots,n\} \leftrightarrow X$ 标记 X 为 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$，使得 X 满足 $x_i = y_{n+1-i}(i=1,2,\cdots,n)$，由 α 的定义可知 α 与 β 互为逆序序列。由 β 是 $T_k(n)$ 的构造过程可知：1) $i \le k$ 时，y_i 与 $y_j(j<i)$ 相连接，$\{y_j\}_{j=1}^{i}$ 是团；2) $i > k$ 时，y_i 与 $\{y_j\}_{j=1}^{i-1}$ 中的一个 k 团的每一个节点均连接。相应地，α 作为 β 的逆序序列满足：1) $n+1-i \ge n+1-k$ 时，x_{n+1-i} 与 $x_j(j>n+1-i)$ 相连接，$\{x_j\}_{j=n+1-i}^{n}$ 是团(即 $p \ge n+1-k(p>n-k)$ 时，x_p 与 $x_j(j>p)$ 相连接，$\{x_j\}_{j=p}^{n}$ 是团)；2) $n+1-i < n+1-k$ 时，x_{n+1-i} 与 $\{x_j\}_{j=n+1-i+1}^{n}$ 中的一个 k 团的每一个节点均连接(即 $p < n+1-k$ $(p \le n-k)$ 时，x_p 与 $\{x_j\}_{j=p+1}^{n}$ 中的一个 k 团的每一个节点均连接)。由定理 2 可知，α 是 $T_k(n)$ 的一个完美消除序列，从而，$\forall \beta \in B$，$\exists \alpha \in A$ 使得 $\psi(\alpha) = \beta$。

由 ψ 的定义，ψ 将一个序列映射为它的逆序序列，所以对 $\forall \alpha_1 \ne \alpha_2$，有 $\psi(\alpha_1) \ne \psi(\alpha_2)$。

综上，定理得证。

5. *k* 树识别算法

k 树识别算法是在弦图识别算法的基础上实现的，先介绍一个弦图识别的算法——MCS (max cardinality search，最大基数搜索)算法[11]。该算法是弦图识别常用的算法之一(通过最大基数搜索的方式构造序列，并检查该序列是否为一个完美消除序列来判断输入图是否为弦图)。算法如下(算法 1)所示：

Algorithm 1. Max-cardinality-search algorithm
算法 1. MCS 算法

Procedure Max-Cardinality-Search(

G//*X* 上的一个无向图

)

1 把 X 中的所有节点初始化为无标记的节点

2 对 $i = n, n-1, \cdots, 1$

3 对具有最大数目的标记近邻的无标记变量 x，令 $\alpha(i) = x$

4 由 α 标记 X 为 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

5 对 $i = 1,2,\cdots,n$，令 V_i 为 X 中 x_i 的所有单调邻节点的集合

6 如果每一个 V_i 均为团，则确认图 G 为弦图

7 返回 α；True

根据 k 树完美消除序列和构造过程之间一一对应的关系，并且结合 k 树完美消除序列有关 k 度点的独特性，给出一个 k 树的识别算法——先将输入图识别为弦图后，根据其完美消除序列标记其点集，检查是否满足定理 2 中的结果来确认输入图是否为 k 树(算法 2)。

Algorithm 2. k-trees' recognition algorithm
算法 2. k 树的识别算法

Procedure K-trees' Recognition(

G//X 上的一个无向图

)

1 由 MCS 算法识别 G 的弦性并得到其完美消除序列 $\alpha:\{1,2,\cdots,n\}\leftrightarrow X$

2 由 α 标记 X 为 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

3 对于每个节点 $x_i(1\le i\le n)$，计算 $|MAdj(x_i)|$

4 令 $k=|MAdj(x_1)|$

5 若满足 $\begin{cases}|MAdj(x_i)|=k(i\le n-k)\\|MAdj(x_i)|=n-i(i>n-k)\end{cases}$，则确认输入图为 k 树

6 返回 True

6. 结语

本文从 k 树的递归构造方式入手，证明了作为弦图子类的 k 树，其完美消除序列具有独特性，可以通过 k 度点的迭代删除来刻画，k 度点的识别相对于单纯点的识别也更加便利。同时，在 k 树完美消除序列的研究过程中，进一步发现其与 k 树构造过程之间的关系，k 树的每一个完美消除序列都与它的一个构造过程以互为逆序序列的方式一一对应。最后，本文也将 k 树完美消除序列的独特性应用于 k 树的识别中，给出了一个 k 树的识别算法。此外，k 树作为有特殊结构的弦图子类，在以弦图为模型的各类问题上会展现更好的性能，后续可以进一步研究。

参考文献

[1] Parter, S. (1961) The Use of Linear Graphs in Gauss Elimination. *SIAM Review*, **3**, 119-130. https://doi.org/10.1137/1003021

[2] Rose, D.J. (1970) Triangulated Graphs and the Elimination Process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **32**, 597-609. https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90282-9

[3] Koller, D. and Friedman, N. (2009) Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques. MIT Press, Cambrigde.

[4] Rouzbahani, M.M., Saeedi, M.S. and Kiani, D. (2021) Regularity of Binomial Edge Ideals of Chordal Graphs. *Collectanea Mathematica*, **72**, 411-422. https://doi.org/10.1007/s13348-020-00293-3

[5] Arvind, V., Nedela, R., Ponomarenko, I., *et al*. (2022) Testing Isomorphism of Chordal Graphs of Bounded Leafage Is Fixed-Parameter Tractable. In: Bekos, M.A. and Kaufmann, M., Eds., *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Springer, Cham, 29-42. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15914-5_3

[6] Liu, C.H. and Chang, G.J. (2013) Roman Domination on Strongly Chordal Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **26**, 608-619. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9482-y

[7] Uehara, R., Toda, S. and Nagoya, T. (2005) Graph Isomorphism Completeness for Chordal Bipartite Graphs and Strongly Chordal Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **145**, 479-482. https://doi.org/10.1016/j.dam.2004.06.008

[8] Munro, J.I. and Wu, K. (2018) Succinct Data Structures for Chordal Graphs. In: Hsu, W.-L., Lee, D.-T. and Liao, C.-S., Eds., 29*th International Symposium on Algorithms and Computation* (*ISAAC* 2018), Dagstuhl Publishing, Wadern, Article No. 67.

[9] Telle, J.A. and Proskurowski, A. (1997) Algorithms for Vertex Partitioning Problems on Partial k-Trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **10**, 529-550. https://doi.org/10.1137/S0895480194275825

[10] Rose, D.J. (1974) On Simple Characterizations of k-Trees. *Discrete Mathematics*, **7**, 317-322. https://doi.org/10.1016/0012-365X(74)90042-9

[11] Berry, A., Blair, J.R.S. and Heggernes, P. (2002) Maximum Cardinality Search for Computing Minimal Triangulations. In: Goos, G., *et al*., Eds., *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Springer, Berlin, 1-12. https://doi.org/10.1007/3-540-36379-3_1