Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 8811-8819
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112928

Hans汉斯

广义四元数代数的Jordan中心化子和Lie中心化子

麻艾群[1]**，陈　琳**[2*]

[1]贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳
[2]常熟理工学院数学与统计学院，江苏 常熟

收稿日期：2022年11月21日；录用日期：2022年12月15日；发布日期：2022年12月23日

摘　要

本文研究了实数域上广义四元数代数的Jordan中心化子和Lie中心化子，在特定条件下，证明了广义四元数代数上的每个Jordan中心化子是中心化子，同时得到了广义四元数代数的中心化子和Jordan中心化子以及Lie中心化子的矩阵表示，并且分别给出了广义四元数代数的可加映射是中心化子和Lie中心化子的等价条件。

关键词

广义四元数代数，**Jordan**中心化子，**Lie**中心化子

Jordan Centralizers and Lie Centralizers on Generalized Quaternion Algebras

Aiqun Ma[1]**, Lin Chen**[2*]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
[2]Department of Mathematics and Statistics, Changshu Institute of Technology, Changshu Jiangsu

Received: Nov. 21st, 2022; accepted: Dec. 15th, 2022; published: Dec. 23rd, 2022

Abstract

In this paper, we consider Jordan centralizers and Lie centralizers on generalized quaternion algebras over the field of real numbers. Under certain conditions, we prove that every Jordan centralizer on generalized quaternion algebras is a centralizer. At the same time, we obtain the ma-

*通讯作者。

文章引用: 麻艾群, 陈琳. 广义四元数代数的 Jordan 中心化子和 Lie 中心化子[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8811-8819.
DOI: 10.12677/aam.2022.1112928

trix representation of the centralizers and Jordan centralizers and Lie centralizers on generalized quaternion algebras, and give the equivalent conditions that additive mappings on generalized quaternion algebras are centralizers and lie centralizers respectively.

Keywords

Generalized Quaternion Algebras, Jordan Centralizers, Lie Centralizers

1. 引言

设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，对 $\forall x,y\in\mathcal{A}$，分别称 $x\circ y=xy+yx$ 和 $[x,y]=xy-yx$ 为 x,y 的 Jordan 积和 Lie 积。设 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，如果对 $\forall x,y\in\mathcal{A}$，有 $\varphi(xy)=\varphi(x)y=x\varphi(y)$，则称 φ 是 $\mathcal{A}$ 上的中心化子；若有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ y=x\circ\varphi(y)$，则称 φ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Jordan 中心化子；如有 $\varphi([x,y])=[\varphi(x),y]=[x,\varphi(y)]$，则称 φ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Lie 中心化子。

四元数不仅对纯粹数学领域的各主要分支：代数学、分析学和几何学的发展都产生了重要的影响，并且在其他自然学科如物理学、计算机科学和工程技术、量子力学和量子场论中有着广泛的应用[1] [2] [3] [4]。Jafari 和 Yayli [5]研究了广义四元数的一些基本性质，并证明了所有单位广义四元数是一个三维 Lie 群。Kizil 等学者[6]研究了广义四元数代数在实数域上的导数。中心化子不仅具有重要的理论意义，而且具有重要的应用价值，许多学者已经对环和代数上的中心化子进行了深入的研究。例如，Zalar [7]研究了素环和半素环上的中心化子和 Jordan 中心化子，证明了特征不为 2 的半素环上的 Jordan 中心化子是中心化子。Fošner 等学者[8]引进了 Lie 中心化子的定义，并对三角代数和套代数上的 Lie 中心化子进行刻画。Jabeen [9]主要研究了广义矩阵代数上的 Jordan 中心化子和 Lie 中心化子。

本文将分为四个部分研究实数域上广义四元数代数的 Jordan 和 Lie 中心化子：在第一部分，主要介绍广义四元数的定义与它的一些基本性质；在第二部分，研究实数域上广义四元数代数的 Jordan 中心化子，在特定条件下，证明了广义四元数代数上的每个 Jordan 中心化子是中心化子，并得到了广义四元数代数的中心化子和 Jordan 中心化子的矩阵表示；在第四部分，研究实数域上的广义四元数代数的 Lie 中心化子，并得到了广义四元数代数的 Lie 中心化子的矩阵表示。

2. 四元数代数

域 F 上的代数 $\mathcal{A}$ 是指在 F 上的向量空间具有双射 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，在本文中仅考虑 $F=R$ 和 $\mathcal{A}$ 是 R 上四元数代数的情况。在这一部分，主要介绍广义四元数的定义与它的一些基本性质。

定义 2.1 一个广义四元数 q 的表达形式为

$$q=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,$$

其中 $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$，四元数单位 e_0,e_1,e_2,e_3 满足下面的等式：

$$e_1^2=-\alpha,\quad e_2^2=-\beta,\quad e_3^2=-\alpha\beta,$$

$$e_1e_2=e_3=-e_2e_1,$$

$$e_2e_3=\beta e_1=-e_3e_2\text{，}$$

$$e_3e_1=\alpha e_2=-e_1e_3\text{，}$$

其中 $\alpha,\beta\in R$。

设 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 和 $v=(v_1,v_2,v_3)$，其中 $u,v\in R^3$，如果 $\alpha,\beta\in R^+$，u 和 v 的广义内积定义为 $g(u,v)=\alpha u_1v_1+\beta u_2v_2+\alpha\beta u_3v_3$，向量积被定义为

$$u\wedge v=\begin{vmatrix}\beta e_1 & \alpha e_2 & e_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\text{，}$$

其中 $e_1\wedge e_2=e_3$，$e_2\wedge e_3=\beta e_1$，$e_3\wedge e_1=\alpha e_2$。

用 $H_{\alpha,\beta}$ 表示基为 $\mathcal{B}(H_{\alpha,\beta})=\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ 的实数域上广义四元数的集合。一个广义四元数是一个标量和一个向量的和，其标量部分是 $S_q=a_0e_0$，向量部分是 $V_q=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\in R^3_{\alpha,\beta}$。因此，$H_{\alpha,\beta}$ 形成了一个包含实轴 R 和三维实线性空间 $R^3_{\alpha,\beta}$ 的四维实空间，因此 $H_{\alpha,\beta}=R\oplus R^3_{\alpha,\beta}$。注意到 e_0 是单位元，即对 $\forall i(i=0,1,2,3)$ 有 $e_0e_i=e_ie_0=e_i$，故 $H_{\alpha,\beta}$ 的中心是 $Z(H_{\alpha,\beta})=Re_0=R$。

广义四元数 $p=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\in H_{\alpha,\beta}$ 和 $q=b_0e_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3\in H_{\alpha,\beta}$ 的加法为

$$p+q=(a_0+b_0)e_0+(a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+(a_3+b_3)e_3\text{，}$$

广义四元数的加法保持了加法的结合性和交换性。

一个标量 c 和一个广义四元数 $p=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\in H_{\alpha,\beta}$ 的积定义为

$$cp=cS_p+cV_p=(ca_0)e_0+(ca_1)e_1+(ca_2)e_2+(ca_3)e_3\text{。}$$

广义四元数的乘法被定义为

$$pq=\left(S_pS_q-g(V_p,V_q)\right)e_0+S_pV_q+S_qV_p+V_p\wedge V_q\text{。}$$

3. 广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子

在这一部分，首先研究了实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的中心化子，其次研究实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子，并得到了其中心化子和 Jordan 中心化子的矩阵表示。

引理 3.1 设 $\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是可加映射，则下列叙述等价：

1) φ 是中心化子；

2) 对 $\forall x,y\in H_{\alpha,\beta}$，有 $2\varphi(xy)=\varphi(x)y+x\varphi(y)$；

3) 对 $\forall x,y\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)y+\varphi(y)x=x\varphi(y)+y\varphi(x)$；

4) 存在 $\lambda\in Z(H_{\alpha,\beta})$，使得对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(x)=\lambda x$。

证明：(1)$\Rightarrow$(2)，(1)$\Rightarrow$(3)，(4)$\Rightarrow$(1)是显然的。对于(2)$\Rightarrow$(1)，取 $x=e_0$，对任意的 $y\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(y)=\varphi(e_0)y$，取 $y=e_0$，对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(x)=x\varphi(e_0)$，因此，φ 是中心化子。

对于(3)$\Rightarrow$(4)，取 $y=e_0$，对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有

$$2\varphi(x)=\varphi(x\circ e_0)=\varphi(x)e_0+x\varphi(e_0)=x\varphi(e_0)+e_0\varphi(x)\text{，}$$

所以 $\varphi(x)=\varphi(e_0)x=x\varphi(e_0)$，进而 $\lambda=\varphi(e_0)$，且对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(x)=\lambda x$。证毕。

定理 3.1 设 $\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是 Jordan 中心化子和 α,β 均不为零，则 φ 是中心化子。

证明：因为 φ 是 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子，则对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有

$$2\varphi(x)=\varphi(x\circ e_0)=x\varphi(e_0)+\varphi(e_0)x\text{，}\tag{1}$$

设 $\varphi(e_1)=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$， $\varphi(e_2)=b_0e_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$，其中 $a_i,b_i\in R(i=0,1,2,3)$，则有

$$-2\alpha\varphi(e_0)=\varphi(e_1\circ e_1)=\varphi(e_1)\circ e_1=-2a_1\alpha e_0+2a_0e_1, \tag{2}$$

$$-2\beta\varphi(e_0)=\varphi(e_2\circ e_2)=\varphi(e_2)\circ e_2=-2b_2\beta e_0+2b_0e_2, \tag{3}$$

从而 $-2a_1e_0+2a_0\frac{1}{\alpha}e_1=-2b_2e_0+2b_0\frac{1}{\beta}e_2$，则 $a_0=b_0=0$ 且 $a_1=b_2$，进而由式(2)和(3)得 $\varphi(e_0)=a_1e_0\in R$，再由式(1)有，对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，有 $\varphi(x)=\varphi(e_0)x$。因此，φ 是一个中心化子。证毕。

实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子 φ 一定满足：对 $\forall x,y\in H_{\alpha,\beta}$，有

$$2\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ y+x\circ\varphi(y), \tag{4}$$

但是反之不一定成立，下面证明其成立的一种情况。

定理 3.2 设 $\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是一个满足式(4)的可加映射且 α,β 均不为零，则 φ 是中心化子。

证明：设 $\varphi(e_1)=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$， $\varphi(e_2)=b_0e_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$，其中 $a_i,b_i\in R(i=0,1,2,3)$，在式(4)分别取 $x=y=e_1$ 和 $x=y=e_2$ 有

$$-4\alpha\varphi(e_0)=2\varphi(e_1\circ e_1)=-4a_1\alpha e_0+4a_0e_1, \tag{5}$$

$$-4\beta\varphi(e_0)=2\varphi(e_2\circ e_2)=-4b_2\beta e_0+4b_0e_2, \tag{6}$$

于是 $-a_1e_0+a_0\frac{1}{\alpha}e_1=-b_2e_0+b_0\frac{1}{\beta}e_2$，则 $a_0=b_0=0$ 且 $a_1=b_2$，由式(5)可得 $\varphi(e_0)=a_1e_0\in R$，则对 $\forall x\in H_{\alpha,\beta}$，由式(4)有 $4\varphi(x)=2\varphi(x\circ e_0)=\varphi(e_0)\circ x+e_0\circ\varphi(x)$，从而有 $\varphi(x)=\varphi(e_0)x$，因此 φ 是中心化子。证毕。

最后，通过实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的中心化子和 Jordan 中心化子的矩阵表示研究中心化子和 Jordan 中心化子的关系。当 α,β 均不为零时，实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子就是中心化子。

推论 3.1 设 $\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是中心化子，φ 的矩阵表示 $[\varphi]$ 为

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

其中 $a,b\in R$，b 的取值依赖于 α,β，当 α,β 均不为零时，有 $b=0$，当 α,β 至少有一个等于零时，b 为任意实数。

证明：因为 φ 对于基 $\mathcal{B}(H_{\alpha,\beta})$ 有矩阵表示，其为 4×4 矩阵 $[\varphi]=(d_{ij})^{\mathrm{T}}$，且其元素由下面的等式定义

$$\varphi(e_{i-1})=\sum_{j=1}^{4}d_{ij}e_{j-1}, \quad 1\le i\le 4,$$

现将 φ 作用于四元数单位，因为 $\varphi(e_0e_1)=\varphi(e_0)e_1=e_0\varphi(e_1)$，由

$$\varphi(e_0)e_1=-\alpha d_{12}e_0+d_{11}e_1+\alpha d_{14}e_2-d_{13}e_3,$$

$$e_0\varphi(e_1)=d_{21}e_0+d_{22}e_1+d_{23}e_2+d_{24}e_3,$$

可得

$$d_{11}=d_{22}, \quad \alpha d_{12}=-d_{21}, \quad d_{13}=-d_{24}, \quad \alpha d_{14}=d_{23}, \tag{7}$$

因为 $\varphi(e_1e_0)=\varphi(e_1)e_0=e_1\varphi(e_0)$，由

$$\varphi(e_1)e_0=d_{21}e_0+d_{22}e_1+d_{23}e_2+d_{24}e_3,$$

$$e_1\varphi(e_0)=-\alpha d_{12}e_0+d_{11}e_1-\alpha d_{14}e_2+d_{13}e_3,$$

可得

$$d_{11}=d_{22}，\quad \alpha d_{12}=-d_{21}，\quad d_{13}=d_{24}，\quad \alpha d_{14}=-d_{23}， \tag{8}$$

结合式(7)和(8)有

$$d_{11}=d_{22}，\quad d_{24}=0，\quad d_{13}=0，\quad d_{23}=0。 \tag{9}$$

接下来对 $\varphi(e_1e_3)$，$\varphi(e_3e_1)$，$\varphi(e_0e_2)$，$\varphi(e_2e_0)$ 和 $\varphi(e_0e_3)$，$\varphi(e_3e_0)$ 使用相同的方法。对于 $\varphi(e_1e_3)$ 和 $\varphi(e_3e_1)$，分别有

$$d_{21}=d_{43}，\quad \alpha d_{22}=\alpha d_{44}，\quad \beta d_{23}=d_{41}，\quad \alpha\beta d_{24}=\alpha d_{42}， \tag{10}$$

$$d_{21}=-d_{43}，\quad \alpha d_{22}=\alpha d_{44}，\quad \beta d_{23}=-d_{41}，\quad \alpha\beta d_{24}=\alpha d_{42}， \tag{11}$$

结合式(9)，(10)和(11)得

$$d_{21}=0，\quad d_{43}=0，\quad d_{41}=0。 \tag{12}$$

对于 $\varphi(e_0e_2)$ 和 $\varphi(e_2e_0)$，分别有

$$d_{11}=d_{33}，\quad d_{12}=d_{34}，\quad -\beta d_{13}=d_{31}，\quad \beta d_{14}=-d_{32}， \tag{13}$$

$$d_{11}=d_{33}，\quad d_{12}=-d_{34}，\quad -\beta d_{13}=d_{31}，\quad \beta d_{14}=d_{32}， \tag{14}$$

结合式(9)，(13)和(14)得

$$d_{11}=d_{33}，\quad d_{12}=0，\quad d_{31}=0，\quad d_{32}=0，\quad d_{34}=0。 \tag{15}$$

对于 $\varphi(e_0e_3)$ 和 $\varphi(e_3e_0)$，分别有

$$d_{41}=-\alpha\beta d_{14}，\quad d_{42}=\beta d_{13}，\quad d_{43}=-\alpha d_{12}，\quad d_{44}=d_{11}， \tag{16}$$

$$d_{41}=-\alpha\beta d_{14}，\quad d_{42}=-\beta d_{13}，\quad d_{43}=\alpha d_{12}，\quad d_{44}=d_{11}， \tag{17}$$

结合式(16)和(17)得

$$d_{42}=0，\quad d_{44}=d_{11}。 \tag{18}$$

结合式(9)，(12)，(15)和(18)可得

$$d_{11}=d_{22}=d_{33}=d_{44},$$

$$d_{12}=d_{13}=d_{21}=d_{23}=d_{24}=d_{31}=d_{32}=d_{34}=d_{41}=d_{42}=d_{43}=0,$$

d_{14} 的取值依赖于 α,β，当 α,β 均不为零时，有 $b=0$，当 α,β 至少有一个等于零时，b 为任意实数。令 $d_{11}=a$，$d_{14}=b$，其中 $a,b\in R$，即得 $[\varphi]$。证毕。

推论 3.2 设 $\phi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是 Jordan 中心化子，ϕ 的矩阵表示 $[\phi]$ 为

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

其中 $a\in R$。

证明：因为ϕ对于基$\mathcal{B}\left(H_{\alpha,\beta}\right)$有矩阵表示，其为4×4矩阵$[\phi]=\left(d_{ij}\right)^{\mathrm{T}}$，且其元素由下面的等式定义

$$\phi\left(e_{i-1}\right)=\sum_{j=1}^{4} d_{ij}e_{j-1}，\quad 1\le i\le 4，$$

现将ϕ作用于四元数单位，因为$\phi\left(e_0\circ e_1\right)=\phi\left(e_0\right)\circ e_1=e_0\circ\phi\left(e_1\right)$，由

$$\phi\left(e_0\right)\circ e_1=-2\alpha d_{12}e_0+2d_{11}e_1，\tag{19}$$

$$e_0\circ\phi\left(e_1\right)=2d_{21}e_0+2d_{22}e_1+2d_{23}e_2+2d_{24}e_3，\tag{20}$$

结合式(19)和(20)得

$$d_{11}=d_{22}，\quad d_{23}=d_{24}=0。\tag{21}$$

接下来对$\phi\left(e_0\circ e_2\right)$和$\phi\left(e_0\circ e_3\right)$使用相同的方法。

对于$\phi\left(e_0\circ e_2\right)$，有

$$d_{11}=d_{33}，\quad d_{32}=d_{34}=0。\tag{22}$$

对于$\phi\left(e_0\circ e_3\right)$，有

$$d_{11}=d_{44}，\quad d_{42}=d_{43}=0。\tag{23}$$

同理，因为$0=\phi\left(e_1\circ e_2\right)=\phi\left(e_1\right)\circ e_2=e_1\circ\phi\left(e_2\right)$，再结合式(21)和(22)，由$\phi\left(e_1\right)\circ e_2=2d_{21}e_2$和$e_1\circ\phi\left(e_2\right)=2d_{31}e_1$可得

$$d_{21}=0，\quad d_{31}=0，\tag{24}$$

由$0=\phi\left(e_1\circ e_3\right)=e_1\circ\phi\left(e_3\right)=2d_{41}e_1$，可得

$$d_{41}=0。\tag{25}$$

综合式(21)，(22)，(23)，(24)和(25)可得

$$d_{11}=d_{22}=d_{33}=d_{44}，$$

$$d_{12}=d_{13}=d_{14}=d_{21}=d_{23}=d_{24}=d_{31}=d_{32}=d_{34}=d_{41}=d_{42}=d_{43}=0。$$

令$d_{11}=a$，其中$a\in R$，即得$[\phi]$。证毕。

4. 广义四元数代数$H_{\alpha,\beta}$的Lie中心化子

在这一部分，研究了实数域上广义四元数代数$H_{\alpha,\beta}$的Lie中心化子，并得到特定条件下Lie中心化子的矩阵表示。

定理4.1 设$\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$是Lie中心化子且$\alpha,\beta$均不为零，则对$\forall r=xe_0+ye_1+ze_2+we_3\in H_{\alpha,\beta}$有$\varphi(r)=\eta(x)e_0+\pi(y)e_1+\pi(z)e_2+\pi(w)e_3$，其中$\eta$和$\pi$是$R$上的可加映射。

证明：对$\forall s\in R$，设$\varphi\left(se_1\right)=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$，其中$x,y,z,w\in R$，由$\varphi$是$H_{\alpha,\beta}$的Lie中心化子得

$0=\varphi(0)=\varphi\left(\left[se_1,e_1\right]\right)=\left[\varphi\left(se_1\right),e_1\right]=-2ze_3+2w\alpha e_2$，

从而$z=w=0$，故$\varphi\left(se_1\right)=xe_0+ye_1$。因为

$$2\varphi\left(se_3\right)=\varphi\left(\left[se_1,e_2\right]\right)=\left[\varphi\left(se_1\right),e_2\right]，\tag{26}$$

$$2\alpha\varphi\left(se_2\right)=\varphi\left(\left[se_3,e_1\right]\right)=\left[\varphi\left(se_3\right),e_1\right]，\tag{27}$$

$$2\beta\varphi\left(se_1\right)=\varphi\left(\left[se_2,e_3\right]\right)=\left[\varphi\left(se_2\right),e_3\right]，\tag{28}$$

所以$\varphi\left(se_3\right)=ye_3$，$\varphi\left(se_2\right)=ye_2$，$\varphi\left(se_1\right)=ye_1$。令$\eta(s)=y\ (s\in R)$，其中$\eta:R\to R$是由$\varphi$唯一决定的可加映射，由式(26)，(27)和(28)有

DOI: 10.12677/aam.2022.1112928

$$\varphi(se_3)=\eta(s)e_3,\quad \varphi(se_2)=\eta(s)e_2,\quad \varphi(se_1)=\eta(s)e_1, \tag{29}$$

对 $\forall s\in R$，设 $\varphi(se_0)=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$，其中 $x,y,z,w\in R$，则

$$0=\varphi([se_0,e_1])=[\varphi(se_0),e_1]=2w\alpha e_2-2ze_3,$$

从而 $z=w=0$，$\varphi(se_0)=xe_0+ye_1$，又因为 $0=\varphi[se_0,e_2]=[\varphi(se_0),e_2]=2ye_3$，则有 $y=0$，因此 $\varphi(se_0)=xe_0$。令 $\pi(s)=x$，其中 $\pi:R\to R$ 是由 φ 唯一决定的可加映射，于是 $\varphi(se_0)=\pi(s)e_0$。因此对 $r=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$ 有

$$\begin{aligned}\varphi(r)&=\varphi(xe_0+ye_1+ze_2+we_3)=\varphi(xe_0)+\varphi(ye_1)+\varphi(ze_2)+\varphi(we_3)\\&=\pi(x)e_0+\eta(y)e_1+\eta(z)e_2+\eta(w)e_3\end{aligned}。$$

证毕。

实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Lie 中心化子一定满足：对 $\forall x,y\in H_{\alpha,\beta}$ 有

$$2\varphi([x,y])=[\varphi(x),y]+[x,\varphi(y)], \tag{30}$$

反之不一定成立，下面将证明其成立的一种情况。

定理 4.2 设 φ 是满足式(30)的可加映射且 α,β 均不为零，则 φ 是 Lie 中心化子。

证明：设

$$\varphi(e_1)=a_0x_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,$$

$$\varphi(e_2)=b_0x_0+b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3,$$

$$\varphi(e_3)=c_0x_0+c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3,$$

其中 $a_i,b_i,c_i\in R(i=0,1,2,3)$，则由式(30)有

$$4\varphi(e_3)=2\varphi([e_1,e_2])=[\varphi(e_1),e_2]+[e_1,\varphi(e_2)],$$

即

$$4(c_0e_0+c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)=-2a_3\beta e_1-2b_3\alpha e_2+2(a_1+b_2)e_3, \tag{31}$$

比较式(31)两端可得

$$c_0=0,\quad 2c_1=-\beta a_3,\quad 2c_2=-\alpha b_3,\quad 2c_3=a_1+b_2, \tag{32}$$

同理，可由 $4\alpha\varphi(e_2)=2\varphi([e_3,e_1])=[\varphi(e_3),e_1]+[e_3,\varphi(e_1)]$ 和 $4\beta\varphi(e_1)=2\varphi([e_2,e_3])=[\varphi(e_2),e_3]+[e_2,\varphi(e_3)]$，可得

$$b_0=0,\quad 2b_1=-\frac{\beta}{\alpha}a_2,\quad 2b_2=c_3+a_1,\quad 2b_3=-\frac{1}{\alpha}c_2, \tag{33}$$

$$a_0=0,\quad 2a_1=b_2+c_3,\quad 2a_2=-\frac{\alpha}{\beta}b_1,\quad 2a_3=-\frac{1}{\beta}c_1, \tag{34}$$

结合式(32)，(33)和(34)

$$a_1=b_2=c_3,\quad a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=0,$$

进而有

$$\varphi(e_1)=a_1e_1,\quad \varphi(e_2)=a_1e_2,\quad \varphi(e_3)=a_1e_3。 \tag{35}$$

对 $\forall s\in R$，设 $\varphi(se_1)=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$，其中 $x,y,z,w\in R$，由式(30)和式(35)，有

$$0=\varphi(0)=2\varphi([se_1,e_1])=[\varphi(se_1),e_1]+[se_1,\varphi(e_1)]=2\alpha we_2-2ze_3,$$

从而 $\varphi(se_1)=xe_0+ye_1$，再由式(30)和(35)可得

$$4\varphi(se_3)=2\varphi([se_1,e_2])=[\varphi(se_1),e_2]+[se_1,\varphi(e_2)]=2ye_3+2sa_1e_3, \tag{36}$$

同理有

$$4\varphi(se_1)=ye_1+3sa_1e_1,\quad 4\varphi(se_2)=ye_2+3sa_1e_2, \tag{37}$$

由于 $4\varphi(se_1)=ye_1+3sb_1e_1=4xe_0+4ye_1$，因此 $x=0$，$sa_1=y$，由式(36)和(37)知

$$\varphi(se_1)=ye_1,\quad \varphi(se_2)=ye_2,\quad \varphi(se_3)=ye_3, \tag{38}$$

令 $\eta(s)=y$，其中 $\eta:R\to R$ 是由 φ 唯一决定的可加映射，由式(38)有

$$\varphi(se_1)=\eta(s)e_1,\quad \varphi(se_2)=\eta(s)e_2,\quad \varphi(se_3)=\eta(s)e_3。 \tag{39}$$

对 $\forall s\in R$，设 $\varphi(se_0)=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$，其中 $x,y,z,w\in R$，由式(30)得

$$\varphi(0)=2\varphi([se_0,e_1])=[\varphi(se_0),e_1]+[se_0,\varphi(e_1)]=2w\alpha e_2-2ze_3,$$

则有 $z=w=0$。同理，可由 $2\varphi([se_0,e_2])=2ye_3$ 得 $y=0$，因此 $\varphi(se_0)=xe_0$。令 $\pi(s)=x(s\in R)$，中 $\pi:R\to R$ 是由 φ 唯一决定的可加映射，则

$$\varphi(se_0)=\pi(s)e_0, \tag{40}$$

因此对 $r=xe_0+ye_1+ze_2+we_3$，由式(39)和(40)得

$$\begin{aligned}\varphi(r)&=\varphi(xe_0+ye_1+ze_2+we_3)=\varphi(xe_0)+\varphi(ye_1)+\varphi(ze_2)+\varphi(we_3)\\&=\pi(x)e_0+\eta(y)e_1+\eta(z)e_2+\eta(w)e_3\end{aligned}。$$

其中 η 和 π 上的可加映射，因此 φ 是 Lie 中心化子。证毕。

推论 4.2 设 $\varphi:H_{\alpha,\beta}\to H_{\alpha,\beta}$ 是 Lie 中心化子且 α,β 均不为零，φ 的矩阵表示 $[\varphi]$ 为

$$\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&b\end{bmatrix},$$

其中 $a,b\in R$。

证明：因为 φ 对于基 $\mathcal{B}(H_{\alpha,\beta})$ 有矩阵表示，其为 4×4 矩阵 $[\varphi]=(d_{ij})^{\mathrm{T}}$，且其元素由下面的等式定义

$$\varphi(e_{i-1})=\sum_{j=1}^{4}d_{ij}e_{j-1},\quad 1\le i\le 4,$$

现将 φ 作用于四元数单位，由 $\varphi([e_0,e_1])=[\varphi(e_0),e_1]=0$ 和 $\varphi([e_0,e_2])=[\varphi(e_0),e_2]=0$，可得

$$d_{12}=d_{13}=d_{14}=0。 \tag{41}$$

同理，由 $\varphi([e_1,e_1])=[\varphi(e_1),e_1]=[e_1,\varphi(e_1)]=0$，$\varphi([e_2,e_2])=[\varphi(e_2),e_2]=[e_2,\varphi(e_2)]=0$ 和 $\varphi([e_3,e_3])=[\varphi(e_3),e_3]=[e_3,\varphi(e_3)]=0$ 有

$$d_{23}=d_{24}=0,\quad d_{32}=d_{34}=0,\quad d_{42}=d_{43}=0。 \tag{42}$$

再由 $\varphi([e_1,e_2])=[\varphi(e_1),e_2]=[e_1,\varphi(e_2)]=2\varphi(e_3)$，$\varphi([e_1,e_3])=[\varphi(e_1),e_3]=[e_1,\varphi(e_3)]=-2\alpha\varphi(e_2)$ 和 $\varphi([e_2,e_3])=[\varphi(e_2),e_3]=[e_2,\varphi(e_3)]=2\beta\varphi(e_1)$，可得

$$d_{21}=d_{31}=d_{41}=0,\quad d_{22}=d_{33}=d_{44}。 \tag{43}$$

令 $d_{11}=a$，$d_{22}=b$，其中 $a,b\in R$，即得 $[\varphi]$。证毕。

5. 总结

本文主要研究了实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Jordan 中心化子和 Lie 中心化子，证明了当 α,β 均不为零时，广义四元数代数的 Jordan 中心化子是中心化子，并且得到了广义四元数代数的 Jordan 中心化子和中心化子的矩阵表示，本文从广义四元数代数的 Jordan 中心化子和中心化子的矩阵表示出发，也得到了当 α,β 均不为零时，广义四元数代数的 Jordan 中心化子是中心化子。关于实数域上广义四元数代数 $H_{\alpha,\beta}$ 的 Lie 中心化子，本文得到了当 α,β 均不为零时，广义四元数代数的可加映射是 Lie 中心化子的等价条件和 Lie 中心化子的矩阵表示。今后还将继续研究复数域上广义四元数代数的 Jordan 中心化子和 Lie 中心化子。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

本文获国家自然科学基金(No.12061018)资助。

参考文献

[1] Adler, S.L. (1995) Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. Oxford University Press, Oxford.

[2] Agrawal, O.P. (1987) Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, **22**, 569-575. https://doi.org/10.1016/0094-114X(87)90052-8

[3] Lewis, D.W. (2006) Quaternion Algebras and the Algebraic Legacy of Hamilton's Quaternions. *Irish Mathematical Society Bulletin*, **57**, 41-64. https://doi.org/10.33232/BIMS.0057.41.64

[4] Finkelstein, D., Jauch, J.M., Schiminovich, S., *et al*. (1962) Foundations of Quaternion Quantum Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 207-220. https://doi.org/10.1063/1.1703794

[5] Jafari, M. and Yayli, Y. (2015) Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, **64**, 15-27. https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000724

[6] Kizil, E. and Alagöz, Y. (2019) Derivations of Generalized Quaternion Algebra. *Turkish Journal of Mathematics*, **43**, 2649-2657. https://doi.org/10.3906/mat-1905-86

[7] Zalar, B. (1991) On Centralizers of Semiprime Rings. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **32**, 609-614.

[8] Fošner, A. and Jing, W. (2019) Lie Centralizers on Triangular Rings and Nest Algebras. *Advances in Operator Theory*, **4**, 342-350. https://doi.org/10.15352/aot.1804-1341

[9] Jabeen, A. (2021) Lie (Jordan) Centralizers on Generalized Matrix Algebras. *Communications in Algebra*, **49**, 278-291. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1797759