

# 粘性Cahn-Hilliard方程的二阶稳定 Crank-Nicolson-Leapfrog格式

刘 静, 王旦霞\*, 王李靖

太原理工大学数学系, 山西 晋中

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月24日; 发布日期: 2023年1月31日

## 摘 要

本文研究了粘性Cahn-Hilliard方程的一个二阶逼近。对于双阱势函数, 本文通过引入拉格朗日乘子得到一个等价形式。其次, 使用Crank-Nicolson-Leapfrog格式进行时间离散, 使用有限元方法进行空间离散, 从而得出了一个二阶线性无条件稳定的数值格式。然后, 证明了数值格式无条件能量稳定性和误差分析。最后, 给出了几个数值模拟, 验证了格式的数值精度。

## 关键词

粘性Cahn-Hilliard, Crank-Nicolson-Leapfrog, 无条件稳定, 误差估计

# A Stable Second-Order Crank-Nicolson-Leapfrog Scheme for the Viscous Cahn-Hilliard Equation

Jing Liu, Danxia Wang\*, Lijing Wang

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 28<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jan. 24<sup>th</sup>, 2023; published: Jan. 31<sup>st</sup>, 2023

## Abstract

In this paper, we present a second-order approximation of the viscous Cahn-Hilliard equation. Firstly, an equivalent form of the system has been obtained by introducing a Lagrange multiplier for the double-well potential function. Secondly, a second-order linear unconditionally stable nu-

\*通讯作者。

merical scheme is proposed by using the Crank-Nicolson-Leapfrog scheme and mixed finite element method, respectively, to discrete the time and space. Furthermore, we prove that the scheme is second-order convergent. Finally, numerical examples are performed to show that the numerical accuracy of the proposed scheme is accurate and effective.

## Keywords

Viscous Cahn-Hilliard, Crank-Nicolson-Leapfrog, Unconditionally Stable, Error Estimates

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Cahn-Hilliard 方程是 1958 年由 Cahn 和 Hilliard [1] 提出的, 是用来描述热力学中两种物质(如合金, 聚合物等等)之间相互扩散现象的数学模型。目前, Cahn-Hilliard 方程的数值算法及模拟已成为科学计算领域中的一个国际热点问题, 国内外诸多学者已经提出了许多 Cahn-Hilliard 方程的数值求解方法, 其研究成果颇多[2] [3] [4] [5]。

本文研究粘性 Cahn-Hilliard 方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta \omega, \\ \omega = -\varepsilon^2 \Delta u + F'(u) + \beta u_t, \\ \partial_n u = \partial_n \omega = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ ,  $u$  是混合物中某种物质的浓度,  $\varepsilon$  是描述界面厚度的参数,  $\beta \geq 0$  表示粘性参数。其能量泛函定义为:

$$E(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx. \quad (2)$$

当  $\beta = 0$  时, 方程(1.1)就变为经典的 Cahn-Hilliard 方程。这类四阶非线性扩散方程在理论和数值方面都已经被广泛地研究。当  $\beta > 0$  时, 为粘性 Cahn-Hilliard 方程, 它源于动力学, 是玻璃和聚合体系统中相位差现象的闭联集模型。Novick-Cohen 在文献[6]中提出了该模型, 给出了推导过程和物理上的诸多应用。目前, 在数值研究方面, 有限差分法, 谱方法和有限元方法有了不少研究工作。在文献[7]中, 作者提出了带有浓度迁移率的粘性 Cahn-Hilliard 方程数值格式。在文献[8]中, 作者讨论了粘性 Cahn-Hilliard 方程的一个二阶数值格式。文献[9]给出了一个线性化差分格式并验证了格式满足唯一可解性。文献[10]提出了一个二阶对数势格式。

研究此类方程的主要困难是 Cahn-Hilliard 方程的非线性项, 针对此困难, 已经有了很多研究。比如, 在[11]中使用了凸分裂方法, 在[12]中使用了 SAV 方法, 在[13]中使用了 IEQ 方法。本文基于拉格朗日乘子的方法, 提出了一个新的二阶格式, 并对此格式进行了严格的分析。

本文的其余部分安排如下。在第 2 节, 通过引入拉格朗日乘子将势函数线性化, 得到其等价形式, 并分别给出了方程的半离散格式和全离散格式; 在第 3 节和第 4 节中, 证明了所提格式满足无条件能量

稳定性, 并证明了误差估计。第 5 节, 通过几个数值模拟, 验证了上述数值格式的准确性。第 6 节给出了全文的总结。

## 2. 模型及数值格式

### 2.1. 预备知识

给定有界开基  $\Omega \in R^d$  ( $d=2,3$ ), 其边界  $\partial\Omega$  光滑,  $C$  是一个不依赖于  $h$  和  $\tau$  的一般正常数, 设  $L^2(\Omega)$  表示在  $\Omega$  上 Lebesgue 平方可测的函数空间。内积和范数分别为:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx, \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

对于  $k \in N$ ,  $H^k(\Omega)$  是通常的 Sobolev 空间。  $H^k(\Omega)$  的范数定义如下:

$$\|u\|_{H^k} = \left( \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^k(\Omega).$$

### 2.2. 半离散数值格式

本小节对于双阱势函数  $F'(u) = u(u^2 - 1)$ , 我们引入一个辅助变量  $q$ 。令  $q = u^2 - 1$ , 使得  $F'(u) = uq$ 。进一步我们将  $q$  对  $t$  求导得  $q_t = 2uu_t$ , 则模型可重写为如下形式

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \\ \omega &= uq - \varepsilon^2 \Delta u + \beta u_t, \\ \frac{1}{2} q_t &= uu_t. \end{aligned} \quad (3)$$

相应的能量泛函  $E(u)$  为

$$E(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4} |q|^2 \right) dx. \quad (4)$$

可以发现(4)式仍然保持能量耗散。

构造系统(3)的弱解形式

$$(u_t, v) + (\nabla \omega, \nabla v) = 0, \quad (5)$$

$$(\omega, \psi) - \varepsilon^2 (\nabla u, \nabla \psi) - (uq, \psi) - \beta (u_t, \psi) = 0, \quad (6)$$

$$\left( \frac{1}{2} q_t, p \right) - (uu_t, p) = 0. \quad (7)$$

设  $N \in Z^+$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  为  $[0, T]$  上的剖分,  $[0, T]$  为时间区间, 任给函数  $u(t)$ , 定义  $u^n$  为  $u(n\tau)$  的近似, 其中  $\tau := t_{n+1} - t_n, n=0,1,\dots,N$ 。构造系统(5)~(7)在时间上离散的 Crank-Nicolson-Leapfrog 格式, 给定  $(u^{n-1}, u^n)$ , 当  $n \geq 1$  时, 求  $(u^{n+1}, q^{n+1})$

$$\left( \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}, v \right) + (\nabla \omega^n, \nabla v) = 0, \quad (8)$$

$$\left( \omega^n, \psi \right) - \varepsilon^2 \left( \nabla \frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2}, \nabla \psi \right) - \left( u^n \frac{q^{n+1} + q^{n-1}}{2}, \psi \right) - \beta \left( \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}, \psi \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\tau}, p \right) - \left( u^n \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}, p \right) = 0. \tag{10}$$

### 2.3. 全离散数值格式

在区域  $\Omega$  上作拟一致剖分, 记作  $T_h = K$ ,  $h_i$  为网格大小,  $h = \max_{0 \leq i \leq N} h_i$ ,  $S_h$  是分片连续的有限元空间, 定义如下

$$S_h = \{v_h \in C(\Omega) \mid v_h|_K \in P_k(x, y), K \in T_h\} \subset H^1(\Omega),$$

其中  $P_k(x, y)$  是  $x, y$  的次数不超过  $k \in Z^+$  的线性多项式的集合。定义  $L_0^2 = \{u \in L^2(\Omega) \mid (u, 1) = 0\}$ ,  $\dot{S}_h = S_h \cap L_0^2(\Omega)$ 。接下来构造模型(5)~(7)的全离散格式, 给定  $(u_h^{n-1}, u_h^n)$ , 当  $n \geq 1$  时, 求  $(u_h^{n+1}, q_h^{n+1})$

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, v \right) + (\nabla \omega_h^n, \nabla v) = 0, \tag{11}$$

$$(\omega_h^n, \psi) - \varepsilon^2 \left( \nabla \frac{u_h^{n+1} + u_h^{n-1}}{2}, \nabla \psi \right) - \left( u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, \psi \right) - \beta \left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \psi \right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\tau}, p \right) - \left( u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, p \right) = 0. \tag{13}$$

### 3. 稳定性分析

**定理 3.1** 令  $(u_h^{n+1}, q_h^{n+1})$  是(11)~(13)的解, 定义

$$E^{n+1, n} = \frac{\varepsilon^2}{2} (\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + \|\nabla u_h^n\|^2) + \frac{1}{4} (\|q_h^{n+1}\|^2 + \|q_h^n\|^2).$$

对任意的  $\tau, h, \varepsilon > 0, n \geq 1$ , 有下述不等式成立

$$E^{n+1, n} + \frac{\beta}{2\tau} \|u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\|^2 + 2\tau \|\nabla \omega_h^n\|^2 = E^{n, n-1}. \tag{14}$$

证明: 令  $v = 2\tau \omega_h^n$ , 得

$$(u_h^{n+1} - u_h^n, \omega_h^n) + 2\tau \|\nabla \omega_h^n\|^2 = 0. \tag{15}$$

当  $\psi = -(u_h^{n+1} - u_h^{n-1})$ , 得

$$-(\omega_h^n, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 - \|\nabla u_h^{n-1}\|^2) + \left( u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, u_h^{n+1} - u_h^{n-1} \right) + \frac{\beta}{2\tau} \|u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\|^2 = 0. \tag{16}$$

取  $p = \tau(q_h^{n+1} + q_h^{n-1})$ , 可得

$$\frac{1}{4} (\|q_h^{n+1}\|^2 - \|q_h^{n-1}\|^2) - \left( u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2}, q_h^{n+1} + q_h^{n-1} \right) = 0. \tag{17}$$

将(15), (16)和(17)结合, 可以得到

$$2\tau \|\nabla \omega_h^n\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} (\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 - \|\nabla u_h^{n-1}\|^2) + \frac{\beta}{2\tau} \|u_h^{n+1} - u_h^{n-1}\|^2 + \frac{1}{4} (\|q_h^{n+1}\|^2 - \|q_h^{n-1}\|^2) = 0. \tag{18}$$

定理 1 证毕。

**推论 1** 存在常数  $C > 0$ , 设  $E^{1,0} \leq C$ , 对任意的  $\tau, h > 0$ , 有下列估计式成立

$$\begin{aligned}
\max_{0 < i \leq n} \left( \|\nabla u_h^{i+1}\|^2 + \|u_h^{i+1}\|^2 + \|u_h^{i+1} - u_h^i\|^2 \right) &\leq C, \\
\max_{0 < i \leq n} \left( \|\nabla q_h^{i+1}\|^2 + \|q_h^{i+1}\|^2 \right) &\leq C, \\
\sum_{i=1}^n \tau \|\nabla \omega_h^i\|^2 &\leq C.
\end{aligned} \tag{19}$$

#### 4. 误差分析

在本节中, 将详细给出误差估计。假设弱解具有以下正则性

$$\begin{aligned}
u &\in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{r+1}(\Omega)), \\
\omega &\in L^\infty(0, T; W^{1, 6}(\Omega)), \\
q &\in L^\infty(0, T; W^{1, 6}(\Omega)).
\end{aligned} \tag{20}$$

其中  $r \geq 1$ 。

为了书写简便, 给出如下符号:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_u^{n+1} &= R_h u^{n+1} - u_h^{n+1}, & \tilde{e}_u^{n+1} &= u^{n+1} - R_h u^{n+1}, \\
\hat{e}_\omega^{n+1} &= R_h \omega^{n+1} - \omega_h^{n+1}, & \tilde{e}_\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} - R_h \omega^{n+1}, \\
\hat{e}_q^{n+1} &= R_h q^{n+1} - q_h^{n+1}, & \tilde{e}_q^{n+1} &= q^{n+1} - R_h q^{n+1}.
\end{aligned}$$

**定义 4.1 [14]**  $H^{-1}$  范数  $\|\cdot\|_{-1, h}$  定义如下

$$\|\xi\|_{-1, h} = \sqrt{(\xi, \xi)_{-1, h}} = \sup_{0 \neq \chi \in \dot{S}_h} \frac{(\xi, \chi)}{\|\nabla \chi\|}, \forall \xi \in \dot{S}_h. \tag{21}$$

**定义 4.2**  $\Delta_h$  是离散的 Laplacian 算子,  $S_h \rightarrow \dot{S}_h$  是可逆的,  $\forall v_h \in S_h, \Delta_h v_h \in \dot{S}_h$ , 有

$$(\nabla(-\Delta_h^{-1})v_h, \nabla \chi) = (v_h, \chi), \forall \chi \in \dot{S}_h. \tag{22}$$

**引理 4.1** Ritz 投影算子满足下面估计

$$\|u - R_h u\| + h \|u - R_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{r+1} \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)}, \forall u \in H^{r+1}(\Omega). \tag{23}$$

**引理 4.2** Ritz 投影算子  $R_h : S_h \rightarrow \dot{S}_h$  满足

$$(\nabla(u - R_h u), \nabla v) = 0, (R_h u - u, 1) = 0. \tag{24}$$

**引理 4.3 [15]** 定义如下变分问题: 给出  $\chi \in \dot{S}_h(\Omega)$ , 求  $T_h(\chi) \in \dot{S}_h$  使得

$$(\nabla T_h(\chi), \nabla v) = (\chi, v), \tag{25}$$

其中  $T_h : \dot{S}_h(\Omega) \rightarrow \dot{S}_h(\Omega)$  是一个可逆线性算子。令  $\chi, \psi \in \dot{S}_h(\Omega)$  且有

$$(\chi, \psi)_{-1, h} = (\nabla T_h(\chi), \nabla T_h(\psi)) = (\chi, T_h(\psi)) = (T_h(\chi), \psi), \tag{26}$$

其中  $(\cdot, \cdot)_{-1, h}$  为定义在  $\dot{S}_h(\Omega)$  得内积。因此, 对于  $\forall \chi \in \dot{S}_h(\Omega), \forall g \in S_h(\Omega)$ 。

$$|(\chi, g)| \leq \|\chi\|_{-1, h} \|\nabla g\|. \tag{27}$$

**定理 4.1** 假设  $(u, q), (u_h^{n+1}, q_h^{n+1})$  分别为(5)~(7)和(11)~(13)的解, 则对于任意的  $\tau, h > 0$ , 存在常数  $C > 0$  使得

$$\tau \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_\omega^i\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\tau} \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_u^{i+1}\|^2 + \frac{1}{16} \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_q^{i+1} - \nabla \hat{e}_q^{i-1}\|^2 + \beta \sum_{i=1}^n \|\delta_\tau \hat{e}_u^{i+1}\|^2 \leq C\tau^4 + Ch^{2r}. \tag{28}$$

证明: 当  $t = n$  时, 方程(5)~(7)减去方程(11)~(13),

$$\left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, v \right) + (\nabla \hat{e}_\omega^n + \nabla \tilde{e}_\omega^n, \nabla v) = 0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & (\hat{e}_\omega^n + \tilde{e}_\omega^n, \psi) - \varepsilon^2 \left( \nabla u^n - \nabla \frac{u_h^{n+1} + u_h^{n-1}}{2}, \nabla \psi \right) - \left( u^n q^n - u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, \psi \right) \\ & - \beta \left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \psi \right) = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\frac{1}{2} \left( q_t^n - \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\tau}, p \right) - \left( u^n u_t^n - u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, p \right) = 0, \tag{31}$$

令  $v = \tau \hat{e}_\omega^n$  可得

$$\left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \hat{e}_\omega^n \right) + \tau \|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2 = 0. \tag{32}$$

当  $\psi = \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \left( \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} = \frac{\hat{e}_u^{n+1} - \hat{e}_u^{n-1}}{2\tau} \right)$  时, 得

$$\begin{aligned} & (\hat{e}_\omega^n + \tilde{e}_\omega^n, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}) - \varepsilon^2 \left( \nabla u^n - \nabla \frac{u_h^{n+1} + u_h^{n-1}}{2}, \nabla \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\ & - \left( u^n q^n - u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) - \beta \left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2 \left( \nabla u^n - \nabla \frac{u_h^{n+1} + u_h^{n-1}}{2}, \nabla \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\ & = \frac{\varepsilon^2}{2} (\nabla u^{n+1} - 2\nabla u^n + \nabla u^{n-1}, \nabla \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}) - \frac{\varepsilon^2}{4\tau} (\|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 - \|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2). \end{aligned}$$

取  $p = -\tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1})$ , 得

$$\frac{1}{2} \left( q_t^n - \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\tau}, -\tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) + \left( u^n u_t^n - u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) = 0. \tag{34}$$

于是有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \left( q_t^n - \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\tau} + \delta_\tau \tilde{e}_q^{n+1}, \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) \\ & + \left( u^n u_t^n - u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

将(32), (33), (35)相加可得

$$\begin{aligned}
& \tau \|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\tau} \left( \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 - \|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2 + \beta \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|^2 \\
& = \left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \hat{e}_\omega^n \right) + \left( \hat{e}_\omega^n + \tilde{e}_\omega^n, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \nabla u^{n+1} - 2\nabla u^n + \nabla u^{n-1}, \nabla \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\
& \quad - \left( u^n q^n - u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) - \beta \left( u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + \delta_\tau \tilde{e}_u^{n+1}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( q_t^n - \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\tau} + \delta_\tau \tilde{e}_q^{n+1}, \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) \\
& \quad - \left( u^n u_t^n - u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1}) \right) \\
& = \sum_{i=1}^7 M_i.
\end{aligned} \tag{36}$$

接下来依次估计  $M_i$  ( $i=1,2,3,4,5,6,7$ )。根据引理 4.1~4.3, Cauchy-Schwarz 和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
M_1 & = \left( u_t^n - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \hat{e}_\omega^n \right) \\
& = \left( u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \hat{e}_\omega^n \right) \\
& \leq \tau \left\| u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} \right\| \|\hat{e}_\omega^n\| + \tau \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\| \|\hat{e}_\omega^n\| + \tau \|\delta_\tau \tilde{e}_u^{n+1}\| \|\hat{e}_\omega^n\| \\
& \leq C\tau^4 + Ch^{2r} + C \|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2 + \frac{1}{8} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2.
\end{aligned} \tag{37}$$

$$M_2 \leq \|\hat{e}_\omega^n + \tilde{e}_\omega^n\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\| \leq Ch^{2r} + C \|\nabla \hat{e}_\omega^n\| + \frac{1}{8} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2. \tag{38}$$

$$M_3 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \|\Delta(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1})\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\| \leq C\tau^4 + \frac{1}{16} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|^2. \tag{39}$$

化简  $M_4$ , 可得

$$\begin{aligned}
M_4 & = - \left( u^n q^n - u_h^n \frac{q_h^{n+1} + q_h^{n-1}}{2}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\
& = \left( u^n \left( (u^n)^2 - \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} \right), \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\
& \quad + \left( \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} (u^n - u_h^n), \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) - (u^n - u_h^n, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}) \\
& = \sum_{i=41}^{43} J_i.
\end{aligned} \tag{40}$$

根据(20), 引理 4.1 以及 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
 J_{41} &\leq \left\| \left( u^n \left( (u^n)^2 - \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} \right), \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \right\| \\
 &\leq \left\| \nabla \left( u^n \left( (u^n)^2 - \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} \right) \right) \right\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \\
 &\leq \|\nabla u^n\|_{L^3} \left\| \left( (u^n)^2 - \frac{(u^{n+1})^2 + (u^{n-1})^2}{2} \right) \right\|_{L^6} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \\
 &\quad + \|\nabla u^n\|_{L^3} \left\| \left( \frac{(u^{n+1})^2 + (u^{n-1})^2}{2} - \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} \right) \right\|_{L^6} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \\
 &\quad + \|u^n\|_{L^\infty} \left\| \nabla \left( (u^n)^2 - \frac{(u^{n+1})^2 + (u^{n-1})^2}{2} \right) \right\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \\
 &\quad + \|u^n\|_{L^\infty} \left\| \nabla \left( \frac{(u^{n+1})^2 + (u^{n-1})^2}{2} - \frac{(u_h^{n+1})^2 + (u_h^{n-1})^2}{2} \right) \right\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \\
 &\leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{1}{8} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + C \|\hat{e}_u^{n-1}\|^2 + 4 \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2.
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$J_{42} \leq \|\nabla(\hat{e}_u^n + \tilde{e}_u^n)\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \leq Ch^{2r} + C \|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + \frac{1}{8} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2. \tag{42}$$

$$J_{43} \leq \|\nabla(\hat{e}_u^n + \tilde{e}_u^n)\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h} \leq Ch^{2r} + C \|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + \frac{1}{8} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2. \tag{43}$$

相加可得

$$M_4 \leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{1}{16} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + C \|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + C \|\hat{e}_u^{n-1}\|^2 + \frac{17}{4} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2. \tag{44}$$

对于  $M_5$ ，根据 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
 M_5 &= \beta \left( u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + \delta_\tau \tilde{e}_u^{n+1}, \delta_\tau \hat{e}_u^{n+1} \right) \\
 &\leq \beta \left\| u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} \right\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\| + \beta \|\delta_\tau \tilde{e}_u^{n+1}\| \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\| \\
 &\leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{1}{16\tau^2} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{4} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2.
 \end{aligned} \tag{45}$$

对于  $M_6$ ，根据 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
 M_6 &\leq \frac{1}{2} \tau \left\| \nabla \left( q_t^n - \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\tau} \right) \right\| \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\| + \frac{1}{2} \|\nabla(\tilde{e}_q^{n+1} - \tilde{e}_q^{n-1})\| \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\| \\
 &\leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{1}{16} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2.
 \end{aligned} \tag{46}$$

化简  $M_7$ ，可得



$$\begin{aligned}
 M_7 &= -\left(u^n u_t^n - u_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}, \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1})\right) \\
 &= -\left(u^n \left(u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}\right), \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1})\right) - \left(\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} (u^n - u_h^n), \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1})\right) \\
 &\quad - \left(u_h^n \left(\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\tau}\right), \tau \Delta_h (\hat{e}_q^{n+1} - \hat{e}_q^{n-1})\right) \\
 &= \sum_{i=71}^{73} J_i,
 \end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$J_{71} \leq C\tau^4 + \frac{1}{16} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2. \tag{48}$$

$$J_{72} \leq Ch^{2r} + C\|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + \frac{1}{16} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2. \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 J_{73} &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1} + \nabla \tilde{e}_u^{n+1} + \nabla \hat{e}_u^{n-1} + \nabla \tilde{e}_u^{n-1}\| \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\| \\
 &\leq Ch^{2r} + \frac{1}{4} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2.
 \end{aligned} \tag{50}$$

相加可得

$$M_7 \leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{1}{4} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2 + \frac{3}{8} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2. \tag{51}$$

将上述不等式相加，我们得到

$$\begin{aligned}
 &\tau \|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\tau} (\|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 - \|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2) + \frac{1}{2} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2 + \beta \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|^2 \\
 &\leq C\tau^4 + Ch^{2r} + \frac{3}{8} \|\nabla \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16\tau^2}\right) \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|^2 + \frac{9}{2} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2 \\
 &\quad + \frac{7}{16} \|\nabla \hat{e}_q^{n+1} - \nabla \hat{e}_q^{n-1}\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_u^n\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_u^{n-1}\|^2 + C\|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2.
 \end{aligned} \tag{52}$$

接下来估计

$$\begin{aligned}
 \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2 &= \left(u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}, T_h(\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1})\right) - (\nabla \hat{e}_\omega^n + \nabla \tilde{e}_\omega^n, \nabla T_h(\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1})) \\
 &\leq \left\|u_t^n - \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}\right\| \|T_h(\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1})\| + \|\delta_\tau \tilde{e}_u^{n+1}\| \|T_h(\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1})\| \\
 &\quad + \|\nabla \hat{e}_\omega^n + \nabla \tilde{e}_\omega^n\| \|\nabla T_h(\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1})\| \\
 &\leq C\tau^4 + Ch^{2r} + C\|\nabla \hat{e}_\omega^n\|^2 + \frac{3}{4} \|\delta_\tau \hat{e}_u^{n+1}\|_{-1,h}^2.
 \end{aligned} \tag{53}$$

将上式结果代回(52)式，并从 1 到  $n$  求和。根据 Gronwall 不等式可得，

$$\tau \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_\omega^i\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\tau} \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_u^{i+1}\|^2 + \frac{1}{16} \sum_{i=1}^n \|\nabla \hat{e}_q^{i+1} - \nabla \hat{e}_q^{i-1}\|^2 + \beta \sum_{i=1}^n \|\delta_\tau \hat{e}_u^{i+1}\|^2 \leq C\tau^4 + Ch^{2r}. \tag{54}$$

## 5. 数值模拟

在本节, 采用数值算例验证前面理论分析的结果。具体安排如下: 在第一部分, 我们得到了格式(11)~(13)在不同参数下的收敛结果。第二部分给出了无条件能量耗散图, 验证了系统的稳定性。最后, 粘性 Cahn-Hilliard 模型的相分离图被给出。所有数值算例均由 FreeFem++编程实现。

### 5.1. 收敛性

首先, 给出格式(11)~(13)时间收敛阶和空间收敛阶的结果。计算区域为 $[-1,1] \times [-1,1]$ , 且初值设为

$$u_0 = 0.25 \sin(2x) \cos(2y) + 0.48.$$

#### 5.1.1. 时间收敛阶

在本小节中, 对浓度  $u$  的时间收敛阶进行研究。表 1, 表 2 中, 选择时间步长  $\tau = \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ 。误差  $\|\hat{e}_u^n\|_{H^1}$  较小, 其时间收敛阶总是趋近于 2, 与误差分析得到的时间收敛阶一致, 当变化  $\varepsilon$  和  $\beta$  时, 得到的结果变化较小。

**Table 1.** Error and the temporal convergence ( $\varepsilon = 0.3$  and  $\beta = 2, 4$ )

**表 1.** 误差和时间收敛阶 ( $\varepsilon = 0.3$  and  $\beta = 2, 4$ )

$\tau$	$\beta = 2$	$\ \hat{e}_u\ _{H^1}$	收敛阶	$\beta = 4$	$\ \hat{e}_u\ _{H^1}$	收敛阶
$\frac{1}{64}$		0.074343			0.047937	
$\frac{1}{128}$		0.020612	1.8507		0.010880	2.1394
$\frac{1}{256}$		0.004996	2.0447		0.002814	1.9507

**Table 2.** Error and the temporal convergence ( $\varepsilon = 0.4$  and  $\beta = 4, 6$ )

**表 2.** 误差和时间收敛阶 ( $\varepsilon = 0.4$  and  $\beta = 4, 6$ )

$\tau$	$\beta = 4$	$\ \hat{e}_u\ _{H^1}$	收敛阶	$\beta = 6$	$\ \hat{e}_u\ _{H^1}$	收敛阶
$\frac{1}{64}$		0.069819			0.054153	
$\frac{1}{128}$		0.019121	1.8685		0.013188	2.0377
$\frac{1}{256}$		0.004294	2.1547		0.003101	2.0883

#### 5.1.2. 空间收敛阶

在本小节中, 对浓度  $u$  的时间收敛阶进行研究。在表 3 中, 固定参数  $\tau = 0.01$ , 网格步长为  $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$ 。误差  $\|\hat{e}_u\|_{H^1}$  较小, 其空间收敛阶总是趋近于 2, 与误差分析得到的时间收敛阶一致, 当变化  $\varepsilon$  和  $\beta$  时, 得到的结果变化较小。

**Table 3.** Error and the special convergence ( $\beta = 0.01$  and  $\varepsilon = 0.2, 0.3$ )**表 3.** 误差和空间收敛阶( $\beta = 0.01$  and  $\varepsilon = 0.2, 0.3$ )

$h$	$\varepsilon = 0.2$	$\ \hat{e}_v\ _{H^1}$	收敛阶	$\varepsilon = 0.3$	$\ \hat{e}_v\ _{H^1}$	收敛阶
$\frac{1}{8}$		0.014897			0.009461	
$\frac{1}{16}$		0.004233	1.8151		0.002505	1.9173
$\frac{1}{32}$		0.001085	1.96332		0.000632	1.9858

## 5.2. 无条件能量稳定

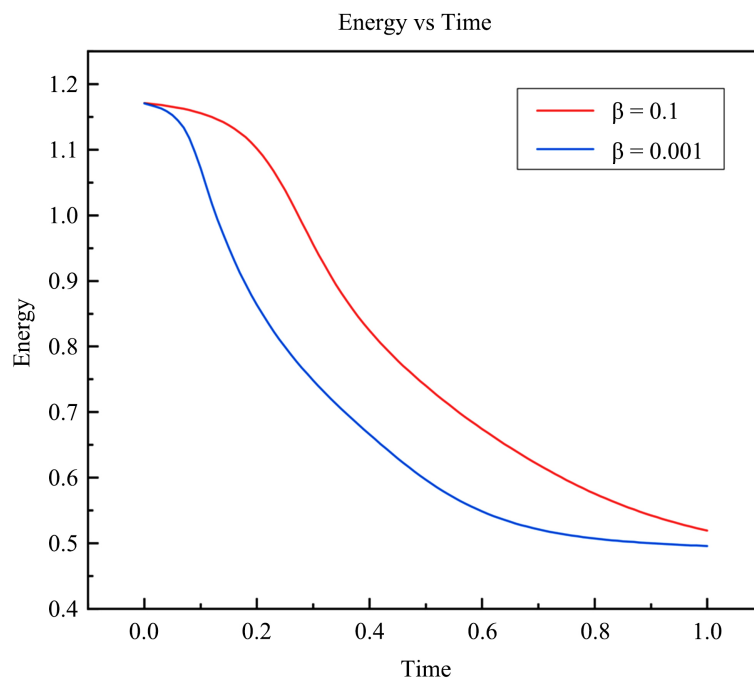
接着, 验证了上述所提格式的稳定性的。粘性 Cahn-Hilliard 模型(3)的能量泛函(4)被离散为

$$E(u_h^{n+1}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u_h^{n+1}|^2 + \frac{1}{4} |q_h^{n+1}|^2 \right) dx$$

且格式(11)~(13)修正的能量为

$$E_h^{n+1,n} = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 + \|u_h^n\|^2 \right) + \frac{1}{4} \left( \|q_h^{n+1}\|^2 + \|q_h^n\|^2 \right).$$

选择参数  $T=1, \varepsilon=0.1$ 。当  $\beta=0.1$  时, 图 1 表明能量由最初递减到逐渐趋于稳定。当  $\beta=0.01$ , 从图 1 中发现, 随着时间的推移, 能量仍然是由最初递减到逐渐趋于稳定。还可以看到不同的  $\beta$  对结果的影响微乎其微, 从而验证了格式(11)~(13)的能量是耗散的, 通过该数值算例验证了定理 3.1 的有效性。

**Figure 1.** Diagram of the practical teaching system of automation major**图 1.** 离散的能量演化

### 5.3. 相分离

在本小节中, 为了更好的观察数值解的变化过程, 模拟粘性 Cahn-Hilliard 模型的相分离。计算区域为  $[0,1] \times [0,1]$ , 模拟参数为  $\varepsilon = 0.1$  和  $\beta = 1$ , 初始条件为

$$u_0 = 2\text{rand}() - 1,$$

其中  $\text{rand}()$  是  $[0,1]$  的一个随机数。从图 2 给出了不同时刻下相分离过程的快照。图中表明随着时间的增加, 相分离现象越来越明显。

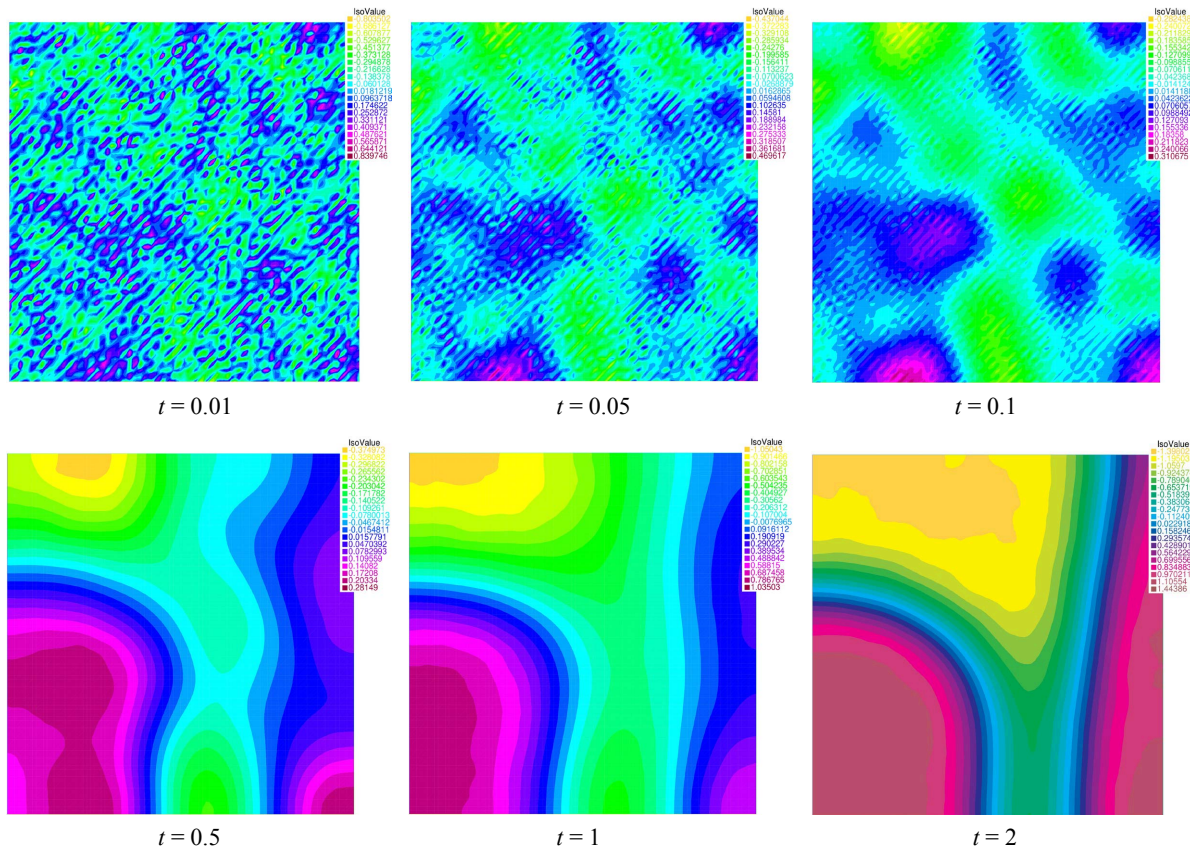


Figure 2. Snapshot of coarsening  
图 2. 粗化快照

## 6. 结论

本文主要提出了一种基于拉格朗日乘子法的粘性 Cahn-Hilliard 方程的能量稳定的二阶数值格式, 然后证明数值格式的稳定性 and 误差分析。最后通过不同的数值实验验证了前面理论的有效性, 时间收敛阶与空间收敛阶表明  $\|\hat{e}_u\|_{L^1}$  的收敛阶接近于 2, 粗化图显示了  $u$  随着时间增长的演化, 能量耗散的数值结果表明能量随着时间的增加而减少, 最后趋于稳定。

## 致 谢

在此感谢山西省回国留学人员科研资助项目(2021-029), 山西省科技合作交流专项项目(202104041101019), 山西省自然科学基金面上项目(202203021211129)的支持。

## 基金项目

山西省回国留学人员科研资助项目(2021-029), 山西省科技合作交流专项项目(202104041101019), 山西省自然科学基金面上项目(202203021211129)。

## 参考文献

- [1] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E. (1958) Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *Journal of Chemical Physics*, **28**, 258-267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
- [2] Puri, S. and Binder, K. (1991) Phenomenological Theory for the Formation of Interfaces via the Interdiffusion of Layers. *Physical Review B*, **44**, 9735-9738. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.44.9735>
- [3] Wang, S.Q. and Shi, Q. (1993) Interdiffusion in Binary Polymer Mixtures. *Macromolecules*, **26**, 1091-1096. <https://doi.org/10.1021/ma00057a033>
- [4] Jabbari, E. and Peppas, N.A. (1995) A Model for Interdiffusion at Interfaces of Polymers with Dissimilar Physical Properties. *Polymer*, **36**, 575-586. [https://doi.org/10.1016/0032-3861\(95\)91567-Q](https://doi.org/10.1016/0032-3861(95)91567-Q)
- [5] 叶兴德, 程晓良. Cahn-Hilliard 方程的 Legendre 谱逼近[J]. 计算数学, 2003, 25(2): 157-170.
- [6] Novick-Cohen, A. (1988) On the Viscous Cahn-Hilliard Equation. In: Ball, J.M., Ed., *Material Instabilities in Continuum and Related Mathematical Problem*, Oxford University Press, Oxford.
- [7] 李亚楠, 王旦霞, 任永华. 具有浓度迁移率和对数势能的粘性 Cahn-Hilliard 方程的有限元算法[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(2): 241-250.
- [8] Yang, X.F., Zhao, J. and He, X.M. (2018) Linear, Second Order and Unconditionally Energy Stable Schemes for the Viscous Cahn-Hilliard Equation with Hyperbolic Relaxation Using the Invariant Energy Quadratization Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **343**, 80-97. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.04.027>
- [9] 李娟. 粘性 Cahn-Hilliard 方程的高精度线性化差分方法[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(1): 51-58.
- [10] 王志丽, 王旦霞, 贾宏恩. 具有对数势能的粘性 Cahn-Hilliard 方程的有限元算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(5): 81-89.
- [11] Elliott, C.M. and Stuart, A.M. (1993) The Global Dynamics of Discrete Semi-Linear Parabolic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **30**, 1622-1663. <https://doi.org/10.1137/0730084>
- [12] Shen, J., Xu, J. and Yang, J. (2018) The Scalar Auxiliary Variable (SAV) Approach for Gradient Flows. *Journal of Computational Physics*, **353**, 407-416. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.10.021>
- [13] Yang, X.F. (2016) Linear, First and Second-Order, Unconditionally Energy Stable Numerical Schemes for the Phase Field Model of Homopolymer Blends. *Journal of Computational Physics*, **327**, 294-316. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.029>
- [14] Guo, Y.Y., Jia, H.E., Li, J.C. and Li, M. (2020) Numerical Analysis for the Cahn-Hilliard-Hele-Shaw System with Variable Mobility and Logarithmic Flory-Huggins Potential. *Applied Numerical Mathematics*, **150**, 206-221. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.09.014>
- [15] Liu, Y., Chen, W.B., Wang, C. and Wise, S.M. (2017) Error Analysis of a Mixed Finite Element Method for a Cahn-Hilliard-Hele-Shaw System. *Numerische Mathematik*, **135**, 679-709. <https://doi.org/10.1007/s00211-016-0813-2>