Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(1), 213-221**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121024

Hans汉斯

关于部分标定简单图的数目

乔凤秋

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月21日；发布日期：2023年1月31日

摘 要

本文讨论部分标定简单图的数目，首先介绍了计算标定简单图的公式，然后确定了当顶点个数为3时的标定简单图的数目为8个。主要证明了当顶点个数为4时的标定简单图的计数以及所有画法，并用数学方法证明了它的数目的精确值为64。最后也给出当顶点个数为4时，非标定简单图的数目为11个以及全部画法。近百年来，国内外很多学者都对这一问题进行了研究。由于所涉及的画法较多并且证明过程较为复杂，国内外关于此领域的研究进展缓慢。相比较而言，本文给出了四个顶点的标定简单图的所有画法，并采用度序列的方法更简洁直观，更具创新性。

关键词

图论，简单图，标定图

On the Number of Partially Labelled Simple Graphs

Fengqiu Qiao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 21st, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we discuss the number of partially labelled simple graphs. First, the formula for calculating the calibrated simple graphs is introduced. Then, when the number of vertices is 3, the number of calibrated simple graphs is determined to be 8. This paper mainly proves the counting and all the drawing methods of the labeled simple graph when the number of vertices is 4, and mathematically proves that the exact value of its number is 64. Finally, when the number of vertices is 4, the number of uncalibrated simple graphs is 11 and all the drawing methods are given. Over the past century, many scholars at home and abroad have studied this issue. Due to the many drawing me-

文章引用: 乔凤秋. 关于部分标定简单图的数目[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 213-221.
DOI: 10.12677/aam.2023.121024

thods involved and the complicated proof process, the research progress in this field at home and abroad is slow. In comparison, this paper gives all the drawing methods of the simple graph of the four vertices, and the method of degree sequence is more concise, intuitive and innovative.

Keywords

Graph Theory, Simple Graph, Labelled Graph

1. 引言

拓扑图论作为图论的一个分支，这个问题的最初研究起源于 1736 年欧拉提出的著名的欧拉公式[1]，其关注的是如何在平面上表示图。图之所以如此命名是因为它们可以用图形来表示，正是这种图形表示帮助了我们理解它们的许多性质。现实世界中的很多情况都可以通过一个由一组点和连接这些点对的简单曲线组成的图来描述，有趣的哥尼斯堡桥问题以及其它的一些实际问题都涉及到图论[2]。

在关于图论的历史研究中，很多结论与猜想都是围绕着一些特殊图类进行的。本论文对部分标定简单图的数目进行了研究，介绍了关于图论的相关基础知识，并给出了如何计算标定简单图的数目的公式，分别确定了当变量为 3 和 4 时的标定简单图的精确值及全部画法，也确定了当变量为 4 时的非标定简单图的精确值及全部画法。

2. 预备知识

避免在本文的相关讨论中产生歧义，首先介绍图论的一些理论并将这些提及的理论应用于本文所研究的问题中。

2.1. 图的定义和表示

定义 1 图 G 是一个有序对($V(G)$，$E(G)$)，这个有序对由一个顶点集 $V(G)$和一个与 $V(G)$不相交的边集 $E(G)$组成。同时，它还与一个关联函数 ψ_G 相关联，此关联函数 ψ_G 将 G 的每一条边映射为 G 的顶点集 $V(G)$中的无序点对。如果 e 是 G 的一条边，u 和 v 是 G 的两个顶点，那么 $\psi_G(e) = \{u, v\}$称为 e 连接了 u 和 v (为了简化，可将无序对$\{u, v\}$记作 uv)，顶点 u 和 v 被称为 e 的端点[3]。

在图 G 中将顶点集的数量记为 $v(G)$，将边集的数量记为 $e(G)$，这两个基本参数分别称为 G 的阶数和大小。若一个图的顶点集合为空集，则称它为空图。

例如，$G = (V(G), E(G))$，令

$$V(G)=\{u,v,w,x,y\}$$

$$E(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ψ_G 被定义为

$$\psi_G(a)=uv，\ \psi_G(b)=uu，\ \psi_G(c)=vw，\ \psi_G(d)=wx$$

$$\psi_G(e)=vx，\ \psi_G(f)=wx，\ \psi_G(g)=ux，\ \psi_G(h)=xy$$

此时，$v(G) = 5$，$e(G) = 8$。

2.2. 图的画法

在一个平面上，一个图的画法是从该图形到平面的一一映射，简记为 D。此映射将图的每一个顶点映射为平面上的点(为清晰起见，顶点用小圆圈表示)，并通过连接其端点位置的简单曲线来表示每条边。

D 的顶点的全体记作 $V(D)$，D 的边的全体记作 $E(D)$。

2.3. 交叉与交叉数

设 D 是图 G 的一个好的画法，边 $e_1,e_2\in E(D)$，$p\notin V(D)$，如果 e_1,e_2 都穿过 p，即它们有一个公共点 p，那么称 e_1 和 e_2 在 D 上相交于 p，也可以将 p 称为 D 上的一个交叉点。图 G 在平面上的最优画法是指在图 G 的所有画法 D 中交叉点的数目是最少的画法，这个数目称为图 G 在画法 D 下的交叉数，简记为 $cr(D)$。

设 A 和 B 是 E 的两个互不相交的边子集，在画法 D 中，$cr_D(A,B)$ 表示由集合 A 中的边与集合 B 中的边产生的交叉个数，用 $cr_D(A)$ 表示由集合 A 中的边与边产生的交叉个数。

2.4. 图的好的画法

图的一个好的画法需要满足以下几点：

1) 没有边与自身交叉；
2) 一条边的两个顶点不能重叠，即一条边包含两个不同的顶点；
3) 相邻的两条边不相交，即具有公共顶点的两条边不产生交叉；
4) 若两条边产生交叉，则交叉点的数量最多是一个；
5) 两条边的相对位置不是相切；
6) 任意三条边不相交于同一个点。

除了特别指出，本文中所提及的所有画法均为好的画法。一个图可能会有多个好的画法，不同的图得到的画法可能相同[4]。

2.5. 同构与自同构

对于两个图 G 和图 H，如果在它们的顶点集合之间存在着一个保持邻接性的一一映射 $\phi:V(G)\to V(H)$，使得对于任意 $u,v\in V(G)$，有 $\phi(u),\phi(v)\in V(H)$，同时满足 $(u,v)\in E(G)$ 当且仅当 $(\phi(u),\phi(v))\in E(H)$，则称图 G 和图 H 是同构的，记作 $G\cong H$。

一个图 G 的自同构指的是图 G 与它自身的一个同构。

一个图的自同构可以反映出它的对称性。

2.6. 标定图与非标定图

如果一个图的顶点或边标出了文字，则称为标定图。否则，均未标记文字的图称为非标定图。

2.7. 度

在图 G 中，一个顶点 v 的度是指与顶点 v 相关联的 G 的边的数目，每个自环计数两次，顶点的度用 $d_G(v)$表示。特别地，如果 G 是一个简单图，那么 $d_G(v)$是 G 中顶点 v 的邻居的数目。度为零的顶点称为孤立点[5]。

更多交叉数方面的知识见文[1]及其参考文献。

3. 三个顶点的所有标定简单图

定理 1 对于有 n 个顶点的简单图 G，其顶点集为 $V(G):=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则它的标定简单图有 $2^{\binom{n}{2}}$ 个。

引理 1 当 $n = 3$ 时，其标定简单图有 8 个。

图 1 给出了三个顶点的所有标定简单图。

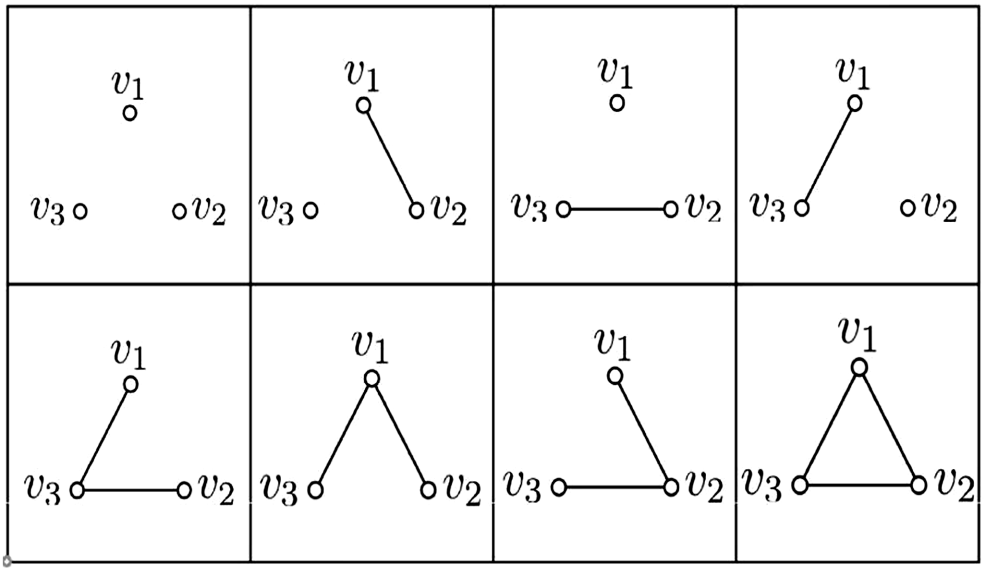


Figure 1. The eight labelled simple graphs on three vertices
图 1. 三个顶点的 8 个标定简单图

4. 四个顶点的所有标定简单图

引理 2 当 $n = 4$ 时，其标定简单图的个数为 64。

证明 假设 G 为四个顶点的简单图，则顶点集的数量 $v(G) = 4$，边集的数量的最大值为 6，此时 G 为完全图 K4。由顶点的度之和以及度的相关性质可知，在这四个顶点中，任意两个顶点的度不能为 0 和 3 (即 0 度顶点和 3 度顶点不能同时存在)。

根据边集的数目可分为以下 7 种情况进行讨论。

1) 边集的数目为 0 当且仅当 G 为空图。如图 2 所示。

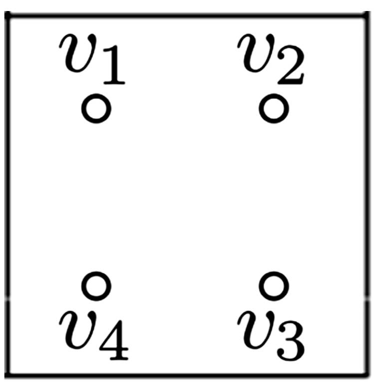


Figure 2. The labelled simple graphs on four vertices
图 2. 四个顶点的标定简单图

2) 当边集数目为 1 时，在此情况下标定简单图有 $C_4^2 = 6$ 个。如图 3 所示。

当边集数目为 2 时，所有顶点的度之和为 4，那么度序列有以下三种子情况。

子情况 1 度序列为 0112。此时图 G 有 12 种标定简单图的情况。如图 4 所示。

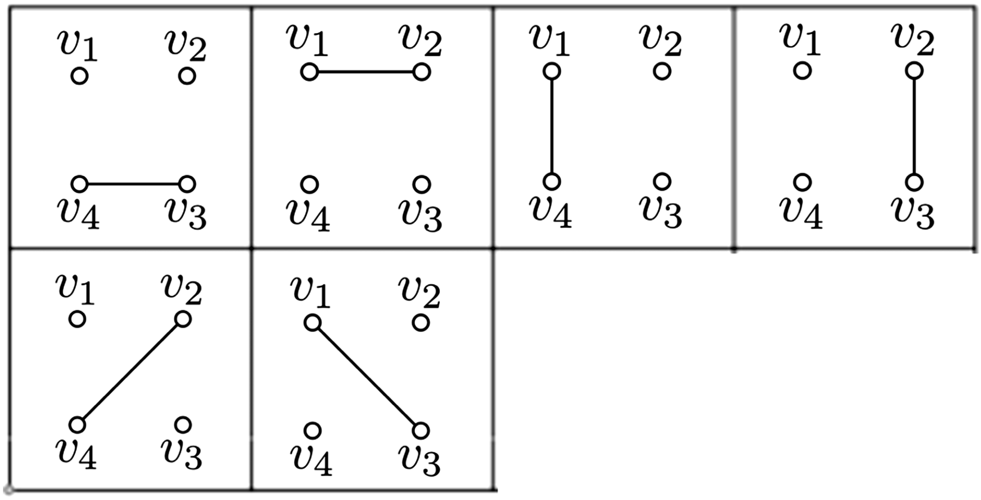


Figure 3. The labelled simple graphs on four vertices
图 3. 四个顶点的标定简单图

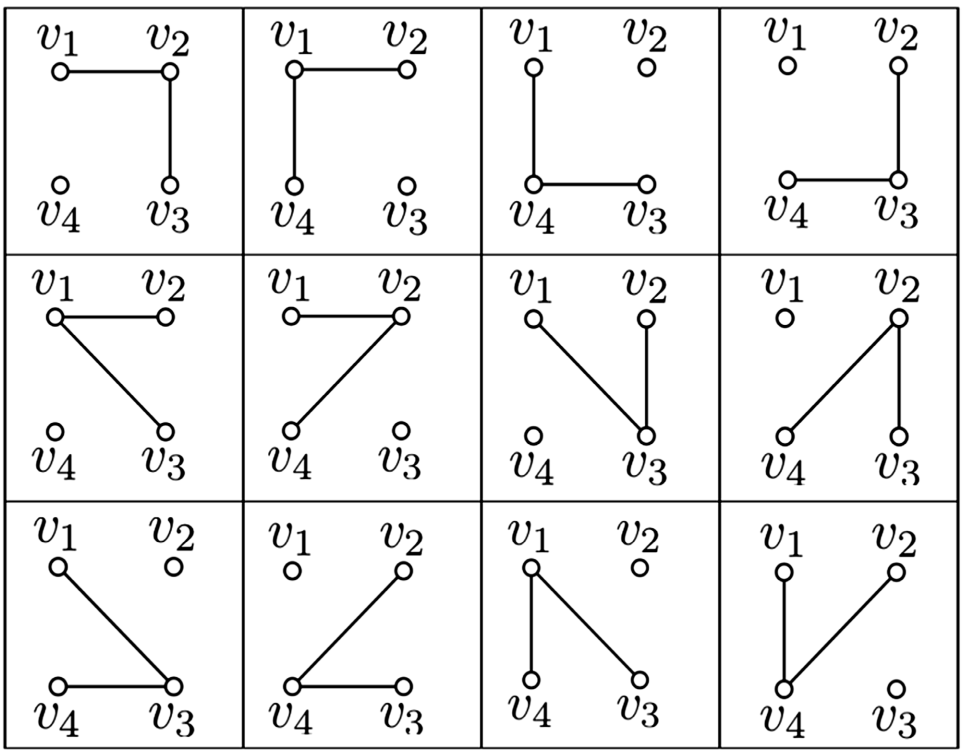


Figure 4. The labelled simple graphs on four vertices
图 4. 四个顶点的标定简单图

子情况 2 度序列为 0022。此时图 G 为圈或自环，不是简单图。

子情况 3 度序列为 1111。此时图 G 有 3 种为标定简单图的情况。如图 5 所示。

4) 当边集数目为 3 时，所有顶点的度之和为 6，度序列有三种子情况。

子情况 1 度序列为 1122。此时图 G 有 12 种为标定简单图的情况。如图 6 所示。

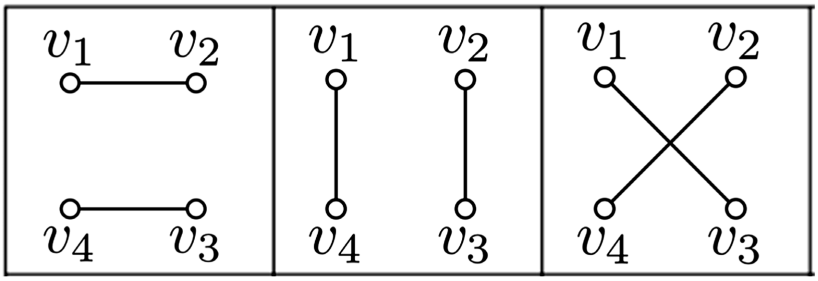


Figure 5. The labelled simple graphs on four vertices
图 5. 四个顶点的标定简单图

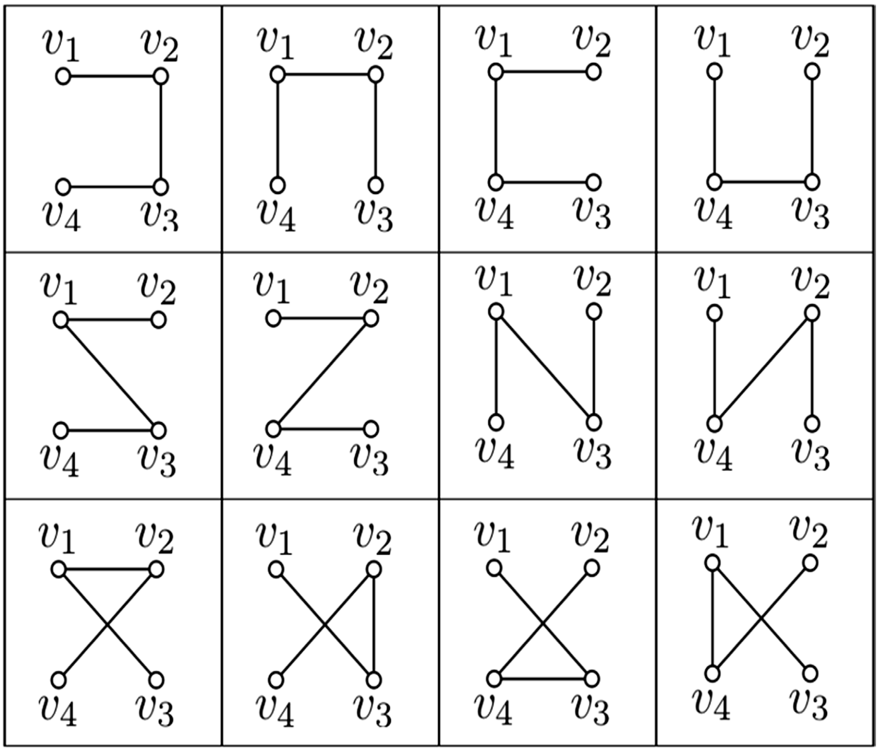


Figure 6. The labelled simple graphs on four vertices
图 6. 四个顶点的标定简单图

子情况 2 度序列为 0222。此时图 G 有 4 种为标定简单图的情况。如图 7 所示。

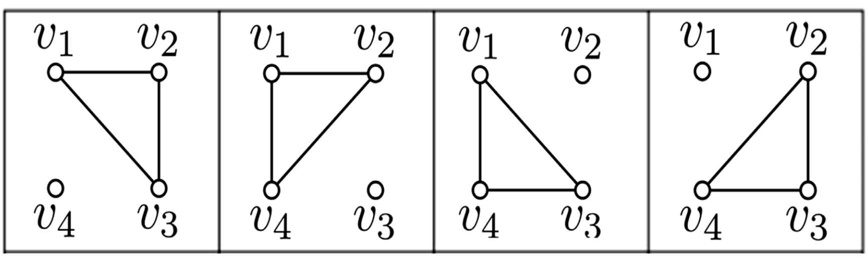


Figure 7. The labelled simple graphs on four vertices
图 7. 四个顶点的标定简单图

子情况 3 度序列为 1113。此时图 G 有 4 种为标定简单图的情况。如图 8 所示。

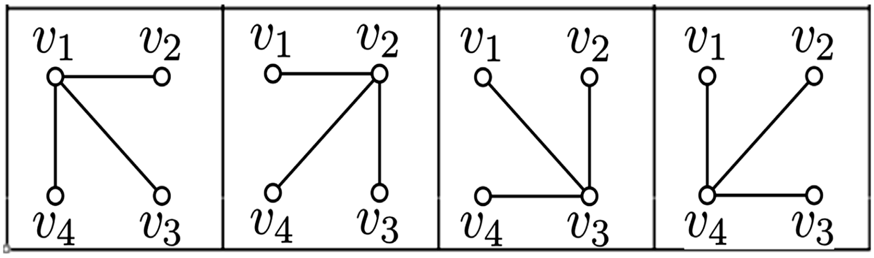


Figure 8. The labelled simple graphs on four vertices
图 8. 四个顶点的标定简单图

5) 当边集数目为 4 时，所有顶点的度之和为 8，并且每个点的度最少为 1，因此度序列有三种子情况。

子情况 1 度序列为 1133。此时图 G 包含圈或自环，不是简单图。

子情况 2 度序列为 2222。此时图 G 有 3 种为标定简单图的情况。如图 9 所示。

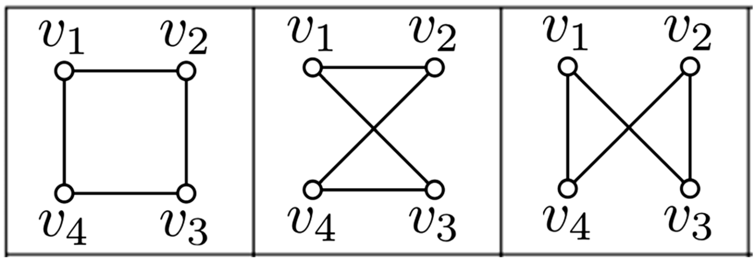


Figure 9. The labelled simple graphs on four vertices
图 9. 四个顶点的标定简单图

子情况 3 度序列为 1223。此时图 G 有 12 种为标定简单图的情况。如图 10 所示。

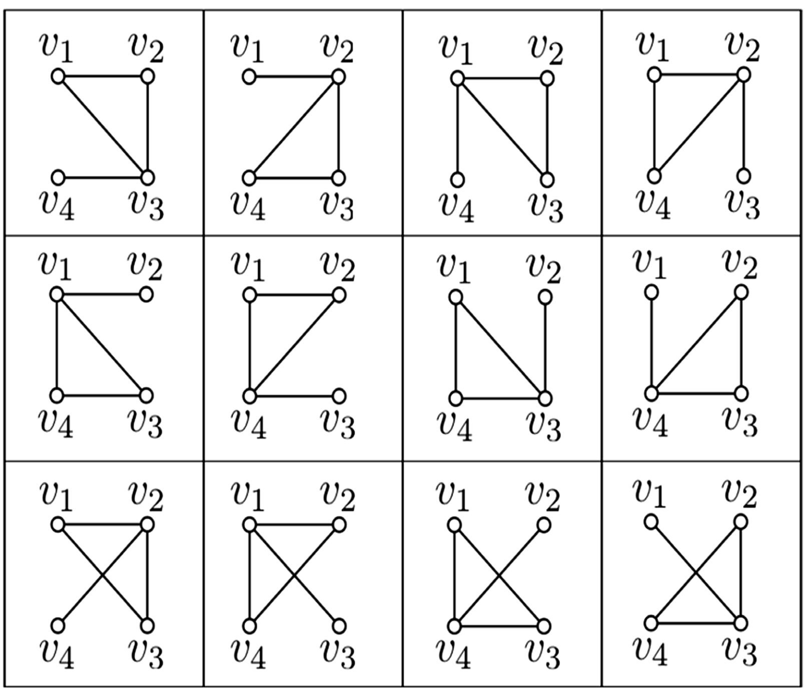


Figure 10. The labelled simple graphs on four vertices
图 10. 四个顶点的标定简单图

6) 当边集数目为 5 时，标定简单图有 $C_4^2=6$ 个。如图 11 所示。

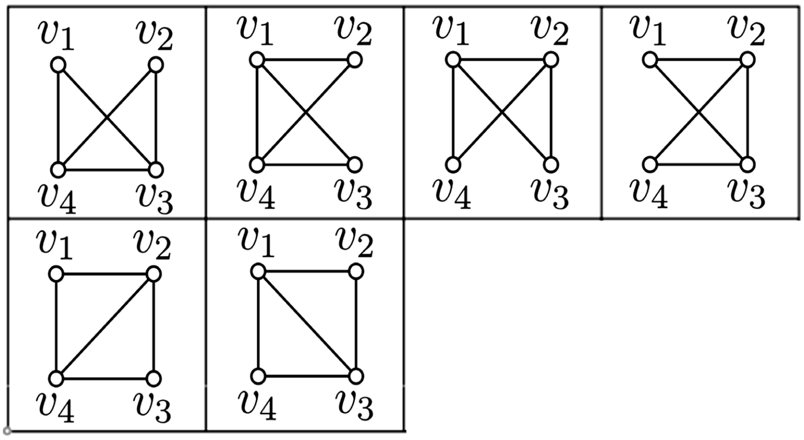


Figure 11. The labelled simple graphs on four vertices
图 11. 四个顶点的标定简单图

7) 边集的数目为 6 当且仅当 G 为完全图 K4。如图 12 所示。

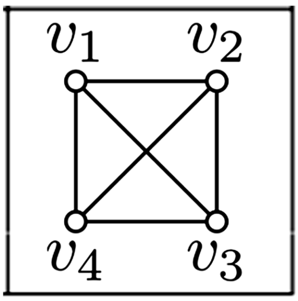
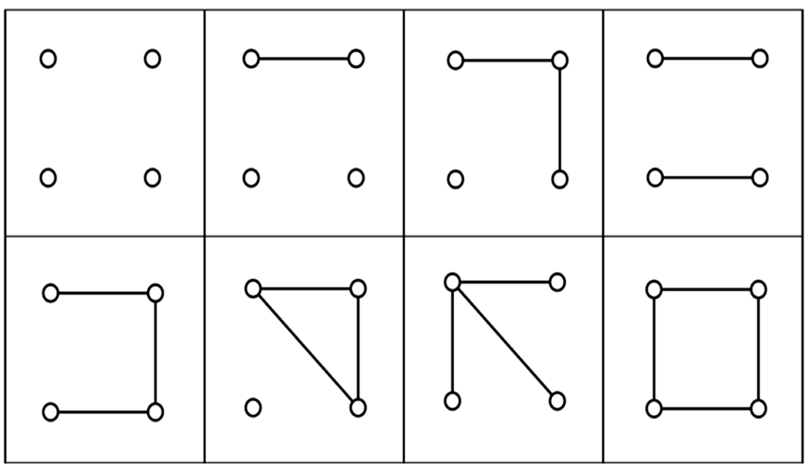


Figure 12. The labelled simple graphs on four vertices
图 12. 四个顶点的标定简单图

5. 四个顶点的所有非标定简单图

经过验证，四个顶点的非标定简单图共 11 个，如图 13 所示。



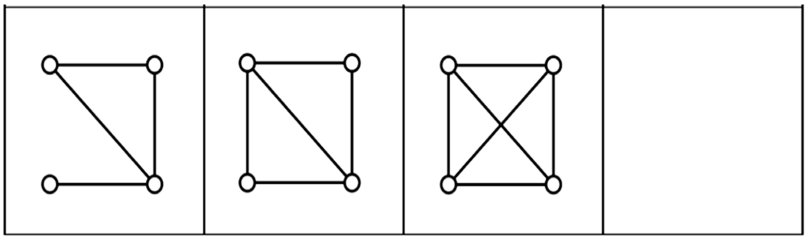


Figure 13. The unlabelled simple graphs on four vertices
图 13. 四个顶点的非标定简单图

6. 结论

本文介绍了关于图论的基础知识，通过定理 1 的计算方法给定了四个顶点的标定简单图的数目，并构造出了全部画法。通过度序列的方法得到所有画法后，进一步与数学证明相结合，确定了四个顶点的标定简单图的数目的精确值为 64 个。最后给出了四个顶点的非标定简单图的数目为 11 个。

参考文献

[1] Harary, F. (1972) Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, Boston.

[2] Bondy, J. and Murty, U. (1976) Graph Theory with Its Applications. American Elsevier, New York.

[3] Clancy, K., Haythorpe, M. and Newcombe, A. (2020) A Survey of Graphs with Known or Bounded Crossing Numbers, Australas. *Journal of Combinatorics*, **78**, 209-296.

[4] Wang, J., Ouyang Z. and Huang, Y. (2013) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph P(10, 3) Is Six. *International Journal of Computer Mathematics*, **90**, 1373-1380. https://doi.org/10.1080/00207160.2012.756478

[5] Zheng, W., Lin, X., Yang, Y. and Yang, X. (2008) The Crossing Number of Flower Snarks and Related Graphs. *Ars Combinatoria*, **86**, 57-64.