Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(1), 411-427**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121044

一类p-Laplace方程基态解的存在性

刘文静，许丽萍*

河南科技大学数学与统计学院，河南 洛阳

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月21日；发布日期：2023年1月31日

摘 要

文章研究了如下形式的 **p-Laplace** 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V|u|^{p-2}u = f(u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，常数 $V > 0$。当非线性项 f 在无穷远处满足超线性但不满足通常的 **Ambrosetti-Rabinowitz** (简称**AR**) 条件时，通过运用新的技巧，借助 **Pohozaev** 恒等式，获得了上述方程基态解的存在性，所得结果推广了相关文献的研究成果。

关键词

p-Laplace方程，**Pohozaev**恒等式，变分法，基态解

Existence of Ground State Solutions for a Class of p-Laplace Equations

Wenjing Liu, Liping Xu*

School of Mathematics and Satistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan

Received: Dec. 28^{th}, 2022; accepted: Jan. 21^{st}, 2023; published: Jan. 31^{st}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 刘文静，许丽萍. 一类p-Laplace方程基态解的存在性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 411-427.
DOI: 10.12677/aam.2023.121044

Abstract

In this paper, we study the following p-Laplace type equation:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V|u|^{p-2}u = f(u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

where $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $V > 0$ is constant. By introducing some new tricks and Pohozaev equality, when the nonlinear function f satisfies the superlinear condition at infinity, the existence of ground state solution of this equation is obtained without assuming Ambrosetti–Rabinowitz type condition. Our results generalize the research results of related literatures.

Keywords

p-Laplace Equations, Pohozaev Equality, Variational Methods, Ground State Solutions

1. 引言

本文研究如下类型的 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V|u|^{p-2}u = f(u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p-Laplace 算子, $1 < p < N$, $N > 2$, 常数 $V > 0$, 非线性项 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足下列假设条件：

$(F1)$ $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 且对任意 $r \in (p, p^*)$, 存在常数 $C_0 > 0$ 使得 $f(t)$ 满足：

$$|f(t)| \le C_0 \left(1 + |t|^{r-1}\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

其中当 $p < N$ 时, $p^* = \frac{Np}{N-p}$; 当 $p \ge N$ 时, $p^* = +\infty$;

$(F2)$ 当 $t \to 0,\ f(t) = o(|t|^{p-1})$;

$(F3)$ 存在数α满足$p < \alpha < p^*$, 使得 $\lim\inf\limits_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{|t|^{\alpha}} > 0$, 其中 $F(t) = \int_0^t f(s)ds$;

$(F4)$ 存在正数 $\mu > p$ 以及正数 $L > 0$ 使得

$$f(t)\,t - \mu F(t) \geq 0, \forall |t| \geq L;$$

$(F5)$ 存在常数 $r_0 > 0$ 使得

$$F(t) \geq 0,\ \forall\,|t| \geq r_0;$$

以及存在正数 $\mu > p$ 使得

$$f(t)\,t - \mu F(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R};$$

$(F6)$ 在区间 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上 $t \to \frac{f(t)}{|t|^{\mu-1}}$ 单调递增, 其中 μ 按 $(F4)$ 或 $(F5)$ 中的定义.

p-Laplace 方程有着广泛而重要的物理应用背景, 如在流体力学和非线性弹性力学等学科中该方程都有广泛的应用. 近年来学者们对 p-Laplace 方程解的存在性和多解性等进行了深入的研究, 得到了许多重要结果, 详细情况见文献 [1–7].

文献 [8]研究了如下一类 p-Laplace 方程:

$$-\Delta_p u = f(x, u), u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 具有光滑的边界 $\partial\Omega$, $p > 1$, 非线性项 $f(x, u)$ 是超线性和次临界的且满足下列条件:

$$\exists\,\mu > p,\ R > 0\ \ s.\,t.\ \ |t| \geq R \Longrightarrow 0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t)\,t,$$

其中 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)ds$. 作者不仅证明了该方程存在一个正解和一个负解, 还证明了变号解的存在性.

文献 [9]研究了如下形式的 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda V|u|^{p-2}u + g(x, u), \text{在}\Omega\text{中}, \\ u = 0, \text{在}\partial\Omega\text{上}, \end{cases}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界开子集, $1 < p < \infty$, $V \in L^{\infty}(\Omega)$. $g(x, u)$ 满足下列条件:

$$\exists\,\mu > p,\ R > 0\ \ s.\,t.\ \ |s| \geq R \Longrightarrow 0 < \mu G(x, s) \leq sg(x, s),$$

其中 $G(x, s) = \int_0^s g(x, t)dt$. 结合其他假设条件, 作者证明了对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 该方程的非平凡解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

近期,文献 [10]研究如下类型 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} -\varepsilon^p \Delta_p u + V(z)|u|^{p-2}u = f(u), z \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ u(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon > 0, 2 \le p < N, V(z) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 在非线性项 $f(u)$ 满足适当的假设条件下, 作者利用下列 Ambrosetti-Rabinowitz (简称AR) 超线性条件:

$$\exists\, \mu > p \;\; s.\,t.\;\; 0 < \mu F(t) \le f\,(t)\,t,\; \forall\, t > 0$$

证明了该方程正解的存在性和多重性, 其中 $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

文献 [11]研究了如下一类 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

其中 $p > 1, V(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. 非线性项 $f(x,u)$ 满足下列给定的条件:

$$\exists\, \mu > p \;\; s.\,t.\;\; 0 \le \mu F(x,t) \le f\,(x,t)\,t,\; \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

易知此条件比 AR 条件要弱一些.作者在此条件下证明了该方程基态解的存在性.

文献 [12]研究了如下一类 p-Laplace 方程:

$$-\Delta_p u + V(x)u^{p-1} - \frac{1}{2}u\Delta u^2 = |u|^{q-1}\,u,\; x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $N \ge 3,\; p \in [2, \frac{4N}{N-p}),\; q \in (1,3),\; q+1 > p$. 在 $V(x)$ 满足一定假设条件下, 利用 Pohozaev 恒等式和集中紧性引理证明了该方程正基态解的存在性.

受上述文献启发, 我们利用新的技巧并借助 Pohozaev 恒等式, 获得了方程 (1) 的基态解的存在性, 并推广了已有文献的结果. 所得结果如下:

定理1.1 若条件 $(F1) - (F4)$ 成立, 则问题 (1) 存在一个基态解.

定理1.2 若条件 $(F1)$, $(F2)$ 以及 $(F5)$ 成立, 则问题 (1) 存在一个具有正能量的基态解.

定理1.3 若条件 $(F1)$, $(F2)$ 以及 $(F6)$ 成立, 则问题 (1) 存在一个具有正能量的基态解.

注1: 与上述文献相比, 本文采用广义的极小极大原理, 通过一个新的技巧, 构造了泛函 I 的 Cerami 序列的存在性, 为今后在其它椭圆问题的研究中构造泛函 Cerami 序列的存在性提供了新的思路.

注2: 的确存在函数 $f(t)$ 满足定理中给定的条件, 如

$$f_1(t)=\begin{cases}|t|^{q-2}t,\ |t|\geq L\\ L^{q-p}t^{p-1},\ |t|<L\end{cases}$$

其中 $p<q<p^*$. 分别令 $(F3)$, $(F4)$ 中 $q<\alpha<p^*$, $q<\mu<p^*$, 易验证 $f_1(t)$ 满足定理 1.1 的条件但不满足定理 1.2 中的条件 $(F5)$. 又如 $f_2(t)=\sum_{i=1}^m|t|^{q_i-2}t$, 其中 $p<q_i<p^*$, m 是正整数. 此时令 $(F5)$ 中的 $p<\mu<q_i<p^*$, 易知 $f_2(t)$ 满足定理 1.2 的所有条件但对于某些μ 不满足定理 1.3 中的条件 $(F6)$.

2. 预备知识及变分结构

在这一部分我们给出问题的变分框架以及一些基本知识, 并引入相应的一些记号. 用 $\|\cdot\|_s$ 表示通常空间 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中的范数, 这里 $1\leq s\leq\infty$, 并且用 c_i, C, $C_i(i=0,1,2...)$ 表示不同的正数. 设

$$X=\left\{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx<\infty\right\},$$

其中常数 $V>0$.

引入范数

$$\|u\|=(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx)^{\frac{1}{p}},u\in X,$$

易知该范数与空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中的范数: $\|u\|_{1,p}=(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+|u|^p)dx)^{\frac{1}{p}}$ 等价.

定义方程 (1) 的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx. \tag{2}$$

在条件 $(F1)$ 和 $(F2)$ 假设下, 利用文献 [13]的定理 1.22 易证 $I\in C^1(X,\mathbb{R})$, 并且其 Gateaux 微分为:

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v+V|u|^{p-2}uv\right)dx-\int_{\mathbb{R}^N}f\left(u\right)vdx, \tag{3}$$

由此可知 $u\in X$ 是 I 的一个临界点, 当且仅当 u 是问题 (1) 的一个弱解. 由于范数 $\|u\|$ 与范数 $\|u\|_{1,p}$ 等价, 故由 Sobolev 嵌入定理可知, 当 $p\leq s\leq p^*$ 时,嵌入 $X\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ 是连续的, 即对于任意 $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$, 存在常数 $C_s>0$ 使得

$$\|u\|_s\leq C_s\|u\|,$$

且当 $p\leq s<p^*$ 时, 上述嵌入是紧的. 另外记 $B_\rho(0)=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|\leq\rho\}$.

3. 主要结果的证明

下面我们利用 Pohozaev 恒等式以及一个极大极小定理证明方程 (1) 基态解的存在性. 首先给出几个引理:

引理3.1 若 u 是泛函 I 的临界点, 则 u 满足下列 Pohozaev 恒等式:

$$P(u)=\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx+\frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V|u|^p dx-N\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx=0. \tag{4}$$

注：上述结果可参考文献 [14]和 [15]证得, 为简便起见, 在此略去其证明过程.
令

$$\begin{aligned}J(u)&:=\langle I'(u),u\rangle-P(u)\\&=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-\int_{\mathbb{R}^N}f(u)udx\\&-\frac{1}{p}\left[(N-p)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx+N\int_{\mathbb{R}^N}V|u|^p dx-Np\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx\right]\\&=\frac{2p-N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx+\frac{p-N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}V|u|^p dx+\int_{\mathbb{R}^N}[NF(u)-f(u)u]\,dx.\end{aligned}$$

以及

$$M:=\left\{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}:I'(u)=0\right\},$$

那么对于 $\forall u\in M$, 就有 $J(u)=0$. 为了证明 $M\neq\emptyset$, 我们运用下面文献 [16]中的极小极大原理.

引理3.2 设 X 是一个 Banach 空间, M_0 是距离空间 M 的闭子空间, $\Gamma_0\subset C(\mathsf{M}_0,X)$, 定义

$$\Gamma:=\{\gamma\in C(\mathsf{M},X):\gamma|_{\mathsf{M}_0}\in\Gamma_0\}.$$

如果 $\phi\in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足

$$\infty>c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{u\in\mathsf{M}}\phi(\gamma(u))>a:=\sup_{\gamma_0\in\Gamma_0}\sup_{u\in\mathsf{M}_0}\phi(\gamma_0(u)),$$

且若对任意 $\varepsilon\in\left(0,\frac{c-a}{2}\right)$, $\delta>0$ 和 $\gamma\in\Gamma$, 有不等式 $\sup\limits_{\mathsf{M}}\phi\circ\gamma\leq c+\varepsilon$ 成立, 则存在 $u\in X$ 使得下面三个结论成立:

1. $c-2\varepsilon\leq\phi(u)\leq c+2\varepsilon$;
2. $dist(u,\gamma(\mathsf{M}))\leq 2\delta$;
3. $\|\phi'(u)\|<\frac{8\varepsilon}{\delta}$.

受文献 [17]的启发, 下面利用引理 3.2 构造一个泛函 I 的 Cerami 序列.

引理3.3 假设 f 满足条件 $(F1)-(F4)$. 那么存在一个序列 $\{u_n\}\subset W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足

$$I\left(u_n\right)\to c>0,\ \left\|I'\left(u_n\right)\right\|\left(1+\left\|u_n\right\|\right)\to 0, \tag{5}$$

其中

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I\left(\gamma\left(t\right)\right),\ \ \Gamma:=\left\{\gamma\in C\left(\left[0,1\right],W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right):\gamma\left(0\right)=0,\ I\left(\gamma\left(1\right)\right)<0\right\}.$$

证 这里我们先证明 Γ 不是空集以及 $0<c<+\infty$. 根据 $(F1),(F2)$ 可知, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在一个常数 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$f\left(t\right)t\le\varepsilon t^p+C_\varepsilon|t|^r,\ F\left(t\right)\le\varepsilon t^p+C_\varepsilon|t|^r. \tag{6}$$

根据 Sobolev 嵌入不等式和 (2), 存在常数 $C_p,C_r>0$, 对于任意的 $u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\begin{aligned} I\left(u\right)&=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx\\ &\ge\frac{1}{p}\left\|u\right\|^p-\varepsilon\left\|u\right\|_p^p-C_\varepsilon\left\|u\right\|_r^r\\ &\ge\frac{1}{p}\left\|u\right\|^p-\varepsilon C_p\left\|u\right\|^p-C_\varepsilon C_r\left\|u\right\|^r.\end{aligned} \tag{7}$$

根据上式, 一定存在常数 $\rho_0>0,\ a_0>0$ 使得

$$I\left(u\right)\ge 0,\ \forall\left\|u\right\|\le\rho_0;\ I\left(u\right)\ge a_0,\ \forall\left\|u\right\|=\rho_0. \tag{8}$$

由 $(F1),(F2),(F3)$ 可知,存在常数 $Q>0$ 以及 $C(Q)>0$ 使得对于任意 $u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, 有

$$F(u)\ge Q\left|u\right|^\alpha-C(Q)\left|u\right|^p,$$

因此对于任意固定的 $u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $u\ne 0$ 以及 $\forall t>0$ 有

$$\begin{aligned} I\left(tu\right)&=\frac{|t|^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(tu)dx\\ &\le\frac{|t|^p}{p}\|u\|^p-Qt^\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^\alpha dx+C(Q)t^p\int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^p dx.\end{aligned}$$

由于 $\alpha>p$ 可得

$$\sup_{t\ge 0}I\left(tu\right)<\infty,\ I\left(tu\right)\to-\infty,\ t\to+\infty. \tag{9}$$

根据 (9), 选择 $T>0$ 足够大使得 $I(Tu)<0$. 令 $\gamma_T\left(t\right)=tTu$ 其中 $t\in[0,1]$. 那么 $\gamma_T\in C\left(\left[0,1\right],W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ 且满足 $\gamma_T\left(0\right)=0,\ I\left(\gamma_T\left(1\right)\right)<0$ 以及 $\max\limits_{t\in[0,1]}I\left(\gamma_T\left(t\right)\right)<\infty$, 这就意味着 Γ 不是空集以及 $c<\infty$. 对 $\forall\gamma\in\Gamma$, 由于 $\gamma\left(0\right)=0,\ I\left(\gamma\left(1\right)\right)<\infty$, 那么由 (8) 有 $\left\|\gamma\left(1\right)\right\|>\rho_0$. 根据 $\gamma\left(t\right)$

的连续性以及介值定理, $\exists t_\gamma \in (0,1)$ 使得 $\|\gamma(t_\gamma)\|=\rho_0$, 因此我们有

$$\sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_\gamma)) \geq a_0 > 0,\ \forall \gamma \in \Gamma,$$

于是可得

$$\infty > c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq a_0 > 0. \tag{10}$$

受文献 [17]启发, 定义连续映射

$$h : \tilde{H} := \mathbb{R} \times W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right),\ h(s,v)(x) = e^s v(e^s x),$$

其中 $s \in \mathbb{R}$, $v \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $x \in \mathbb{R}^N$, 这里 $\tilde{H}$ 是 Banach 空间并具备范数 $\|(s,v)\|_{\tilde{H}} := (|s|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}$. 接下来, 构造一个辅助泛函:

$$\begin{aligned}\Psi(s,v) &= I(h(s,v))\\ &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h(s,v)|^p + V|h(s,v)|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(h(s,v))dx \\ &= \frac{e^{(2p-N)s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx + \frac{e^{(p-N)s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V|v|^p dx - e^{-Ns}\int_{\mathbb{R}^N} F(e^s v)dx.\end{aligned} \tag{11}$$

由于泛函 $I \in C^1$ 以及映射 h 的连续性可以证明 $\Psi \in C^1\left(\tilde{H}, \mathbb{R}\right)$, 具体证明方法可参考文献 [17]. 根据 h 的定义, 泛函 Ψ 对 s 求导可得

$$\begin{aligned}\partial_s \Psi(s,v) = (2p-N)\frac{e^{(2p-N)s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx + (p-N)\frac{e^{(p-N)s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V|v|^p dx \\ + e^{-Ns}\int_{\mathbb{R}^N} \left[NF(e^s v) - f(e^s v)e^s v\right] dx = J(h(s,v)).\end{aligned} \tag{12}$$

此外,对于固定 $s \in \mathbb{R}$, 由于映射 $v \mapsto h(s,v)$ 是线性的, 我们有

$$\partial_v \Psi(s,v) w = I'(h(s,v))\, h(s,w),\ s \in \mathbb{R},\ v,w \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{13}$$

现在, 我们定义 Ψ 的一个极大极小值 $\tilde{c}$,

$$\tilde{c} = \inf_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}}\max_{t\in[0,1]} \Psi(\tilde{\gamma}(t)),$$

其中

$$\tilde{\Gamma}=\left\{\tilde{\gamma} \in C\left([0,1], \tilde{H}\right) : \tilde{\gamma}(0) = (0,0),\, \Psi(\tilde{\gamma}(1)) < 0\right\}.$$

由于 $\Gamma=\left\{h \circ \tilde{\gamma} : \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}\right\}$, I 与 Ψ 的极大极小值一样, 即 $c = \tilde{c}$. 根据 c 的定义, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma_n \in \Gamma$ 使得

$$\max_{t\in[0,1]} \Psi(0, \gamma_n(t)) = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n(t)) \leq c + \frac{1}{n^2}.$$

将引理 3.2 应用到映射 Ψ 知, M= $[0,1]$, $\mathrm{M}_0=\{0,1\}$, $\tilde{H},\tilde{\Gamma}$ 分别是 X,Γ 的子空间. 令 $\varepsilon_n=\frac{1}{n^2}$, $\delta_n=\frac{1}{n}$ 以及 $\tilde{\gamma}_n(t)=(0,\gamma_n(t))$. 根据 (10) 可知, 当 n 足够大时 $\varepsilon_n=\frac{1}{n^2}\in\left(0,\frac{c}{2}\right)$, 存在 $(s_n,v_n)\in\tilde{H}$ 使得当 $n\to\infty$,

$$\Psi(s_n,v_n)\to c, \tag{14}$$

$$\|\Psi'(s_n,v_n)\|_{\tilde{H}*}(1+\|(s_n,v_n)\|_{\tilde{H}})\to 0, \tag{15}$$

$$dist((s_n,v_n),\{0\}\times\gamma_n([0,1]))\to 0. \tag{16}$$

此外, (16) 意味着 $s_n\to 0$. 由于

$$\langle\Psi'(s_n,v_n),(\tau,w)\rangle=\langle I'(h(s_n,v_n)),h(s_n,w)\rangle+J(h(s_n,v_n))\tau,\ \forall(\tau,w)\in\tilde{H}, \tag{17}$$

根据 (12) 和 (13), 我们令 (17) 中 τ=1 以及 $w=0$, 得到当 $n\to\infty$,

$$J(h(s_n,v_n))\to 0. \tag{18}$$

令 $u_n:=h(s_n,v_n)$. 根据 (14), 当 $n\to\infty$,

$$I(u_n)\to c. \tag{19}$$

对于给定的 $v\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, 记 $w_n=e^{-s_n}v(e^{-s_n}\cdot)\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, 根据 (15), (17) 和 (18), 并令 (17) 式中的 τ=0. 那么

$$(1+\|u_n\|)|\langle I'(u_n),v\rangle|=(1+\|u_n\|)|\langle I'(u_n),h(s_n,w_n)\rangle|=o(1)\|w_n\|, \tag{20}$$

由前面得到的 $s_n\to 0$, 当 $n\to\infty$ 有

$$(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|\to 0.$$

证毕.

引理3.4 假设 f 满足条件 $(F1),(F2),(F5)$. 那么存在一个序列 $\{u_n\}\subset W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足

$$I(u_n)\to c>0,\ \|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0,$$

其中

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)),\quad \Gamma:=\left\{\gamma\in C\left([0,1],W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right):\gamma(0)=0,\ I(\gamma(1))<0\right\}.$$

证 该证明过程与引理 3.3 的证明过程大部分类似, 故这里只写出与引理 3.3 的证明过程的不

同之处, 即证明 $\sup\limits_{t\geq 0} I(tu)<\infty,\ I(tu)\to-\infty,\ t\to+\infty$. 对于任意固定的 $u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $u\neq 0$ 有

$$I(tu)=\frac{|t|^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-\int_{\mathbb{R}^N}F(tu)dx.$$

根据 $(F5)$, 对于任意 $t>0$ 可得, $F(t)\geq t^\mu$, 故

$$I(tu)\leq\frac{|t|^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V|u|^p)dx-t^\mu\int_{\mathbb{R}^N}|u|^\mu dx,$$

从而

$$\sup_{t\geq 0} I(tu)<\infty,\ I(tu)\to-\infty,\ t\to+\infty.$$

证毕.

引理3.5 假设 f 满足条件 $(F1),(F2),(F6)$. 那么存在一个序列 $\{u_n\}\subset W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足

$$I(u_n)\to c>0,\ \|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0,$$

其中

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),\ \ \Gamma:=\left\{\gamma\in C\left([0,1],W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right):\gamma(0)=0,\ I(\gamma(1))<0\right\}.$$

证 根据引理 3.4, 只需证明条件 $(F5)$ 成立即可. 由 $(F6)$ 知, 当 $u>0$ 时,

$$F(u)=\int_0^1 f(ut)udt=\int_0^1\frac{f(ut)}{(ut)^{\mu-1}}u^\mu t^{\mu-1}dt\leq\int_0^1\frac{f(u)}{(u)^{\mu-1}}u^\mu t^{\mu-1}dt=\frac{1}{\mu}uf(u).$$

当 $u<0$ 时,

$$F(u)=\int_0^1 f(ut)udt=-\int_0^1\frac{f(ut)}{(-ut)^{\mu-1}}u^\mu t^{\mu-1}dt\leq\int_0^1\frac{f(u)}{(u)^{\mu-1}}u^\mu t^{\mu-1}dt=\frac{1}{\mu}uf(u).$$

因此, 条件 $(F5)$ 成立, 引理得证.

引理3.6 假设定理 1.1 的条件成立. 若序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n)\to c>0,\ \|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0,$$

则序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界.

证 假设序列 $\{u_n\}$ 是无界的, 那么不妨设 $\|u_n\|\to+\infty$. 令 $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\|v_n\|=1$ 且对任意的$s\in[p,p*)$, $\|v_n\|_s\leq C_s\|v_n\|=C_s$.

易知

$$\frac{\langle I'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|^\alpha}=\frac{1}{\|u_n\|^{\alpha-p}}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^\alpha}dx,$$

由于 $\alpha > p$, 由上式可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^\alpha}dx = 0.$$

又由于在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$中, $\|v_n\| = 1$, 则存在 $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$\text{在 } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ 中, } v_n \rightharpoonup v;$$

$$\text{在 } L^s(\mathbb{R}^N)(p \le s < p*) \text{ 中, } v_n \to v;$$

$$v_n(x) \to v(x)\ a.e.\text{于 } \mathbb{R}^N.$$

令 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N\,|v(x) \neq 0\}$. 如果 $meas(\Omega) > 0$, 那么 $\|u_n(x)\| \to +\infty\ \ a.e.x \in \Omega$. 由 $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ 和 $(F4)$ 可知, 存在常数 C_1, $C_2 > 0$ 使得对于 $\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$f\left(u\right)u \ge C_1|u|^\alpha - C_2|u|^p.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^\alpha}dx \ge C_1\left\|v_n\right\|_\alpha^\alpha - C_2\frac{\|v_n\|_p^p}{\|u_n\|^{\alpha-p}},$$

从而

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^\alpha}dx \ge C_1\left\|v\right\|_\alpha^\alpha > 0.$$

上式矛盾, 于是 $meas(\Omega) = 0$, 从而 $v(x) = 0, a.e.x \in \mathbb{R}^N$. 又根据条件 $(F1)$, $(F2)$ 和 $(F4)$ 可知, 存在 $C_3 > 0$, 使得对于 $\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\frac{1}{\mu}f(u)u - F(u) \ge -C_3|u|^p.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{I(u_n) - \frac{1}{\mu}\left\langle I'(u_n), u_n\right\rangle}{\|u_n\|^p} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right]dx}{\|u_n\|^p}\\ &\ge \frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} - C_3\left\|v_n\right\|_p^p,\end{aligned}$$

易知上式左边大于等于 0, 右边 $\|v_n\|_p^p \to 0$. 因此得到 $0 \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}$, 这是不可能的, 故序列 $\{u_n\}$ 是有界的.

证毕.

引理3.7 假设定理 1.2 的条件成立. 若序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I\left(u_n\right) \to c > 0,\ \left\|I'\left(u_n\right)\right\|\left(1 + \|u_n\|\right) \to 0,$$

DOI: 10.12677/aam.2023.121044

则序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界.

证 利用 $(F5)$, 当 $\mu > p$ 时, 由 (2), (3) 以及 (5) 可知

$$\begin{aligned} c + o(1) &= I(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle I'(u_n), u_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^p + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu}f(u_n)u_n - F(u_n)\right]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^p. \end{aligned} \tag{21}$$

由 (21) 可知当 $\mu > p$ 时, $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界.

引理3.8 假设定理 1.3 的条件成立. 若序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n) \to c > 0,\ \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0,$$

则序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有界.

证 利用引理 3.5 可知, 由条件 $(F6)$ 可以推出条件 $(F5)$ 成立, 因此根据引理 3.7 可以证明引理 3.8 成立.

引理3.9 假设定理 1.1 或定理 1.2 或定理 1.3 的条件成立, 则存在 $v_0 \in M$ 使得 $I(v_0) \leq c$. 此外存在常数 $k_0 > 0$ 使得

$$\|u\|_r \geq k_0, \quad \forall u \in M. \tag{22}$$

证 根据引理 3.3 和引理 3.6 或引理 3.4 与引理 3.7 或引理 3.5 与引理 3.8, 存在序列 $\{u_n\} \subset W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足 (5) 以及对于常数 $M_1 > 0$, 有 $\|u_n\|^p \leq M_1$. 如果

$$\delta := \limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_2(y)}|u_n|^p dx = 0, \tag{23}$$

根据 Lions 集中紧性原理 [18], 在 $L^s\left(\mathbb{R}^N\right)(p < s < p^*)$ 中就有 $u_n \to 0$. 根据 (6) 令 $\varepsilon = \frac{c}{(1+p)M_1}$, 那么存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{p}f(u_n)u_n - F(u_n)\right|dx \leq \frac{c}{pM_1}\|u_n\|_p^p + \frac{1+p}{p}C_\varepsilon\|u_n\|_r^r \leq \frac{c}{p} + o(1). \tag{24}$$

根据 (2), (3), (5), (24) 那么就有

$$c + o(1) = I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{p}f(u_n)u_n - F(u_n)\right]dx \leq \frac{c}{p} + o(1). \tag{25}$$

因此存在矛盾, 那么就有 $\delta > 0$.

考虑子序列, 我们假设存在 $y_n \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{B_1(y_n)} |u_n|^p dx > \frac{\delta}{p}.$$

令 $v_n(x) = u_n(x+y_n)$, 那么 $\|v_n\| = \|u_n\|$ 以及

$$\int_{B_1(0)} |v_n|^p dx > \frac{\delta}{p}. \tag{26}$$

因此, 由 (3) 和 (5) 可知

$$I(v_n) \to c, \quad \|I'(v_n)\|(1+\|v_n\|) \to 0, \quad J(v_n) \to 0. \tag{27}$$

考虑子序列, 存在 $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 v_n 弱收敛到 v_0, 且在 $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(p \le s < p^*)$ 中 $v_n \to v_0$ 以及 $v_n \to v_0$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$. 显然 (26) 表示 $v_0 \neq 0$. 于是由 (27), 得到

$$I'(v_0) = 0,$$

所以 $v_0 \in M$. 此外, 由 (27) 以及法图引理得到 $I(v_0) \le c$.

对于 $u \in M$, 有 $\langle I'(u), u\rangle = 0$, 于是根据 (3), (6) 和第 2 部分给出的 Sobolev 嵌入不等式, 存在常数 $C_4 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \|u\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V|u|^p) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u dx \\ &\le \varepsilon \|u\|_p^p + C_4 \|u\|_r^r \\ &\le \varepsilon C_p \|u\|^p + C_r \|u\|^r, \quad \forall u \in M, \end{aligned} \tag{28}$$

这就意味着存在一个常数 $\rho_0 > 0$ 使得

$$\|u\| \ge \rho_0 > 0, \quad \forall u \in M. \tag{29}$$

又由 (28) 以及 (29) 得

$$\begin{aligned} \|u\|_r &\ge \left(\frac{1-\varepsilon C_p}{C_4} \|u\|^p\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ge \left(\frac{1-\varepsilon C_p}{C_4} \rho_0^p\right)^{\frac{1}{r}} := k_0 > 0, \ \forall u \in M. \end{aligned}$$

定理1.1的证明 对于任意 $u \in M$, 由于 $\langle I'(u), u\rangle = 0$. 我们令 $\{u_n\} \subset M$, 以及 $I(u_n) \to m := \inf_M I$. 由于 $I'(u_n) = 0$, 我们有 $\langle I'(u_n), u_n\rangle = 0$. 像引理 3.6 一样, 我们能够证明 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 现在我们证明序列 $\{u_n\}$ 是非消失的. 如果 (23) 成立, 那么根据 Lions 集中紧性原理, 我们有:

在 $L^s\left(\mathbb{R}^N\right)(p<s<p^*)$ 中 $u_n \rightarrow 0$, 这就与 (22) 矛盾, 因此 $\{u_n\}$ 是非消失的. 考虑子序列, 我们假设存在 $\tilde{y}_n \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{B_1\left(\tilde{y}_n\right)}\left|u_n\right|^p d x>\frac{\delta}{p}.$$

令 $\bar{u}_n(x)=u_n\left(x+\tilde{y}_n\right)$, 那么 $\left\|\bar{u}_n\right\|=\left\|u_n\right\|$ 以及

$$\int_{B_1(0)}\left|\bar{u}_n\right|^p d x>\frac{\delta}{p}. \tag{30}$$

因此, 我们有

$$I\left(\bar{u}_n\right) \rightarrow m, \quad I^{\prime}\left(\bar{u}_n\right)=0, \quad J(\bar{u}_n) \rightarrow 0. \tag{31}$$

考虑子序列, 我们有: 在 $W^{1, p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中 $\bar{u}_n$ 弱收敛到 $\bar{u}$, 且在 $L_{loc}^s\left(\mathbb{R}^N\right)(p \leq s<p^*)$ 中 $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ 以及 $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$. 显然 (30) 表示 $\bar{u} \neq 0$ 且由 (31) 知 $I^{\prime}(\bar{u})=0$, 所以

$$\left\langle I^{\prime}(\bar{u}), \bar{u}\right\rangle=J(\bar{u})=0,$$

$$I(\bar{u}) \geq m=\inf_M I. \tag{32}$$

由 $\mu>p$, 根据 (2), (3), (31), (32) 以及法图引理, 我们有

$$\begin{aligned}
m & =\lim_{n \rightarrow \infty}\left[I\left(\bar{u}_n\right)-\frac{1}{\mu}\left\langle I^{\prime}\left(\bar{u}_n\right), \bar{u}_n\right\rangle\right] \\
& =\lim_{n \rightarrow \infty}\left\{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)\left\|\bar{u}_n\right\|^p+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu} f\left(\bar{u}_n\right) \bar{u}_n-F\left(\bar{u}_n\right)\right] d x\right\} \\
& \geq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)\|\bar{u}\|^p+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu} f(\bar{u}) \bar{u}-F(\bar{u})\right] d x \\
& =I(\bar{u})-\frac{1}{\mu}\left\langle I^{\prime}(\bar{u}), \bar{u}\right\rangle \geq m .
\end{aligned} \tag{33}$$

由此, 我们能够得到 $I(\bar{u})=m=\inf_M I$. 因此, 在定理 1.1 的假设下, $\bar{u}$ 是问题 (1) 的基态解.

定理 1.2 的证明 对于任意 $u \in M$, 由于 $\left\langle I^{\prime}(u), u\right\rangle=0$. 如果 $\mu>p$, 根据 $(F5)$, (2), (3) 我们有

$$\begin{aligned}
I(u) & =I(u)-\frac{1}{\mu}\left\langle I^{\prime}(u), u\right\rangle \\
& =\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)\|u\|^p+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu} f(u) u-F(u)\right] d x>0, \ \forall u \in M .
\end{aligned} \tag{34}$$

根据(34), 我们有

$$m=\inf_M I \geq 0. \tag{35}$$

现在, 我们令 $\{u_n\} \subset M$, 以及 $I(u_n) \to m := \inf_M I$. 由于 $I'(u_n) = 0$, 我们有 $\langle I'(u_n), u_n\rangle = 0$. 像引理 3.7 一样, 我们能够证明 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 现在我们证明序列 $\{u_n\}$ 是非消失的. 如果 (23) 成立, 那么根据 Lions 集中紧性原理, 我们有: 在 $L^s(\mathbb{R}^N)\,(p < s < p^*)$ 中 $u_n \to 0$, 这就与 (22) 矛盾, 因此 $\{u_n\}$ 是非消失的. 考虑子序列, 我们假设存在 $\tilde{y}_n \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{B_1(\tilde{y}_n)} |u_n|^p dx > \frac{\delta}{p}.$$

令 $\bar{u}_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$, 那么 $\|\bar{u}_n\| = \|u_n\|$ 以及

$$\int_{B_1(0)} |\bar{u}_n|^p dx > \frac{\delta}{p}. \tag{36}$$

因此, 我们有

$$I(\bar{u}_n) \to m, I'(\bar{u}_n) = 0. \tag{37}$$

考虑子序列, 我们有: 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中 $\bar{u}_n$ 弱收敛到 $\bar{u}$, 且在 $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)\,(p \leq s < p^*)$ 中 $\bar{u}_n \to \bar{u}$ 以及 $\bar{u}_n \to \bar{u}$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$. 显然 (36) 表示 $\bar{u} \neq 0$ 且由 (37) 知 $I'(\bar{u}) = 0$, 所以

$$\langle I'(\bar{u}), \bar{u}\rangle = J(\bar{u}) = 0,$$

$$I(\bar{u}) \geq m = \inf_M I. \tag{38}$$

如果 $\mu > p$, 根据 (2), (3), (37), (38) 我们有

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{n\to\infty} \left[I(\bar{u}_n) - \frac{1}{\mu}\langle I'(\bar{u}_n), \bar{u}_n\rangle\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|\bar{u}_n\|^p + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu}f(\bar{u}_n)\bar{u}_n - F(\bar{u}_n)\right]dx\right\} \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|\bar{u}\|^p + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu}f(\bar{u})\bar{u} - F(\bar{u})\right]dx \\
&= I(\bar{u}) - \frac{1}{\mu}\langle I'(\bar{u}), \bar{u}\rangle \geq m.
\end{aligned} \tag{39}$$

根据上式, 我们能够得到 $I(\bar{u}) = m = \inf_M I$. 此外根据 (34), 我们有 $I(\bar{u}) = m = \inf_M I > 0$, 因此, 在定理 1.2 的假设下, $\bar{u}$ 是问题 (1) 具有正能量的基态解.

定理 1.3 的证明　依据引理 3.5, 引理 3.8 以及引理 3.9, 采用与定理 1.2 类似的证明方法可获得定理 1.3 的证明.

基金项目

国家自然科学基金(12071486)。

参考文献

[1] 杨玉蓓. 一类双调和方程基态解的存在性[J]. 湖北大学学报: 自然科学版, 2014, 36(1): 35-40.

[2] Kusano, T. and Swanson, C.A. (1985) Entire Positive Solutions of Singular Semilinear Elliptic Equations. *Japanese Journal of Mathematics*, **111**, 145-155. https://doi.org/10.4099/math1924.11.145

[3] Wu, S. and Yang, H. (1997) The Existence Theorems for a Class of Sublinear Elliptic Equation in $\mathbb{R}^N$. *Acta Mathematica Sinica*, **13**, 259-304. https://doi.org/10.1007/BF02560009

[4] 杨玉蓓, 何毅. 带有一般非线性项的一类p拉普拉斯型方程基态解的存在性[J]. 科技通报, 2017, 33(11): 24-26, 38.

[5] 邓义华, 罗李平, 周立君. 一类带负位势函数的超线性P-Laplace方程基态解的存在性[J]. 数学物理学报: A 辑, 2015, 35(3): 578-586.

[6] Wang, W.Q. and Mao, A.M. (2022) The Existence and Non-Existence of Sign-Changing Solutions to Bi-Harmonic Equations with a p-Laplacian. *Acta Mathematica Scientia*, **42**, 551-560. https://doi.org/10.1007/s10473-022-0209-6

[7] Wang, X., Qin, X.Q., Hu, G., *et al.* (2018) Singular Elliptic Problems with Fractional Laplacian. *Pure and Applied Mathematics*, **34**, 431-440.

[8] Bartsch, T. and Liu, Z.L. (2004) On a Superlinear Elliptic p-Laplacian Equation. *Journal of Differential Equations*, **198**, 149-175. https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.08.001

[9] Degiovanni, M. and Lancelotti, S. (2007) Linking over Cones and Nontrivial Solutions for p-Laplace Equations with p-Superlinear Nonlinearity. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire*, **24**, 907-919. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2006.06.007

[10] Alves, C.O. and Figueiredo, G.M. (2006) Existence and Multiplicity of Positive Solutions to a p-Laplacian Equation in R^N. *Differential and Integral Equations*, **19**, 143-162. https://doi.org/10.57262/die/1356050522

[11] Chen, Y. and Tang, X.H. (2014) Ground State Solutions for p-Superlinear p-Laplacian Equations. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **97**, 48-62. https://doi.org/10.1017/S1446788714000135

[12] 赵艳. 非线性椭圆方程或系统正基态解的存在性[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2012.

[13] Zou, W.M. and Schechter, M. (2006) Critical Point Theory and Its Applications. Springer, Berlin.

[14] D'Aprile, T. and Mugnai, D. (2004) Non-Existence Results for the Coupled Klein-Gordon-Maxwell Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **4**, 307-322. https://doi.org/10.1515/ans-2004-0305

[15] Pucci, P. and Serrin, J. (1986) A General Variational Identity. *Indiana University Mathematics Journal*, **35**, 681-703. https://doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35036

[16] Li, G.B. and Wang, C.H. (2011) The Existence of a Nontrivial Solution to a Nonlinear Elliptic Problem of Linking Type without the Ambrosetti-Rabinowitz Condition. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, **36**, 461-480. https://doi.org/10.5186/aasfm.2011.3627

[17] Jeanjean, L. (1997) Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis*, **28**, 1633-1659. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00021-1

[18] Lions, P.L. (1984) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, Part 1. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire*, **1**, 109-145. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30428-0