

扰动细分的光滑性研究

亓万锋*, 王 影

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月21日; 发布日期: 2023年1月31日

摘 要

细分在小波分析和计算机图形学中起着重要作用。本文对一类特殊的二重细分格式乘以一个简单的多项式作为扰动, 提出了得到扰动后细分格式光滑性更高的充分条件。通过Mathematica对理论结果加以分析。结果表明, 在该条件下扰动后的细分光滑性明显提高。

关键词

细分, 特征值, Hölder指数, 光滑性

Research on the Smoothness of Perturbed Subdivision

Wanfeng Qi*, Ying Wang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 21st, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

Subdivision plays an important role in wavelet analysis and computer graphics. In this paper, a class of special subdivision schemes is multiplied by a simple polynomial as a perturbation, and a sufficient condition for higher smoothness of the subdivision scheme after perturbation is proposed. The theoretical results are analyzed by Mathematica. The results show that the subdivision smoothness is improved obviously after perturbation under this condition.

Keywords

Subdivision, Eigenvalue, Hölder Exponent, Smoothness

*通讯作者。

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细分格式的光滑性问题的研究具有十分重要的意义。Jia 和 Zhou [1]从掩模生成的 m 个列随机矩阵角度出发刻画了带有非负掩模的细分格式的收敛。Zhou [2]对一类带有非负掩模的多元细分格式的收敛性进行了研究, 给出了具有非负有限掩模的多元细分格式收敛新的充分条件。Cheng 和 Zhou [3] [4]对有限掩模细分格式的收敛性给出一个新的可计算的必要条件。

计算 Hölder 指数是刻画细分格式光滑性的重要方法, 目前有很多学者提出了 Hölder 指数的计算方法。Rioul [5]从单个矩阵的谱半径出发证明了拟样条细分格式的 Hölder 指数的下界。Floater [6]和 Muntingh [6] [7]对 Rioul 的计算方法进行了完善, 在 Rioul 研究的基础上构造了折叠矩阵, 提出了用这种折叠矩阵的特征值计算 Hölder 指数的方法。还有一些学者构造出不同参数的细分格式并分析了其连续性。檀结庆等[8]从生成多项式的角度出发, 构造出一个可以生成多参数的二重细分格式的 Laurent 多项式, 并给出了当参数取不同值生成的极限曲线的连续性。张莉等[9]通过在非光滑项掩模增加参数扰动的方式, 构造出包含很多经典细分的细分格式, 并分析了不同参数下的细分格式的连续性。Dyn 等[10]通过在细分格式的非光滑项加上一个扰动多项式的方式, 应用了经典的细分光滑性分析方法[11], 给出了使得细分格式的光滑性更好的参数范围。与 Dyn 的扰动方式和分析角度不同, 本文在原有的细分格式的非光滑项中乘以一个带有参数的扰动多项式, 从细分矩阵的特征值角度, 提出了得到扰动后细分格式光滑性更高的参数范围。

2. 细分格式

设 A 为 $n \times n$ 矩阵, λ_i 为 A 的特征值, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 A 的谱半径。

若 m 重细分格式一致收敛, 则其掩模 $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 满足

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{mi} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{mi+1} = 1,$$

m 重细分格式 $a(z)$ 的生成函数定义为

$$a(z) = m \left(\frac{1+z+\dots+z^{m-1}}{m} \right)^{n+1} b(z),$$

其中, $b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $b(z)$ 的掩模。

本文考虑如下生成函数

$$a(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^{n+1} (\alpha z^2 + (1-2\alpha)z + \alpha). \tag{1.1}$$

接下来对(1.1)加以扰动, 形成下面这种细分格式

$$\tilde{a}(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^{n+1} (\alpha z^2 + 1 - 2\alpha z + \alpha)(\beta z^2 + 1 - 2\beta z + \beta), \tag{1.2}$$

并对其比(1.1)光滑性更好的条件进行了分析。

3. 判断细分光滑性的方法

如果存在常数 C , 满足

$$\forall x, y \in R, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma,$$

那么称 f 具有 Hölder 指数 [7] γ , 记 $f \in C^\gamma$, 细分格式 (1.1) 和 (1.2) 具有 Hölder 指数 γ . N_0 表示包含 0 和正整数的数集, $q \in N_0$, 如果 f 是 q 次连续可微的, 并且 $f^{(q)} \in C^\gamma, 0 < \gamma < 1$, 则称 f 具有 Hölder 指数 $q + \gamma$, 记 $f \in C^{q+\gamma}$, 细分格式 (1.1) 和 (1.2) 具有 Hölder 指数 $q + \gamma$.

下述引理给出计算 Hölder 指数的方法。

引理 1 当细分重数 $m \geq 2$, $b(z) = \sum_{j=-p}^p b_j z^j$ 的系数满足 $b_j = b_{-j}$, 它的傅里叶变换为

$$B(\xi) := b(e^{-i\xi}) = b_0 + 2\sum_{j=1}^p b_j \cos(j\xi), \quad p \geq 1, \quad \xi \in R.$$

对于 $a(z) = m \left(\frac{1+z+\dots+z^{m-1}}{m} \right)^{n+1} b(z)$, 其中 $b(1) = 1$, $b(z)$ 不含因式 $1+z+\dots+z^{m-1}$, 那么定义 $a(z)$ 的细分矩阵的“折叠”子矩阵 [7] M 为

$$M = [M_{j,k}]_{j,k=0,\dots,\lfloor \frac{p-1}{m-1} \rfloor}, \quad M_{j,k} := \begin{cases} b_j, & k = 0, \\ b_{|j-mk|} + b_{|j+mk|}, & k \geq 1. \end{cases}$$

如果 M 的谱半径 $\rho > \frac{1}{m}$, 并且对于任意 $\xi \in [-\pi, \pi]$, 都有 $B(\xi) \geq 0$, 那么 $a(z)$ 有 Hölder 指数下界

$$n - \log_m(\rho), \quad n \geq 0.$$

如果 $B(\xi) > 0$, 则此时的界是精确值。

重数 $m = 2$, $p = 1, 2, 3, 4$ 时, $\left(\frac{p-1}{m-1} + 1\right)$ 维“折叠”子矩阵 M 分别为

$$[b_0], \begin{bmatrix} b_0 & 2b_2 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_0 & 2b_2 & 0 \\ b_1 & b_1 + b_3 & b_3 \\ b_2 & b_0 & b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_0 & 2b_2 & 2b_4 & 0 \\ b_1 & b_1 + b_3 & b_3 & 0 \\ b_2 & b_0 + b_4 & b_2 b_4 & \\ b_3 & b_1 & b_1 b_3 & \end{bmatrix}.$$

对于 (1.1), 细分矩阵的“折叠”子矩阵为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

对于 (1.2), 细分矩阵的“折叠”子矩阵为

$$M_2 = \begin{pmatrix} (1-2\alpha)(1-2\beta) + 2\alpha\beta & 2\alpha\beta & 0 \\ \alpha(1-2\beta) + (1-2\alpha)\beta & \alpha(1-2\beta) + (1-2\alpha)\beta & 0 \\ \alpha\beta & (1-2\alpha)(1-2\beta) + 2\alpha\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

我们先来证明一个简单的引理:

引理 2 当 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 且 $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, M_2 的谱半径 $\rho(M_2)$ 为

$$\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52\alpha^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right).$$

证明: M_2 的特征值的绝对值分别为 $|\alpha\beta|$,

$$\left| \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52\alpha^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \right|,$$

$$\left| \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta - \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \right|.$$

在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $\alpha\beta > 0$ 即 $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ 。易验证

$$1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2$$

恒为非负数, 即

$$\sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2}$$

为正实数, 并且

$$\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) > 0.$$

所以有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right). \end{aligned}$$

若想得到 $\rho(M_2)$, 需要比较其特征值的绝对值的大小。首先比较

$$\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right)$$

与

$$\left| \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta - \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \right|$$

的大小。当 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 易验证

$$\begin{cases} \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} > 0, \\ 1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta > 0. \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \\ & > \left| \frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta - \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right) \right|. \end{aligned}$$

接下来比较

$$\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta + \sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} \right)$$

与 $|\alpha\beta|$ 的大小。当 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 易验证

$$\sqrt{1 - 6\alpha - 6\beta + 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 38\alpha\beta - 52a^2\beta - 52\alpha\beta^2 + 68\alpha^2\beta^2} > \alpha + \beta - 1,$$

那么有

$$\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\beta+2\alpha\beta+\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2}\right) > \alpha\beta,$$

即

$$\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\beta+2\alpha\beta+\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2}\right) > |\alpha\beta|.$$

综上所述, 我们得出 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $\rho(M_2)$ 为

$$\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\beta+2\alpha\beta+\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2}\right).$$

4. 主要结果

定理 当 $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, $0 < \beta < \frac{1}{4}$ 时, $\tilde{a}(z)$ 比 $a(z)$ 具有更大的 Hölder 指数。

证明: M_1 的谱半径 $\rho(M_1)$ 为

$$\begin{cases} 1-2\alpha, & \alpha < \frac{1}{4}, \\ \alpha, & \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

显然可以得到 $\rho(M_1) > \frac{1}{2}$, 并且 $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ 时, 对于 $\forall -\pi \leq \xi \leq \pi$, 都有

$$B(\xi) = 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos(\xi) > 0,$$

所以满足引理 1 的算法条件。

$\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, 可以得到

$$\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2} < 1-3\alpha+\beta-2\alpha\beta,$$

即

$$\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\beta+2\alpha\beta+\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2}\right) < 1-2\alpha,$$

所以 $\rho(M_2) < \rho(M_1)$ 。同时有

$$\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2} > \alpha+\beta-2\alpha\beta.$$

可得

$$\frac{1}{2}\left(1-\alpha-\beta+2\alpha\beta+\sqrt{1-6\alpha-6\beta+9\alpha^2+9\beta^2+38\alpha\beta-52a^2\beta-52\alpha\beta^2+68\alpha^2\beta^2}\right) > \frac{1}{2},$$

即 $\rho(M_2) > \frac{1}{2}$, 并且对于 $\forall -\pi \leq \xi \leq \pi$, 都有 $B(\xi) = (1-2\alpha+2\alpha \cos(\xi))(1-2\beta+2\beta \cos(\xi)) > 0$, 所以满足引理 1 的算法条件。

综上所述, $\tilde{a}(z)$ 比 $a(z)$ 光滑性更好的充分条件是

$$0 < \alpha < \frac{1}{4} \text{ 且 } 0 < \beta < \frac{1}{4}.$$

5. 结果分析

图 1 展示了 $n=1,2,3$ 时, 细分格式中的参数 α 和 β 对 $a(z)$ 和 $\tilde{a}(z)$ 的 Hölder 指数的影响关系图。第一列图中绿色区域表示 $\tilde{a}(z)$ 的 Hölder 指数, 红色区域表示 $a(z)$ 的 Hölder 指数。第二列图表示在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 且 $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时细分格式 $a(z)$ 和 $\tilde{a}(z)$ 的 Hölder 指数差值。可见在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 且 $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, 对 $a(z)$ 作乘法扰动后光滑性明显提高。

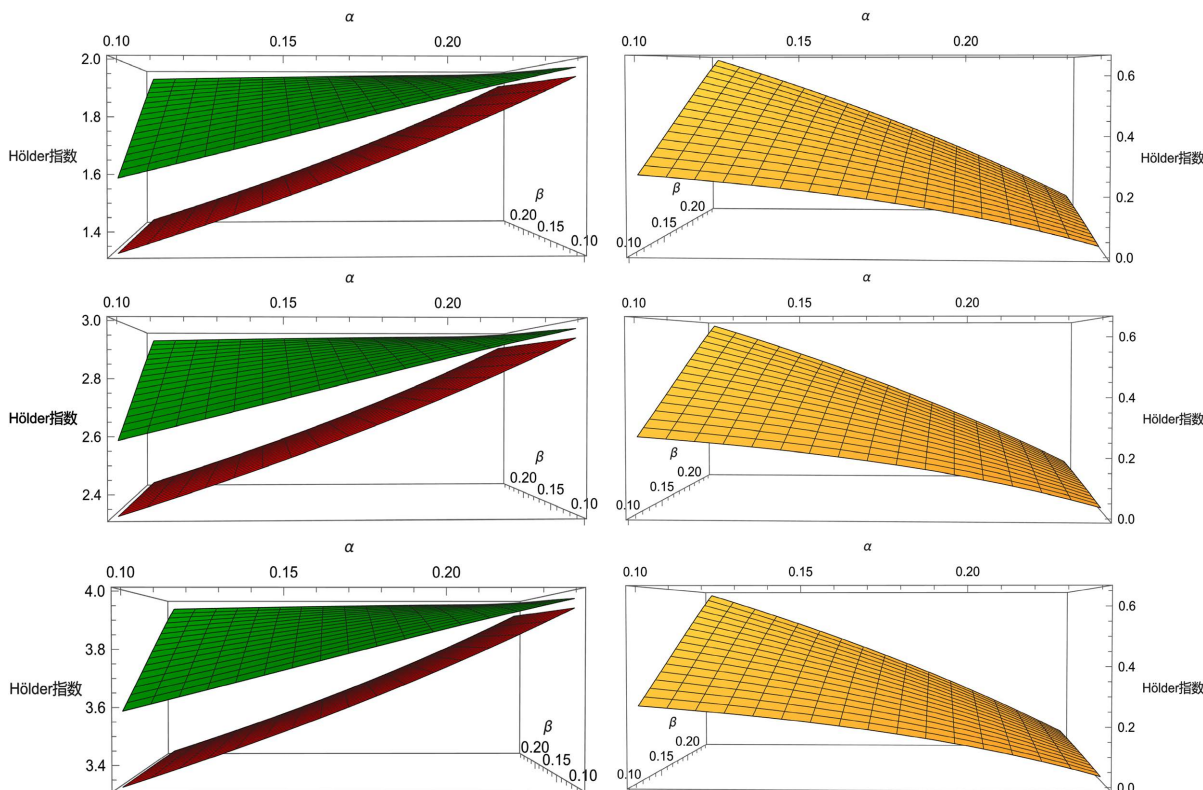


Figure 1. Effects of parameters α and β on the Hölder exponents of $a(z)$ and $\tilde{a}(z)$: the first row, $n = 1$; the second row, $n = 2$; the third row, $n = 3$; the first column red and green are the Hölder exponents of the subdivision schemes $a(z)$ and $\tilde{a}(z)$, respectively, and the second column is the difference between them.

图 1. 参数 α 和 β 对 $a(z)$ 和 $\tilde{a}(z)$ 的 Hölder 指数的影响关系图: 第一行, $n = 1$; 第二行, $n = 2$; 第三行, $n = 3$; 第一列红色和绿色分别是细分格式 $a(z)$ 和 $\tilde{a}(z)$ 的 Hölder 指数, 第二列是两者之差

6. 结论

本文在扰动方法和分析角度上进行创新, 对一类特殊的细分格式乘以一个简单的多项式作为扰动, 再根据特征值与 Hölder 指数关系, 将扰动前后的特征值进行比较, 进而计算出在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 且 $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, 扰动后的细分格式(1.2)比(1.1)光滑性更高。

参考文献

[1] Jia, R.Q. and Zhou, D.X. (1999) Convergence of Subdivision Schemes Associated with Nonnegative Masks. *Society for*

-
- Industrial and Applied Mathematics*, **21**, 418-430. <https://doi.org/10.1137/S0895479898342432>
- [2] Zhou, X.L. (2005) On Multivariate Subdivision Schemes with Nonnegative Finite Masks. *American Mathematical Society*, **134**, 859-869. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-08118-9>
- [3] Cheng, L. and Zhou, X.L. (2019) A New Computable Sufficient Condition for the Convergence of Subdivision Schemes with Nonnegative Masks. *Advances in Computational Mathematics*, **45**, 1273-1290. <https://doi.org/10.1007/s10444-018-09656-8>
- [4] Cheng, L. and Zhou, X.L. (2017) Necessary Conditions for the Convergence of Subdivision Schemes with Finite Masks. *Applied Mathematics and Computation*, **303**, 34-41. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.012>
- [5] Rioul, O. (1992) Simple Regularity Criteria for Subdivision Schemes. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **23**, 1544-1576. <https://doi.org/10.1137/0523086>
- [6] Floater, M.S. and Muntingh, G. (2012) Exact Regularity of Pseudo-Splines. arXiv preprint arXiv:1209.2692.
- [7] Muntingh, G. (2017) Symbols and Exact Regularity of Symmetric Pseudo-Splines of Any Arity. *BIT Numerical Mathematics*, **57**, 867-900. <https://doi.org/10.1007/s10543-017-0656-y>
- [8] 檀结庆, 钵汪, 夏成林, 等. 一类由 Laurent 多项式诱导的带参数二重细分[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(12): 2082-2087.
- [9] 张莉, 马欢欢, 唐烁, 等. 一类保细节特征的双参数m重融合型细分[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(6): 929-935.
- [10] Dyn, N., Levin, D. and Micchelli, C.A. (1990) Using Parameters to Increase Smoothness of Curves and Surfaces Generated by Subdivision. *Computer Aided Geometric Design*, **7**, 129-140. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(90\)90025-M](https://doi.org/10.1016/0167-8396(90)90025-M)
- [11] Hassana, M.F., Ivriissimitzis, I.P., Dodgson, N.A., et al. (2002) An Interpolating 4-Point C^2 Ternary Stationary Subdivision Scheme. *Computer Aided Geometric Design*, **19**, 1-18. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(01\)00084-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00084-X)