Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2023, 12(1), 332-338**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121036

Hans汉斯

Toeplitz符号模式矩阵的一些研究

赵心茹，田　岩*

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘　要

本文主要考虑Toeplitz符号模式矩阵，研究3阶Toeplitz符号模式矩阵是否允许代数正。结合组合矩阵论和图论的理论，研究零对角的3阶Toeplitz符号模式矩阵，给出零对角的3阶Toeplitz符号模式矩阵允许代数正的等价条件。同时，给出一类允许代数正的3阶Toeplitz符号模式矩阵及其具体结构。

关键词

符号模式矩阵，Toeplitz符号模式矩阵，允许代数正

Some Studies on Toeplitz Sign Pattern Matrices

Xinru Zhao, Yan Tian*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

This paper mainly considers Toeplitz sign pattern matrices, whether Toeplitz sign pattern matrices with order 3 allow algebraic positivity is studied. Combining the theories of combinatorial matrix theory and graph theory, zero diagonal Toeplitz sign pattern matrices with order 3 were studied, the equivalent conditions of the zero diagonal Toeplitz sign pattern matrices with order 3 that allow algebraic positivity were given. At the same time, a class of Toeplitz sign pattern matrices with order 3 that allow algebraic positivity and their specific structure were given.

*通讯作者。

文章引用: 赵心茹, 田岩. Toeplitz 符号模式矩阵的一些研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 332-338.
DOI: 10.12677/aam.2023.121036

Keywords

Sign Pattern Matrix, Toeplitz Sign Pattern Matrix, Allow Algebraic Positivity

1. 引言

Toeplitz 矩阵是一类非常重要的矩阵，在应用数学、物理学、信号理论、统计理论等很多领域都有非常重要的应用。关于 Toeplitz 矩阵的研究是矩阵与计算数学理论的重要组成部分，也是应用数学领域中一个非常活跃和比较重要的研究方向。符号模式矩阵是组合矩阵论的一个重要问题，主要通过实矩阵的元素符号来研究实矩阵具有的仅与其元素的符号有关而与元素的数量大小无关的组合性质。1987 年，C.A. Eschenbach [1]引入并研究了符号模式矩阵允许和要求的某种性质。2016 年，S. Kirkland [2]等引入并研究了代数正矩阵，并且首次提出了符号模式矩阵要求代数正和允许代数正这两个重要问题。2019 年，J.L. Abagat [3]等讨论了 3 阶不可约符号模式矩阵，分别给出了符号模式矩阵要求代数正、允许代数正非要求代数正以及非允许代数正的刻画。同年，S. Das [4]等研究了树符号模式矩阵允许代数正和要求代数正。2021 年，S. Das [5]给出了 5 阶树符号模式矩阵要求代数正的等价条件。2022 年，A. Biswas [6]等刻画了 3 阶对称符号模式矩阵要求代数正。同年，S. Das [7]给出了符号模式矩阵允许代数正的充分条件。

本文受到上述文献的启发，考虑 Toeplitz 符号模式矩阵，借助组合矩阵论和图论的理论，借助 Maple 编程软件，给出阶数为 3 的零对角 Toeplitz 符号模式矩阵允许代数正的刻画，并且找到了一类允许代数正的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵。

符号模式矩阵(简称符号模式)是指所有元素都来自集合 $A=\{+,-,0\}$ 的矩阵。任意实矩阵 $A=(a_{ij})$，以 a_{ij} 的符号为元素构成的符号模式矩阵称为 A 的符号模式矩阵。$Q(A)$ 表示与符号模式矩阵 A 具有相同符号的实矩阵构成的集合。设符号模式矩阵 A 具有性质 P，若 $Q(A)$ 中每一个矩阵都具有性质 P，则称符号模式矩阵 A 要求 P。设符号模式矩阵 A 具有性质 P，若 $Q(A)$ 中存在一个矩阵具有性质 P，则称符号模式矩阵 A 允许 P。正矩阵(非负矩阵) M 是指所有元素都是正(非负)实数的矩阵，记作 $M>0\,(M\geq 0)$。矩阵(或符号模式矩阵) A 的第 i 行 j 列元素用 $A_{(i,j)}$ 表示。本文研究的矩阵都是实方阵。

2. 预备知识

以下是本文用到的基本概念以及相关结论。

定义 2.1 [2]设 A 是实方阵，如果存在一个实系数多项式 $f(x)$，使得 $f(A)$ 是一个正矩阵，则 A 是代数正矩阵。

引理 2.1 [2]允许代数正的符号模式矩阵不可约。

引理 2.2 [2]设 A 是符号模式矩阵，若 A 允许代数正，则 A 的每行每列都包含+或每行每列都包含−。

引理 2.3 [6]若 A 是不可约的实矩阵，并且除对角线以外的元素都是非负或非正，则 A 是代数正矩阵。

引理 2.4 [6]设 A 是对称的实矩阵，则 A 是代数正矩阵当且仅当存在单特征值以及对应的正的右特征向量。

引理 2.5 [4]设 A 是符号模式矩阵，则 A 要求代数正当且仅当 PAP^{T} 要求代数正，其中 P 是置换符号模式矩阵。

引理 2.6 [4]设 A 是不可约符号模式矩阵，若 A 中除对角线以外的非零元符号都相同，则 A 是要求代数正。

定义 2.2 设 A 是 n 阶矩阵(符号模式矩阵)，若存在置换矩阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 B,D 是阶数小于 n 的方阵，则称 A 可约。否则，称 A 不可约。

设 V 是有限集合，$E\subseteq V^2$，则集合对 $D=(V,E)$ 称为一个有向图。V 中元素称为顶点，E 中的元素称为弧[8]。

设 A 是 n 阶矩阵(或符号模式矩阵)，则对于 $D(A)$ 中任意两个不同顶点 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在 i 到 j 的有向路径当且仅当

$$A_{(i,i+1)}A_{(i+1,i+2)}\cdots A_{(j-1,j)}\neq 0。$$

在 n 阶矩阵 M 的有向图 $D(M)$ 中，若对于任意两个顶点 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在从 i 到 j 和 j 到 i 的有向路径，则称顶点 i,j 强连通。$D(M)$ 强连通当且仅当对于 $D(M)$ 的任意两个顶点都强连通[8]。

引理 2.7 [8]设 M 是 n 阶矩阵(符号模式矩阵)，则 M 不可约当且仅当它的有向图 $D(M)$ 强连通。

定理 2.1 [3]设 A 是 n 阶符号模式矩阵。若 A 不可约且 B_A 可约，则 A 不是允许代数正。

3. 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵

这部分主要考虑零对角的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵，讨论其是否允许代数正。最后，找到一类允许代数正的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵。

定义 3.1 符号模式矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-(n-1)} & a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\in\{+,-,0\}$，$(i=-(n-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,n-1)$，称 A 是 Toeplitz 符号模式矩阵。

定义 3.2 [6]设 A 是符号模式矩阵，若 A 的对角线元素都是零，则 A 是零对角符号模式矩阵。

由参考文献[6]中推论 4.7 易得：

定理 3.1 设 A 是零对角的 3 阶对称的 Toeplitz 符号模式矩阵，则 A 允许代数正当且仅当 A 或$-A$ 置换相似于 C 中的符号模式矩阵

$$C=\left\{\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ + & 0 & + \\ - & + & 0 \end{pmatrix}\right\}。$$

证明:设 A 是零对角的 3 阶对称的 Toeplitz 符号模式矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & 0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & 0 \end{pmatrix}。$$

必要性。设 A 允许代数正，则由引理 2.1 可知，A 不可约。所以 $a_1a_{-2}\neq 0$；或 $a_1a_{-1}\neq 0$；或 $a_{-1}a_2\neq 0$。根据引理 2.5，只需考虑 $a_1a_{-2}\neq 0$ 和 $a_1a_{-1}\neq 0$ 两种情况。再根据引理 2.2 以及 A 是对称符号模式矩阵，故

A 或$-A$ 置换相似于 C 中的符号模式矩阵。

充分性。1) 根据参考文献[6]中的推论 4.7 可知，C 中的前两个符号模式矩阵是允许代数正。

2) 若 A 或$-A$ 置换相似于 C 中的第 3 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中存在实矩阵，

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

有单特征值 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ 以及对应的正的右特征向量

$$\left(\frac{6\left(\sqrt{13}-3\right)}{\left(5-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}-1\right)},\frac{2\left(\sqrt{13}-2\right)}{5-\sqrt{13}},1\right)^{\mathrm{T}}。$$

根据引理 2.4，M 是代数正矩阵，因此 C 中第三个符号模式矩阵允许代数正。

下面主要考虑零对角的 3 阶非对称的 Toeplitz 符号模式矩阵，讨论其是否允许代数正。

定理 3.2 设 A 是零对角的 3 阶非对称的 Toeplitz 符号模式矩阵，则 A 允许代数正当且仅当 A 或$-A$ 置换相似于 S 中的符号模式矩阵

$$S=\left\{\begin{pmatrix}0&+&0\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&+\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0&+&+\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\-&+&0\end{pmatrix}\right\}.$$

证明： 设 3 阶零对角的 Toeplitz 符号模式矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&a_1&a_2\\a_{-1}&0&a_1\\a_{-2}&a_{-1}&0\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\in\{+,-,0\}\left(i=-2,-1,1,2\right)$。

必要性。设 A 允许代数正，则由引理 2.1 可知，A 不可约。所以 $a_1a_{-2}\neq 0$；或 $a_1a_{-1}\neq 0$；或 $a_{-1}a_2\neq 0$。根据引理 2.5，只需考虑 $a_1a_{-2}\neq 0$ 和 $a_1a_{-1}\neq 0$ 两种情况。再根据引理 2.2，A 或$-A$ 置换相似于 S 中的符号模式矩阵。

充分性。1) 设 A 或$-A$ 置换相似于 S 中第 1 个符号模式矩阵

$$A'=\begin{pmatrix}0&+&0\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},$$

则 $A'_{(1,2)}A'_{(2,3)}A'_{(3,1)}\neq 0$，所以 $D(A')$ 是强连通的。根据引理 2.7，A' 不可约。

设 A 或$-A$ 置换相似于 S 中第 2 个符号模式矩阵

$$A'=\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},$$

则 $A'_{(1,2)}A'_{(2,3)}A'_{(3,1)} \neq 0$，所以 $D(A')$ 是强连通的。根据引理 2.7，A' 不可约。

设 A 或 $-A$ 置换相似于 S 中第 3 个符号模式矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A'_{(1,2)}A'_{(2,3)}A'_{(3,1)} \neq 0$，所以 $D(A')$ 是强连通的。根据引理 2.7，A' 不可约。

因此，根据引理 2.6，A' 要求代数正，故 S 中第 1 个、第 2 个和第 3 个符号模式矩阵都是允许代数正。

2) 若 A 或 $-A$ 置换相似于 S 中的第 4 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中任取实矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & 0 \\ -n_2 & 0 & n_3 \\ n_4 & -n_5 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $n_i > 0(i = 1,2,3,4,5)$。那么，存在实系数多项式 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 使得 $f(M) > 0$，其中 $\alpha = \dfrac{n_1 n_2 + n_3 n_5}{n_1 n_3 n_4}$，$\beta = 1$，$\gamma$ 充分大。所以 M 是代数正，故 S 中第四个符号模式矩阵是要求代数正。因此，S 中第四个符号模式矩阵是允许代数正。

3) 若 A 或 $-A$ 置换相似于 S 中的第 5 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中任取实矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & -n_2 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $n_i > 0(i = 1,2,3,4)$。那么，存在实系数多项式 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 使得 $f(M) > 0$，其中 $\alpha = \dfrac{n_2 + 1}{n_1 n_3}$，$\beta = 1$，$\gamma$ 充分大。所以 M 是代数正，故 S 中第五个符号模式矩阵是要求代数正。因此，S 中第五个符号模式矩阵是允许代数正。

4) 若 A 或 $-A$ 置换相似于 S 中的第 6 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dfrac{1}{4} \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

那么，存在实系数多项式 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 使得 $f(M) > 0$，其中 $\alpha = 2$，$\beta = 1$，γ 充分大，所以 M 是代数正，故 S 中第 6 个符号模式矩阵是允许代数正。

5) 若 A 或 $-A$ 置换相似于 S 中的第 7 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

那么，存在实系数多项式 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 使得 $f(M) > 0$，其中 $\alpha = \dfrac{7}{12}$，$\beta = 1$，γ 充分大，所以 M 是代数正，故 S 中第七个符号模式矩阵是允许代数正。

6) 若 A 或$-A$ 置换相似于 S 中的第 8 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中任取实矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0 & n_1 & -n_2\\ -n_3 & 0 & n_4\\ n_5 & -n_6 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $n_i>0(i=1,2,3,4,5,6)$ 。那么，存在实系数多项式 $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 使得 $f(M)>0$ ，其中 $\alpha=\dfrac{n_1n_3+n_2n_5+n_4n_6}{n_1n_4n_5}$ ， $\beta=1$ ， γ 充分大。所以 M 是代数正，故 S 中第 8 个符号模式矩阵是要求代数正。

因此，S 中第 8 个符号模式矩阵是允许代数正。

7) 若 A 或$-A$ 置换相似于 S 中的第 9 个符号模式矩阵，则在 $Q(A)$ 中存在实矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ -\dfrac{1}{2} & 1 & 0\end{pmatrix},$$

那么，存在实系数多项式 $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 使得 $f(M)>0$，其中 $\alpha=\dfrac{7}{12}$， $\beta=1$， γ 充分大，所以 M 是代数正，故 S 中第 9 个符号模式矩阵是允许代数正。

综上，根据定理 3.1 和定理 3.2 易得：

定理 3.3 设 A 是零对角的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵，则 A 允许代数正当且仅当 A 或$-A$ 置换相似于 S' 中的符号模式矩阵

$$S'=\left\{\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\0&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&+\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&+\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}0&+&-\\0&0&+\\+&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&+\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\+&0&+\\+&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\-&0&+\\+&-&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&0\\+&0&+\\-&+&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&+&-\\+&0&+\\-&+&0\end{pmatrix}\right\}.$$

引理 3.1 [3]设 A 是符号模式矩阵，若 A 允许代数正，则下面符号模式矩阵也是允许代数正：

1) A^{T}；3) PAP^{T}，P 是任意置换矩阵；

2) $-A$；4) $\beta A+\alpha I$， $\forall\alpha\in R$ 且 $\beta\in R\setminus\{0\}$ 。

根据定理 3.3 和引理 3.1(4)易得：

定理 3.4 设 A 是 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵，则 A 允许代数正当且仅当 A 或$-A$ 置换相似于 S^* 中的符号模式矩阵

$$S^*=\left\{\begin{pmatrix}*&+&0\\+&*&+\\0&+&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&+\\+&*&+\\+&+&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&0\\0&*&+\\+&0&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&0\\+&*&+\\+&+&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&+\\0&*&+\\+&0&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&0\\-&*&+\\+&-&*\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}*&+&-\\0&*&+\\+&0&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&+\\-&*&+\\+&-&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&-\\+&*&+\\+&+&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&-\\-&*&+\\+&-&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&0\\+&*&+\\-&+&*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*&+&-\\+&*&+\\-&+&*\end{pmatrix}\right\}.$$

其中 $*\in\{+,-,0\}$ 。

4. 结论

针对 Toeplitz 矩阵的结构特点，本文考虑了 Toeplitz 符号模式矩阵，讨论零对角的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵是否允许代数正，从而找到一类允许代数正的 3 阶 Toeplitz 符号模式矩阵。利用组合矩阵论以及图论的理论，借助 Maple 编程软件，这种研究方法对于其他符号模式矩阵允许代数正的研究在一定程度上提供了途径和方法，具有借鉴意义。

基金项目

辽宁省教育厅自然科学研究青年项目(LQ2020021)。

参考文献

[1] Eschenbach, C.A. (1987) Eigenvalue Classification in Qualitative Matrix Analysis. Clemson University, South Carolina.

[2] Kirkland, S., Qiao, P. and Zhan, X.Z. (2016) Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **504**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.049

[3] Abagat, J.L. and Pelejo, D.C. (2019) On Sign Pattern Matrices That Allow or Require Algebraic Positivity. *The Electron Journal of Linear Algebra*, **35**, 331-356. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3862

[4] Das, S. and Bandopadhyay, S. (2019) On Some Sign Patterns of Algebraically Positive Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **562**, 91-122. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.10.007

[5] Das, S. (2021) Classifications of Some Algebraically Positive, Diagonalizable and Stable Matrices with Their Sign Patterns. Department of Mathematics Indian Institute of Technology, Guwahati.

[6] Biswas, A. and Kundu, S. (2022) On Algebraically Positive Matrices with Associated Sign Patterns. *Resonance*, **27**, 1211-1235. https://doi.org/10.1007/s12045-022-1415-1

[7] Das, S. (2022) Sign Patterns That Allow Algebraic Positivity. *Linear Algebra and Its Application*, **653**, 151-182. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.08.007

[8] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.