

一类可传递分解图的交叉数

乔凤秋

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年1月16日; 录用日期: 2023年2月11日; 发布日期: 2023年2月22日

摘要

图的交叉数是拓扑图论中重要的一个分支, 国内外诸多学者对图的交叉数这一问题进行广泛的关注和深入的研究, Garey和Johnson证明了计算图的交叉数是NP-完全问题。本文令 $cr(G)$ 表示图 G 的交叉数, 主要利用弱积图 $C_n \times K_3$ 的一个传递分解 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 对其交叉数进行研究。首先构造了六边形图 $C_{2k} \times K_3$ 交叉数较少的画法, 给出交叉数的上界, 然后采用数学归纳法和反证法, 将 $C_{2k} \times K_3$ 的边集分成边不相交的 $2k$ 组, 讨论所有可能情况, 从而证得 $cr(C_{2k} \times K_3) = 4k, k \geq 3$ 。

关键词

交叉数, 六边形图, 可传递分解

The Crossing Number of a Class of Transitive Decomposition Graphs

Fengqiu Qiao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 16th, 2023; accepted: Feb. 11th, 2023; published: Feb. 22nd, 2023

Abstract

The crossing number of graphs is an important branch of topological graph theory. Many scholars at home and abroad have made extensive attention and in-depth research on the crossing number of graphs. Garey and Johnson proved that the calculation of the crossing number of graphs is a NP-complete problem. In this paper, let $cr(G)$ denote the crossing number of a graph G , we study the crossing number of $C_n \times K_3$ by using a transitive decomposition $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$. First, we construct a method of drawing the hexagon graph $C_{2k} \times K_3$ with less crossing number, and give the upper bound of the crossing number. Then, the edge set of $C_{2k} \times K_3$ is divided into $2k$ groups with

disjoint edges by mathematical induction and reduction to absurdity. All possible cases are discussed, and $cr(C_{2k} \times K_3) = 4k, k \geq 3$ is proved.

Keywords

Crossing Number, Hexagonal Graph, Transitive Decomposition

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图论是组合数学的一个重要分支,已有数百年之久的研究历史。拓扑图论作为图论的一个分支[1],其计算结果在社会科学、计算科学和自然科学等多个领域具有广泛的应用[2]。图的交叉数是图论中一个重要的部分,国内外很多学者都对这一问题进行研究[3],但由于探究和证明难度比较大,至今为止,图的交叉数的研究成果大部分集中在典型的图类上[4],只得到了较少图族的交叉数的精确值[5]。

设 A, B, C 为图 G 的边集的互不相交的子集,则对于图 G 的任意画法 D ,有

$$cr_D(A \cup B) = cr_D(A) + cr_D(B) + cr_D(A, B),$$

$$cr_D(A \cup B, C) = cr_D(A, C) + cr_D(B, C).$$

引理 1 如果在画法 D 中存在一条被交叉的边 e ,并且删除边 e 后得到了新的画法 D^* [6],那么 $cr(D) \geq cr(D^*) + 1$ 。

引理 2 画法 D 下的交叉数用 $cr(D)$ 或 $cr_D(G)$ 表示[7]。设 H 是 G 的子图且 $f_D(H)$ 是 H 到所有非负实数集合的映射: $f_D(H) = cr_D(H) + cr_D(H, G \setminus E(H))/2$ 。

引理 3 令 c 是一个正实数。假设 G_1, G_2, \dots, G_t 是图 G 的传递分解[8],若对图 G 的每个好的画法 D ,有 $\max\{l_c^D(G_1), l_c^D(G_2), \dots, l_c^D(G_t)\} \leq t$, 则 $cr(G) \geq \lceil ct \rceil$ 。

Jordan 曲线定理 任意一条简单(自身不相交)闭曲线 J 把平面分成两个区域,在不同区域的两点若要相连,则连结的弧必与 J 相交[9]。

根据 Jordan 曲线定理,我们有以下引理。

引理 4 在图 G 中,设 C 和 C' 是两个顶点不相交的圈, $P_t = u_1 u_2 \dots u_t$ 是一条 t 阶路径且 $V(P_t) \cap V(C) = \emptyset$ 。假设 D 是 G 的一个好的画法,那么 $cr_D(C, C')$ 是偶数;当 u_1 和 u_t 位于 $D(C)$ 的同一区域时, $cr_D(C, P_t)$ 为偶数,否则为奇数[10]。

2. 弱积图 $C_{2k} \times K_3$ 的交叉数

2.1. 弱积图 $C_n \times K_3$ 的定义

设弱积图的顶点集 $V(C_n \times K_3) = \{v_j^i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$, 边集

$E(C_n \times K_3) = \{v_j^i v_{j+1}^{i+1} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_j^i v_{j+2}^{i+1} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$, 其中上标和下标分别取模 n 和 3 。令 H_i 是由 $\{v_j^i : 1 \leq j \leq 3\} \cup \{v_j^{i+1} : 1 \leq j \leq 3\}$ 诱导的 $C_n \times K_3$ 的子图,其中 $1 \leq i \leq n$ 。很容易得到 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 是 $C_n \times K_3$ 的一个可传递分解。图 1 给出了 H_i 满足条件的 3 个好的画法,它们依次具有交叉数 1、1、0。

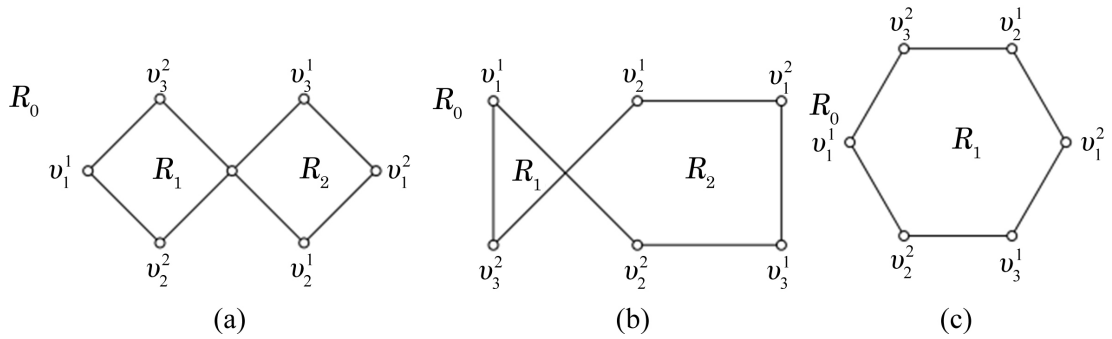


Figure 1. Good drawings of H_1
图 1. H_1 的好的画法

2.2. 弱积图 $C_{2k} \times K_3$ 的交叉数的上界

引理 5 对于弱积图 $C_{2k} \times K_3$, 当 $k \geq 3$ 且 $f_D(H_i) < 2$ 时, $cr_D(C_{2k} \times K_3) \leq 4k$ 。

证明: 图 2 给出了 $C_{2k} \times K_3$ 的一个有 $4k$ 个交叉点的好的画法, 因此, 当 $k \geq 3$ 且 $f_D(H_i) < 2$ 时, $cr_D(C_{2k} \times K_3) \leq 4k$ 。

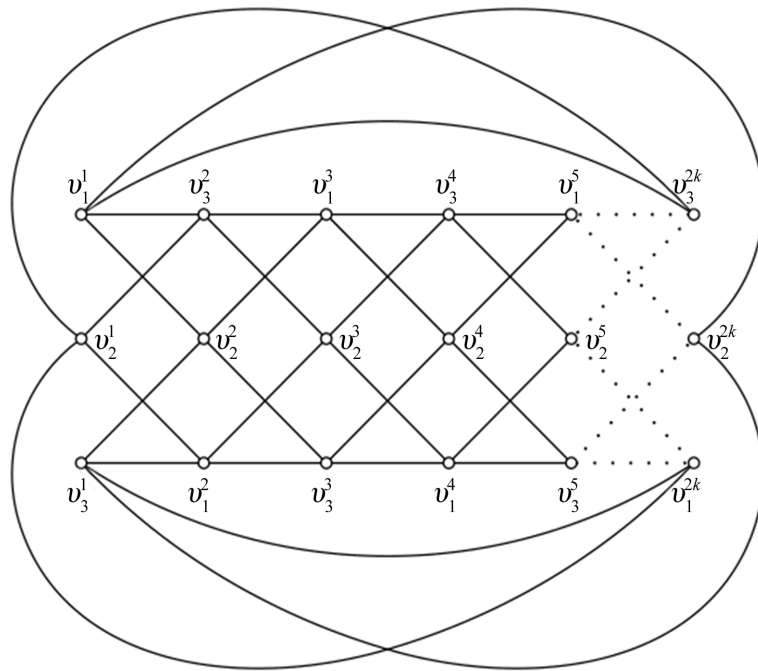


Figure 2. A good drawing of with $4k$ crossings
图 2. 有 $4k$ 个交叉点的好的画法

2.3. 弱积图 $C_{2k} \times K_3$ 的交叉数的下界

引理 6 令 D 是 $C_{2k} \times K_3$ 的一个好的画法, 其中 $k \geq 3$ 。若 $l_2^D(H_i) > 1$ 且 $D(H_i)$ 与图 1(a) 同构, 则 $l_2^D(H_i) = 2, 1 \leq i \leq 2k$ 。

证明: 反证法。不失一般性, 假设当 $D(H_1)$ 同构于图 1(a) 时, 有 $l_2^D(H_1) > 2$ 。通过 $l_2^D(H_1) > 2$, 得到 $f_D(H_1) < 2$ 和 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 。若顶点 v_1^3 在区域 R_1 内, 则由引理 2 可知, 路径 $v_1^3 v_2^4 v_3^3 v_1^2$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_2^3 v_1^2$ 各交路径 $v_2^1 v_3^1 v_2^2 v_3^1$ 一次, 与 $f_D(H_1) < 2$ 矛盾, 因此顶点 v_1^3 不在区域 R_1 内。类似地, 顶点 v_1^3 不在区域 R_2 内, 则

顶点 v_1^3 在区域 R_0 内。由于 v_2^3 和 v_3^3 与 v_1^3 在同构意义下等价，与上述证明过程类似，可得到 v_2^3 和 v_3^3 也位于区域 R_0 内。通过 $f_D(H_1) < 2$ 且 $cr_D(H_1) = 1$ ，得到 $cr_D(H_1, H_2) \leq 1$ 。因此，我们分别考虑以下两种情况。

情况 1 $cr_D(H_1, H_2) = 1$ 。

假设 $cr_D(H_1, v_2^3 v_1^3 v_3^3) = 1$ ，通过 $f_D(H_{1,2}) < 4$ ，得到 $cr_D(H_2) \leq 1$ 。若 $cr_D(H_2) = 1$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_2^3 v_3^2)$ 同构于图 3(a)。根据引理 2 可知，路径 $v_1^1 v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_1^1 v_3^{2k} v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交圈 $v_3^2 v_2^3 v_1^2 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。若 $f_D(H_{1,2}) < 4$ ，则 $D(H_1 \cup v_2^3 v_3^3 v_1^2 v_2^3 v_3^2)$ 同构于图 3(b)。根据引理 2 可知，路径 $v_2^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 v_1^7 v_3^8 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_2^1$ 和 $v_2^3 v_1^4 v_3^5 v_1^6 v_3^7 v_1^8 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。

假设 $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^2 v_2^3) = 1$ 或 $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^2 v_2^3) = 1$ ，不失一般性，假定 $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^2 v_2^3) = 1$ 。若 $cr_D(H_2) = 1$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_2^3)$ 同构于图 3(a)，与 $cr_D(H_1, v_2^3 v_1^3 v_3^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 情况相同，得到矛盾。因此 $cr_D(H_2) = 0$ ，即顶点 v_1^3 和 v_2^3 产生的边都是干净的，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_1^3 v_2^3 v_1^2)$ 同构于图 3(c)。根据引理 2 可知，路径 $v_1^3 v_2^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_1^{2k-1} v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_2^5 v_1^6 v_2^7 v_1^8 \cdots v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交圈 $v_2^3 v_2^3 v_1^2 v_2^3$ 一次；路径 $v_2^3 v_3^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_3^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 各交路径 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。

情况 2 $cr_D(H_1, H_2) = 0$ 。通过 $f_D(H_{1,2}) < 4$ ，得到 $cr_D(H_2) \leq 2$ 。

若 $cr_D(H_2) = 2$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_2^3)$ 同构于图 3(a)，与 $cr_D(H_1, v_2^3 v_1^3 v_3^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 情况相同，得到矛盾。

若 $cr_D(H_2) = 1$ ，不失一般性，假设路径 $v_1^2 v_3^2 v_2^3$ 被交，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_2^3 v_1^3 v_2^3)$ 同构于图 3(c)，与 $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^2 v_2^3) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 0$ 情况相同，得到矛盾。

若 $cr_D(H_2) = 0$ ，则 $D(H_{1,2})$ 的画法唯一确定，同构于图 3(d)。由引理 2 可知，路径 $v_1^3 v_2^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_1^{2k-1} v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_3^3 v_1^4 v_3^5 v_1^6 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交圈 $v_2^3 v_2^3 v_1^2 v_2^3$ 一次；路径 $v_2^3 v_3^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_2^{2k-1} v_3^{2k} v_1^1$ 和 $v_3^3 v_2^4 v_3^5 v_2^6 \cdots v_3^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 各交路径 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2$ 一次；路径 $v_1^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_2^1$ 和 $v_2^3 v_1^4 v_2^5 v_1^6 \cdots v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。证毕。

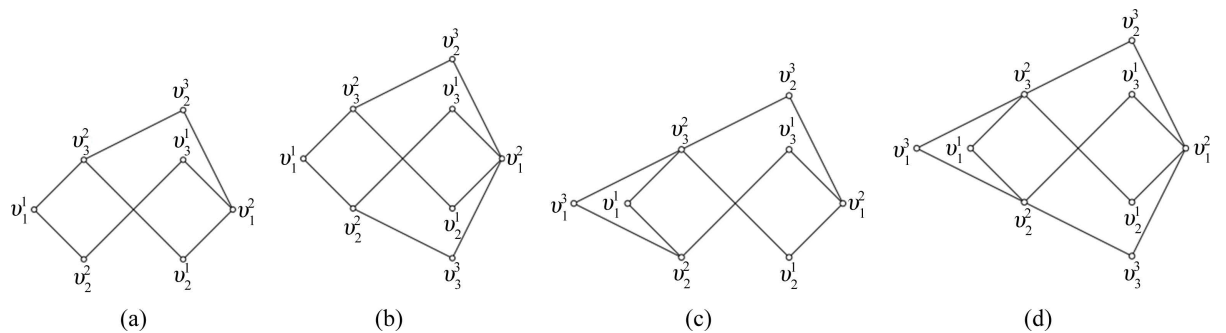


Figure 3. Subdrawings of $H_{1,2}$
图 3. $H_{1,2}$ 的子画法

引理 7 令 D 是 $C_{2k} \times K_3$ 的一个好的画法，其中 $k \geq 3$ 。若 $l_2^D(H_i) > 1$ 且 $D(H_i)$ 与图 1(b) 同构，则 $l_2^D(H_i) = 2$ ， $1 \leq i \leq 2k$ 。

证明：反证法。不失一般性，假设当 $D(H_1)$ 同构于图 1(b) 时，有 $l_2^D(H_1) > 2$ 。通过 $l_2^D(H_1) > 2$ ，得到 $f_D(H_1) < 2$ 和 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 。若顶点 v_1^3 在区域 R_1 内，则由引理 2 可知，路径 $v_1^3 v_2^4$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_2^5 v_1^6$ 各交路径 $v_2^3 v_1^2 v_3^2 v_1^2$ 一次，与 $f_D(H_1) < 2$ 矛盾，因此顶点 v_1^3 不在区域 R_1 内。若顶点 v_1^3 在区域 R_2 内，则由引理 2 可知，路径 $v_1^3 v_3^4$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_2^5 v_3^6$ 各交路径 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_1) < 2$ 矛盾，因此顶点 v_1^3 不在区域 R_2 内，则顶点 v_1^3 在区域 R_0 内。由于 v_2^3 和 v_3^3 与 v_1^3 在同构意义下等价，与上述证明的过程类似，可以得到顶点 v_2^3 和 v_3^3 也位于区域 R_0 内。通过 $f_D(H_1) < 2$ 且 $cr_D(H_1) = 1$ ，得到 $cr_D(H_1, H_2) \leq 1$ 。因此，我们分别考虑以下两种情况。

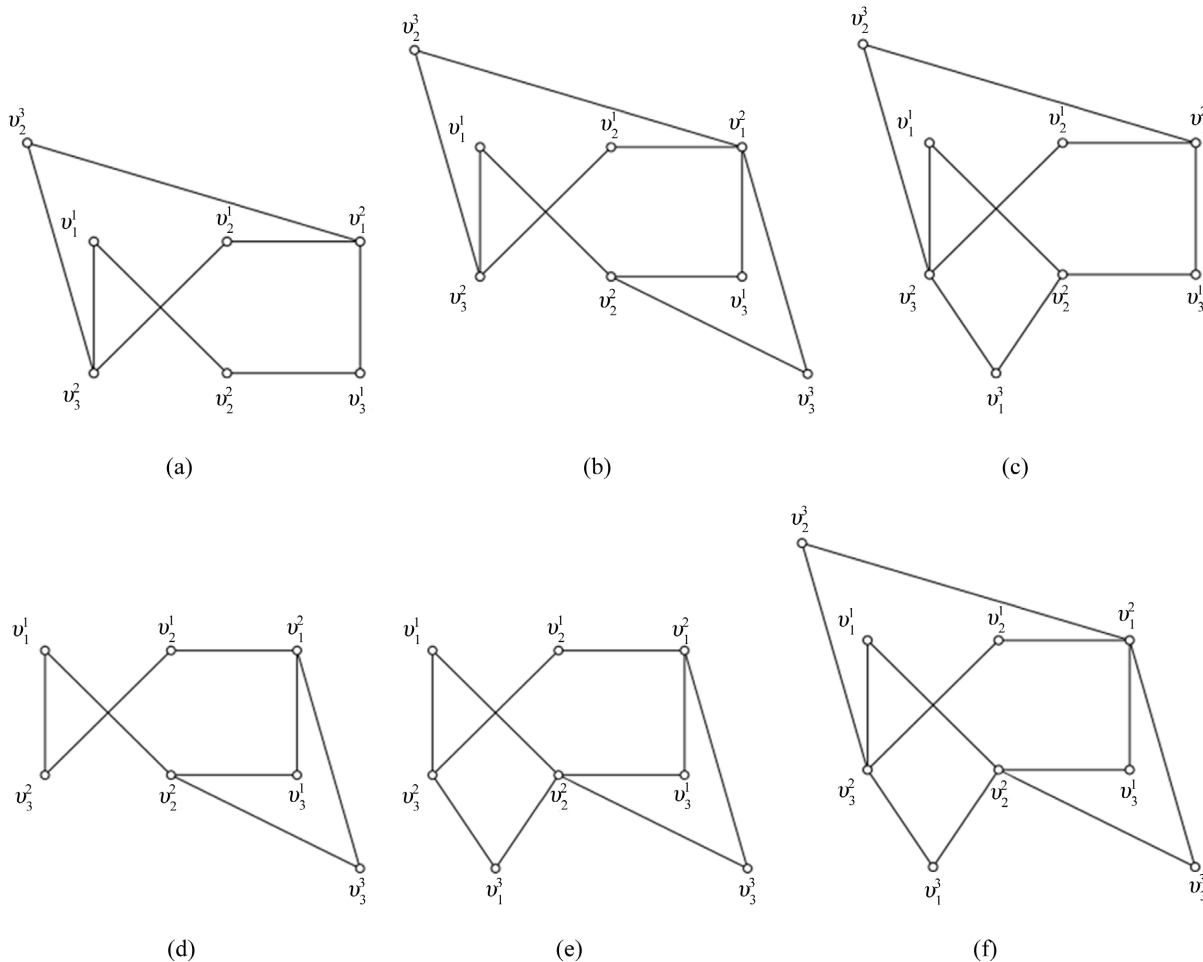


Figure 4. Subdrawings of $H_{1,2}$
图 4. $H_{1,2}$ 的子画法

情况 1 $cr_D(H_1, H_2) = 1$ 。

假设 $cr_D(H_1, v_2^1 v_3^1 v_3^2) = 1$ ，通过 $f_D(H_{1,2}) < 4$ ，得到 $cr_D(H_2) \leq 1$ 。若 $cr_D(H_2) = 1$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_2^3 v_3^2)$ 同构于图 4(a)。根据引理 2 可知，路径 $v_1^1 v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_1^1 v_3^{2k} v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交圈 $v_3^2 v_2^3 v_1^2 v_2^3 v_3^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。若 $cr_D(H_2) = 0$ ，则 $D(H_1 \cup v_2^2 v_3^3 v_1^2 v_2^3 v_3^2)$ 同构于图 4(b)。根据引理 2 可知，路径 $v_3^3 v_2^4 v_1^5 v_3^6 v_1^7 v_3^8 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_2^1$ 和 $v_3^3 v_1^4 v_3^5 v_1^6 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2 v_1^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。

假设 $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^3 v_2^2) = 1$ ，若 $cr_D(H_2) = 1$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_2^3 v_3^2)$ 同构于图 4(a)，与 $cr_D(H_1, v_2^2 v_3^3 v_2^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 情况相同，得到矛盾。因此 $cr_D(H_2) = 0$ ，即顶点 v_1^1 和 v_2^3 产生的边都是干净的，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_2^3 v_3^3 v_1^2 v_2^3)$ 同构于图 4(c)。根据引理 2 可知，路径 $v_1^1 v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_1^1 v_3^{2k} v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交圈 $v_3^2 v_2^3 v_1^2 v_2^3 v_3^2$ 一次；路径 $v_1^3 v_2^4 v_3^5 v_1^6 v_3^7 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_2^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_3^2 v_1^2$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。

假设 $cr_D(H_1, v_1^2 v_2^3 v_3^2) = 1$ ，若 $cr_D(H_2) = 1$ ，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^3 v_2^2)$ 同构于图 4(d)。根据引理 2 可知，路径 $v_1^1 v_2^{2k} v_3^1$ 和 $v_1^1 v_3^{2k} v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交路径 $v_1^1 v_2^3 v_3^1 v_2^3 v_1^1$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。因此 $cr_D(H_2) = 0$ ，即顶点 v_1^1 和 v_3^3 产生的边都是干净的，则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^3 v_2^2 v_3^3 v_2^2)$ 同构于图 4(e)。经过检验，很容易得到 $D(H_{1,2})$ 与图 5 中的其中一个图同构。

若 $D(H_{1,2})$ 同构于图 5(a)，则根据引理 2 可知，路径 $v_1^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_2^1$ 和 $v_3^3 v_1^4 v_3^5 v_1^6 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 各交路径 $v_1^1 v_2^3 v_3^1 v_2^3 v_3^1$ 一次，与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。若 $D(H_{1,2})$ 同构于图 5(b)，则根据引理 2 可知，路径 $v_1^2 v_1^{2k} v_3^1$ 和

$v_1^3 v_2^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_1^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^3 v_2^1 v_3^2 v_1^2$ 一次; 路径 $v_1^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_1^1$ 和 $v_3^3 v_2^4 v_3^5 v_2^6 \cdots v_3^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 各交路径 $v_2^1 v_3^2 v_1^2$ 一次, 与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。

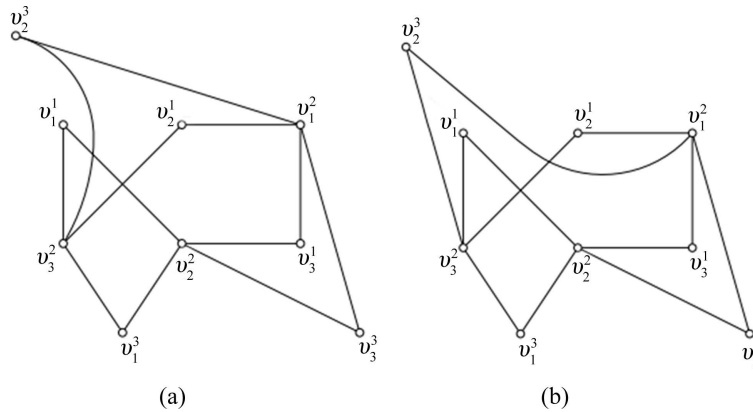


Figure 5. Subdrawings of $H_{1,2}$
图 5. $H_{1,2}$ 的子画法

情况 2 $cr_D(H_1, H_2) = 0$ 。通过 $f_D(H_{1,2}) < 4$, 得到 $cr_D(H_2) \leq 2$ 。

若 $cr_D(H_2) = 2$, 则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_3^2)$ 同构于图 4(a), 与 $cr_D(H_1, v_2^1 v_3^1 v_3^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 情况相同, 得到矛盾。

若 $cr_D(H_2) = 1$, 假设 $v_2^1 v_3^1 v_3^2$ 路径被交, 则 $D(H_1 \cup v_2^1 v_3^1 v_3^2 v_3^2)$ 同构于图 4(b); 假设 $v_1^2 v_3^2 v_2^2$ 路径被交, 则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_3^1 v_2^2)$ 同构于图 4(c); 假设 $v_1^2 v_2^2 v_3^2$ 路径被交, 则 $D(H_1 \cup v_1^2 v_3^2 v_3^1 v_2^2)$ 同构于图 4(e)。分别与 $cr_D(H_1, v_2^1 v_3^1 v_3^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$, $cr_D(H_1, v_1^2 v_3^2 v_2^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 和 $cr_D(H_1, v_1^2 v_2^2 v_3^2) = 1$ 且 $cr_D(H_2) = 1$ 情况相同, 得到矛盾。

若 $cr_D(H_2) = 0$, 则 $D(H_{1,2})$ 的画法唯一确定, 同构于图 4(f)。由引理 2 可知, 路径 $v_1^3 v_2^4 v_1^5 v_2^6 \cdots v_1^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 和 $v_1^3 v_3^4 v_1^5 v_3^6 \cdots v_1^{2k-1} v_3^{2k} v_1^1$ 各交圈 $v_2^1 v_3^2 v_1^2 v_2^2$ 一次; 路径 $v_2^1 v_3^4 v_1^5 v_3^6 v_2^7 v_3^8 \cdots v_2^{2k-1} v_3^{2k} v_1^1$ 和 $v_2^1 v_3^4 v_2^5 v_1^6 v_2^7 v_3^8 \cdots v_2^{2k-1} v_1^{2k} v_3^1$ 各交路径 $v_1^1 v_2^2 v_3^3 v_1^2 v_2^2$ 一次; 路径 $v_3^3 v_1^4 v_2^5 v_3^6 v_2^7 v_3^8 \cdots v_3^{2k-1} v_2^{2k} v_1^1$ 和 $v_3^3 v_2^4 v_3^5 v_1^6 v_3^7 v_1^8 \cdots v_3^{2k-1} v_1^{2k} v_2^1$ 各交圈 $v_1^2 v_3^2 v_1^2 v_2^2 v_1^2$ 一次, 与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。证毕。

引理 8 令 D 是 $C_{2k} \times K_3$ 的一个好的画法且 $l_D^D(H_i) > 1$, 其中 $k \geq 3$ 。若 $cr_D(H_i, H_{i+1}) = 3$ 且 $D(H_{i+1})$ 与图 6 中的其中一个图同构, 则 v_1^{i+3}, v_2^{i+3} 和 v_3^{i+3} 均在区域 R_0 内, 其中 $1 \leq i \leq 2k$ 。

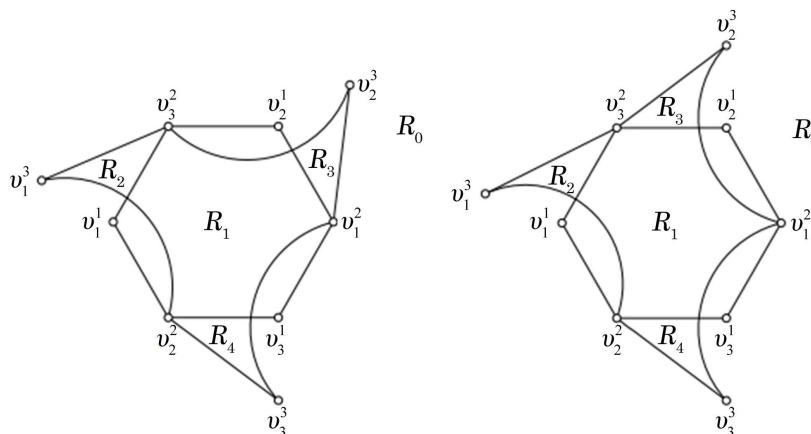


Figure 6. Subdrawings of $H_{1,2}$
图 6. $H_{1,2}$ 的子画法

证明: 不失一般性, 假定 $l_2^D(H_1) > 2$, $cr_D(H_1, H_2) = 3$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 与图 6 中的其中一个图同构。通过 $l_2^D(H_1) > 2$, 可得到 $f_D(H_1) < 2$ 和 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 。

如果 v_1^4 和 v_2^3 位于 $D(H_1)$ 的不同区域内, 那么由引理 2 可知, $v_1^3v_1^4$ 交 H_1 一次, 与 $f_D(H_1) < 2$ 矛盾, 因此 v_1^4 和 v_2^3 位于 $D(H_1)$ 的相同区域内。若 v_1^4 在区域 R_2 内, 则由引理 2 可知, 路径 $v_2^3v_1^4$ 和 $v_3^3v_1^4$ 各交路径 $v_1^1v_3^2v_1^3v_2^2$ 一次, 与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾, 因此顶点 v_1^4 不在区域 R_2 内, 同理可证, 顶点 v_1^4 也不在区域 R_3 和 R_4 内, 则顶点 v_1^4 在区域 R_0 内。由于 v_2^4 和 v_3^4 与 v_1^4 在同构意义下等价, 与上述证明过程类似, 可得到 v_2^4 和 v_3^4 也位于区域 R_0 内。证毕。

引理 9 令 D 是 $C_{2k} \times K_3$ 的一个好的画法且 $l_2^D(H_i) > 1$, 其中 $k \geq 3$ 。若 $cr_D(H_i, H_{i+1}) = 3$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 与图 6 中的其中一个图同构, 则 $cr_D(H_{i+2}, H_{i,i+1}) = 0$, $1 \leq i \leq 2k$ 。

证明: 反证法。不失一般性, 假定 $l_2^D(H_1) > 2$, $cr_D(H_1, H_2) = 3$ 且 $D(H_{i,i+1})$ 与图 6 中的其中一个图同构, 有 $cr_D(H_3, H_{1,2}) \geq 1$ 。通过 $l_2^D(H_1) > 2$, 可得到 $f_D(H_1) < 2$ 和 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 。不失一般性, 假设 $cr_D(v_1^4v_2^3, H_{1,2}) \geq 1$ 。由于 $cr_D(H_1, H_2) = 3$ 且 $f_D(H_1) < 2$, 可得 $cr_D(v_1^4v_2^3, H_1) = 0$, 因此 $cr_D(v_1^4v_2^3, H_2) \geq 1$ 。又因为 D 是一个好的画法, $cr_D(v_1^4v_2^3, v_2^3v_2^3v_1^2) = 0$, 因此 $cr_D(v_1^4v_2^3, v_2^3v_1^2v_2^3v_1^2) \geq 1$ 。由引理 8 可知, 顶点 v_1^4 在区域 R_0 内。根据引理 2 可知, 路径 $v_1^4v_2^3$ 交圈 $v_2^1v_3^3v_1^3v_2^3v_1^2$ 至少两次, 与 $f_D(H_{1,2}) < 4$ 矛盾。证毕。

引理 10 令 D 是 $C_{2k} \times K_3$ 的一个好的画法且 $l_2^D(H_i) > 1$, 其中 $k \geq 3$ 。若 $D(H_i)$ 与图 1(c) 同构, 则 $l_2^D(H_i) \leq 3$, $1 \leq i \leq 2k$ 。

证明: 反证法。不失一般性, 假设当 $D(H_1)$ 同构于图 1(c) 时, 有 $l_2^D(H_1) > 3$ 。通过 $l_2^D(H_1) > 3$, 得到 $f_D(H_1) < 2$, $f_D(H_{1,2}) < 4$ 和 $f_D(H_{1,2,3}) < 6$ 。我们分别考虑以下两种情况。

情况 1 v_1^3, v_2^3 和 v_3^3 均在同一区域。

情况 2 v_1^3, v_2^3 和 v_3^3 不在同一区域。

3. 结论

本文通过分支限界法证明了六边形图 $C_{2k} \times K_3$ ($k \geq 3$) 的交叉数, 并给出了相应的好的画法, 确定了其交叉数的上界。进一步采用数学归纳法和反证法证明其交叉数的下界至少是 $4k$, 与假设矛盾, 因此可以确定 $C_{2k} \times K_3$ ($k \geq 3$) 的交叉数是 $4k$, 即 $cr(C_{2k} \times K_3) = 4k$, $k \geq 3$ 。对于不同的图, 需要设计不同的分支限界策略才能对顶点数较大的图的交叉数进行计算。在得到对应的好的画法后, 与数学证明相结合, 最终才能确定给定图类的交叉数。进一步提出猜想: $cr(C_6 \times K_3) = 7$ 。

参考文献

- [1] Bondy, J. and Murty, U. (1976) Graph Theory with Its Applications. American Elsevier, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2>
- [2] Clancy, K., Haythorpe, M. and Newcombe, A. (2020) A Survey of Graphs with Known or Bounded Crossing Numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **78**, 209-296.
- [3] Fiorini, S. and Gauci, J.B. (2003) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph $P(3k, k)$. *Mathematica Bohemica*, **128**, 337-347. <https://doi.org/10.21136/MB.2003.134001>
- [4] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1983) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **4**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [5] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [6] Schaefer, M. (2017) The Graph Crossing Number and Its Variant: A Survey. *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS21. <https://doi.org/10.37236/2713>
- [7] Giambastiani, B.M.S. (2007) Evoluzione Idrologica ed Idrogeologica della Pineta di San Vitale (Ravenna). Ph.D. Thesis, Bologna University, Bologna.
- [8] Wang, J., Ouyang, Z. and Huang, Y. (2019) The Crossing Number of the Hexagonal Graph $H_{3,n}$. *Discussiones Mathe-*

maticae Graph Theory, **39**, 547-554. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2092>

- [9] Zheng, W., Lin, X., Yang, Y. and Yang, X. (2008) The Crossing Number of Flower Snarks and Related Graphs. *Ars Combinatoria*, **86**, 57-64.
- [10] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.