

具有高阶多项式再生性的细分格式

孙雯雯, 亓万锋*

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年1月9日; 录用日期: 2023年2月3日; 发布日期: 2023年2月13日

摘要

细分方法是计算图形学中一种非常重要的几何造型方法, 它可以生成光滑的极限曲线或曲面, 并且计算高效、与拓扑无关, 在3D打印、动画设计等方面有着广泛应用。到目前为止, 细分方法经过多年发展, 相关理论研究已经进入较为成熟的阶段, 但构造具有较高再生性的细分多项式仍然是非常值得研究的课题, 具有重要意义。论文基于细分方法中生成函数的研究, 通过乘以扰动的方式来构造具有较高再生性的细分多项式, 并讨论扰动中参数的统一表达式和所构造的细分多项式的生成函数表达式。

关键词

细分格式, 多项式再生性, 扰动

Subdivision Schemes with High Order of Polynomial Reproduction

Wenwen Sun, Wanfeng Qi*

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 9th, 2023; accepted: Feb. 3rd, 2023; published: Feb. 13th, 2023

Abstract

Subdivision method is a very important geometric modeling method in computational graphics. It can generate smooth limit curve or surface, and the calculation is efficient and has nothing to do with the topology of the initial control polygons. It has a wide range of applications in 3D printing, animation design and other aspects. So far, after years of development of subdivision methods, the relevant theoretical research has entered a relatively mature stage, but the construction of higher order polynomial reproduction of subdivision scheme is still a very worthy research topic, and has important significance. Based on the research of generating function in the subdivision method,

*通讯作者。

this paper constructs several subdivision schemes with high order of polynomial reproduction by multiplying by perturbation, and discusses the unified expression of parameters in the perturbation and the generating function expression of the constructed subdivision polynomial.

Keywords

Subdivision Scheme, Polynomial Reproduction, Perturbation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细分思想在 1974 年 Chaikin [1] 提出的 Chaikin 算法中首次出现。Chaikin 算法提出了一种多边形割角法, 通过反复对控制多边形进行割角生成一条光滑的极限曲线, 随后 Riesenfeld [2] 发现这条极限曲线本质上是均匀二次 B 样条曲线。Chaikin 算法经历了以下几次重要推广, 由 Riesenfeld [2] 推广到任意次均匀 B 样条曲线、1978 年由 Sabin [3]、Doo 和 Sabin [4] 推广到张量积双二次 B 样条曲面、Catmull 和 Clark [5] 将该算法推广到双三次 B 样条曲面和任意拓扑的多边形控制网格上。细分方法是曲线曲面造型的重要方法, 以上对于 Chaikin 算法的推广使细分方法得到重要应用。

在图形学中, 大量应用要求通过简单高效的方法来表示光滑曲面, 细分格式可以满足这一要求。我们希望构造光滑曲面所使用的细分具有收敛性和较高光滑度, 另外一个比较重要的要求是能够再生更高次数的多项式, 故如何提升细分多项式的再生性是十分值得研究的课题。B 样条细分格式是非常重要的一类逼近型细分格式, 它的性质优异, 细分曲线的极限曲线是 B 样条。拟样条细分是均匀 B 样条细分的推广, 较之 B 样条细分具有更高的多项式再生性。Dong 和 Shen [6] 首先提出了基本型拟样条, Dyn 等 [7] 随后提出了对偶型拟样条。Dyn 等 [7] 于 2008 年基于细分生成函数给出了提升基本型二重拟样条和对偶型二重拟样条的再生性的方法, Conti 和 Hormann [8] 于 2011 年将上述方法推广到任意重基本型拟样条和对偶型拟样条, 该方法通过对生成函数求导来形成具有新的再生性的生成函数。多年来有两类方法可以将逼近型细分格式转换为插值型细分格式, 一类是在逼近型细分的生成函数后乘以一个新的生成函数来形成插值型细分格式、第二类是采用回推的形式构造出插值型细分。Luo 和 Qi [9] 于 2013 年对上述第二类方法进行深刻分析并给出其本质。元万锋和王金玲 [10] 于 2017 年用添加偏移量的方式构造新的细分格式, 并分析了此细分格式何时能够达到最高求和规则。毛智永和元万锋 [11] 于 2018 对上述方式进行推广分析。以上研究并未讨论上述两类方法之间的关系。时军 [12] 发现了上述两类方法与多项式再生性三者之间的联系, 将近逼近型细分格式转换为插值型细分格式的第一类和第二类方法统一了起来, 提出提升因子的概念, 推导出一种提升多项式再生性的简单方法。该方法不许进行求导计算, 只需对生成多项式形式上进行整理。对于多元细分, 关于多项式再生性问题的研究最早的工作是由 Charina 和 Conti [13] 于 2013 年就伸缩矩阵为 mI , $|m| \geq 2$ 的形式的多元细分对上述 Conti 和 Hormann [8] 的工作进行了推广。时军 [12] 将提升多项式再生性的思想推广到多元细分的情形, 给出一种利用提升因子提升多项式再生性的简单方法, 从利用提升因子提升多项式再生性的角度来导出新格式, 并详细给出提升因子的几何意义。较之曲线细分, 曲面细分在多项式再生性方面的理论要复杂得多, 主要原因在于伸缩矩阵的多样性以及再生性质对于参数化的依赖。

本论文在上述理论基础上, 提出通过在细分生成函数后添加扰动的方法来提升多项式的再生性, 进

而推导出一种简单的提升多项式再生性的方法。本文的创新之处在于在细分生成函数后乘以带有参数的对称扰动, 形成具有更高再生性的新的带有参数生成函数, 推导出参数的统一表达式并加以证明。

2. 细分曲线

定义 1 (生成函数) 设细分格式 S_a 的掩模为 $a = \{a_\alpha \in R, \alpha \in Z^s\}$, S_a 的生成函数定义为掩模的 Laurent 多项式

$$a(z) = \sum_{\alpha \in Z^s} a_\alpha z^\alpha,$$

其中 $z = (z_1, \dots, z_s)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in Z^s$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_s^{\alpha_s}$ 。生成函数也叫做符号。

定义 2 [6] (Primal $[m, l]$ 型拟样条) 拟样条是根据它们的细化掩模来定义的。它从简单恒等式开始, 对于给定的非负整数 m, l , 且 $l \leq m-1$, $\xi \in [-\pi, \pi]$, 给出一型拟样条的掩模:

$$|_1 \hat{a}(\xi)|^2 := |_1 \hat{a}_{(m,l)}(\xi)|^2 := \cos^{2m} \left(\frac{\xi}{2} \right) \sum_{j=0}^l \binom{m+l}{j} \sin^{2j} \left(\frac{\xi}{2} \right) \cos^{2(l-j)} \left(\frac{\xi}{2} \right).$$

二型拟样条的掩模:

$${}_2 \hat{a}(\xi)^2 := {}_2 \hat{a}_{(m,l)}(\xi)^2 := \cos^{2m} \left(\frac{\xi}{2} \right) \sum_{j=0}^l \binom{m+l}{j} \sin^{2j} \left(\frac{\xi}{2} \right) \cos^{2(l-j)} \left(\frac{\xi}{2} \right)$$

令 $z = e^{-i\xi}$, $\cos \xi = \frac{z+z^{-1}}{2}$, 得到 $\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) = \frac{2+z+z^{-1}}{4}$, $\sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) = \frac{2-z-z^{-1}}{4}$ 。由此可以得到一型、二型拟样条的掩模的另一种表达方式:

$$|_1 \hat{a}(\xi)|^2 := \left(\frac{2+z+z^{-1}}{4} \right)^m \sum_{j=0}^l \binom{m+l}{j} \left(\frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^j \left(\frac{2+z+z^{-1}}{4} \right)^{l-j},$$

$${}_2 \hat{a}(\xi)^2 := \left(\frac{2+z+z^{-1}}{4} \right)^m \sum_{j=0}^l \binom{m+l}{j} \left(\frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^j \left(\frac{2+z+z^{-1}}{4} \right)^{l-j}.$$

Dyn 等[7]于 2008 年基于细分生成函数给出了提升基本型二重拟样条和对偶型二重拟样条的再生性的方法, 提出了以下引理 1 和引理 2。

引理 1 [7] (基本型多项式再生) 设细分格式 S_a 生成 d_G 次多项式, 则其关于 Primal 参数化再生 $d_R \leq d_G$ 次多项式当且仅当 $a(z)-2$ 可被 $(1-z)^{d_R+1}$ 整除。

引理 2 [7] (对偶型多项式再生) 设细分格式 S_a 生成 d_G 次多项式, 则其关于 Dual 参数化再生 $d_R \leq d_G$ 次多项式当且仅当 $a(z^2)*z-2$ 可被 $(1-z)^{d_R+1}$ 整除。

Conti 等[8]于 2011 年将上述方法推广到任意重基本型拟样条和对偶型拟样条, 提出如下引理 3。

引理 3 [8] 将数据 $f_i^k (i \in Z, k \in N_0)$ 和参数值 $t_i^k = t_0^k + \frac{i}{m^k}$, $t_0^k = t_0^{k-1} - \frac{\tau}{m^k}$ 相关联, 其中 $\tau = \frac{a'(1)}{m}$ 是对应的参数平移, 则一个收敛的细分格式 S_a 关于该参数化再生 d 次多项式, 当且仅当对 $k=0, \dots, d$ 时, 有

$$a^{(k)}(1) = m \prod_{l=0}^{k-1} (\tau - l), a^{(k)}(\zeta_m^j) = 0, j = 1, \dots, m-1,$$

其中 $\zeta_m^j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}$ 。

3. 细分多项式再生性

本节通过在二重基本型细分生成函数后乘以扰动的方法来提升多项式的再生性, 进而推导出一种简

单的提升多项式再生性的方法。讨论当二重基本型细分生成函数乘以扰动后再生 3 次和 5 次多项式时, 细分生成函数应满足的条件及扰动中参数的统一表达式。

定理 1 设 $a(z)$ 为二重基本型细分生成函数, $S = a(z)b(z)$ 为生成函数 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, 其中 i 表示扰动次数。假设 S 生成 d_G ($d_G \geq 3$) 次多项式, 则其再生 3 次多项式当且仅当

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = -\sum_{k=2}^i k^2 \alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

证明: 由上述引理 1, 假设 S 生成数 $d_G \geq 3$, 若 S 再生数达到 3 当且仅当 $S(z) - 2$ 可被 $(1-z)^{3+1}$ 整除。由此得到以下方程组:

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ S''(1) = a(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a''(1) = 0, \\ S^{(3)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + a^{(3)}(1) = 0. \end{cases}$$

解此线性方程组得到

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = -\sum_{k=2}^i k^2 \alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

综上, 当 S 生成数 $d_G \geq 3$, S 再生数达到 3 当且仅当

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = -\sum_{k=2}^i k^2 \alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

证毕。

定理 2 设 $a(z)$ 为二重基本型细分生成函数, $S = a(z)b(z)$ 为生成函数 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, 其中 i 表示扰动次数。假设 S 生成 d_G ($d_G \geq 5$) 次多项式, 则其再生 5 次多项式当且仅当

$$1) \ i=1 \text{ 时, } a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, \quad a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), \quad a'(1) = 0,$$

$$10a^{(3)}(1)^2 - 60a^{(3)}(1) + 3a^{(5)}(1) = 0, \quad a(1) = 2, \quad \alpha_1 = \frac{a^{(3)}(1)}{12}.$$

$$2) \ i=2 \text{ 时, } a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, \quad a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), \quad a'(1) = 0, \quad a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \left(3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right).$$

3) $i \geq 3$ 时, $a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}$, $a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1)$, $a'(1) = 0$, $a(1) = 2$,

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (4k^4 - 16k^2)\alpha_k + 3a^{(3)}(1) - \frac{a^{(3)}(1)^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (k^4 - k^2)\alpha_k + \frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{a^{(3)}(1)^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right),$$

其中 α_k 为自由参数, $k = 3, \dots, i$ 。

证明: 本定理证明按照 $b(z)$ 中参数 α_i 的个数分为以下三个部分:

① $i = 1$ 时, 由引理 1, 设 S 生成数 $d_G \geq 5$, 若 S 再生数达到 5 当且仅当 $S(z) - 2$ 可被 $(1 - z)^{5+1}$ 整除。

由此得到以下方程组:

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ S''(1) = a(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a''(1) = 0, \\ S^{(3)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + a^{(3)}(1) = 0, \\ S^{(4)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (22k^2 + 2k^4) \alpha_k - 4a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k + a^{(4)}(1) = 0, \\ S^{(5)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (-100k^2 - 20k^4) \alpha_k + 10a''(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + 10a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a^{(5)}(1) = 0. \end{cases}$$

取 $i = 1$, 化简上述方程组得到

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ \alpha_1 = -\frac{1}{4}a''(1), \\ \alpha_1 = \frac{1}{12}a^{(3)}(1), \\ \alpha_1 = \frac{1}{48}(3a''(1)^2 - a^{(4)}(1)), \\ \alpha_1 = -\frac{1}{240}(10a''(1)a^{(3)}(1) - a^{(5)}(1)), \end{cases}$$

解方程组得到 S 再生数达到 5 当且仅当

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, 10a^{(3)}(1)^2 - 60a^{(3)}(1) + 3a^{(5)}(1) = 0,$$

$$a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, \alpha_1 = \frac{a^{(3)}(1)}{12}.$$

② $i = 2$ 时, 由引理 1, 设 S 生成数 $d_G \geq 5$, 若 S 再生数达到 5 当且仅当 $S(z) - 2$ 可被 $(1 - z)^{5+1}$ 整除, 由此得到以下方程组:

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ S''(1) = a(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a''(1) = 0, \\ S^{(3)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + a^{(3)}(1) = 0, \\ S^{(4)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (22k^2 + 2k^4) \alpha_k - 4a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k + a^{(4)}(1) = 0, \\ S^{(5)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (-100k^2 - 20k^4) \alpha_k + 10a''(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + 10a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a^{(5)}(1) = 0. \end{cases}$$

取 $i = 2$, 化简上述方程组得到

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = -\frac{1}{4}a''(1), \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = \frac{1}{12}a^{(3)}(1), \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = \frac{1}{48}(3a''(1)^2 - a^{(4)}(1)), \\ \alpha_1 + 6\alpha_2 = -\frac{1}{240}(10a''(1)a^{(3)}(1) - a^{(5)}(1)). \end{cases}$$

求解上述方程组, 得出 S 再生数达到 5 当且仅当

$$\begin{aligned} a^{(3)}(1) &= -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{12} \left(3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right), \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right). \end{aligned}$$

③ $i \geq 3$ 时, 由引理 1, 假设 S 生成数 $d_G \geq 5$, S 再生数达到 5 当且仅当 $S(z) - 2$ 可被 $(1 - z)^{5+1}$ 整除, 由此得到以下方程组:

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, \\ S'(1) = a'(1) = 0, \\ S''(1) = a(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a''(1) = 0, \\ S^{(3)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + a^{(3)}(1) = 0, \\ S^{(4)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (22k^2 + 2k^4) \alpha_k - 4a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k + a^{(4)}(1) = 0, \\ S^{(5)}(1) = a(1) \sum_{k=1}^i (-100k^2 - 20k^4) \alpha_k + 10a''(1) \sum_{k=1}^i -6k^2 \alpha_k + 10a^{(3)}(1) \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k + a^{(5)}(1) = 0. \end{cases}$$

化简上述方程组得到

$$\begin{cases} S(1) = a(1) = 2, & (1) \\ S'(1) = a'(1) = 0, & (2) \\ \sum_{k=1}^i 2k^2 \alpha_k = -\frac{1}{2} a''(1), & (3) \\ \sum_{k=1}^i 6k^2 \alpha_k = \frac{1}{2} a^{(3)}(1), & (4) \\ \sum_{k=1}^i (22k^2 + 2k^4) \alpha_k = \frac{1}{2} (3a''(1)^2 - a^{(4)}(1)), & (5) \\ \sum_{k=1}^i (-100k^2 - 20k^4) \alpha_k = \frac{1}{2} (10a''(1)a^{(3)}(1) - a^{(5)}(1)), & (6) \end{cases}$$

化简(3) (4)式得出 $a''(1) = -\frac{1}{3} a^{(3)}(1)$ 。化简(4) (5) (6)式得出

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k = \frac{a^{(3)}(1)}{12}, & (7) \\ \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{240}, & (8) \\ \sum_{k=1}^i k^4 \alpha_k = -\frac{5a^{(3)}(1)}{12} + \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} + \frac{a^{(5)}(1)}{40}. & (9) \end{cases}$$

由(7) (8)式得出 $a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}$ 。

即在约束条件 $a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}$, $a''(1) = -\frac{1}{3} a^{(3)}(1)$, $a'(1) = 0$ 下, 有以下方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^i k^2 \alpha_k = \frac{a^{(3)}(1)}{12}. & (7) \\ \sum_{k=1}^i k^4 \alpha_k = -\frac{5a^{(3)}(1)}{12} + \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} + \frac{a^{(5)}(1)}{40}. & (9) \end{cases}$$

求解上述方程组, 得出 S 再生数达到 5 当且仅当

$$a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3} a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (4k^4 - 16k^2) \alpha_k + 3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (k^4 - k^2) \alpha_k + \frac{1}{2} a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right),$$

其中 α_k 为自由参数, $k = 3, \dots, i$ 。

证毕。

4. 数值算例

4.1. 细分多项式再生数为 3 的数值算例

4.1.1. $a(z) = 2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^j$, 其中 $j \geq 4$ 且 j 为偶数

本题 $a(z)$ 生成数为 $d_G = j-1$, $S = a(z)b(z)$ 为二重 $j-1$ 次 B 样条的生成函数 $a(z) = 2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^j$ 乘以扰动 $b(z)$, 其中 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, i 表示扰动次数。则其再生 3 次多项式当且仅当

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, \alpha_i = -\sum_{j=2}^i k^2 \alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

由上述公式, 表 1 表示当 $i = 1, 2, 3$ 时, S 再生 3 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 1. $2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^j \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1\right)$, $i = 1, 2, 3$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 3

表 1. $2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^j \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1\right)$, $i = 1, 2, 3$ 。再生数为 3 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
一次	$\alpha_1(z^{-1} + z - 2) + 1$	$\alpha_1 = -\frac{j}{8}$	$S = \frac{2z^{\frac{j}{2}}(1+z)^j \left(-\frac{j}{8}z^{-1} + \left(1 + \frac{j}{4}\right) - \frac{j}{8}z\right)}{2^j}$
二次	$\sum_{k=1}^2 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = -4\alpha_2 - \frac{j}{8}$	$S = \frac{2z^{\frac{j}{2}}(1+z)^j \left(\alpha_2 z^{-2} + \left(-4\alpha_2 - \frac{j}{8}\right)z^{-1} + \left(1 + 6\alpha_2 + \frac{j}{4}\right) + \left(-4\alpha_2 - \frac{j}{8}\right)z + \alpha_2 z^2\right)}{2^j}$ α_2 为任意值
三次	$\sum_{k=1}^3 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = -4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{j}{8}$	$S = \frac{2z^{\frac{j}{2}}(1+z)^j \left(\alpha_3 z^{-3} + \alpha_2 z^{-2} + \left(-4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{j}{8}\right)z^{-1} + \left(1 + 6\alpha_2 + 16\alpha_3 + \frac{j}{4}\right) + \left(-4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{j}{8}\right)z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3\right)}{2^j}$ α_2, α_3 为任意值

本例题中, 扰动次数为一次时, 当 $j = 2m$, 得到的生成函数为 Primal $[m, 1]$ 型拟样条。

取例题中 $j = 4$ 的情形。取 $a(z) = 2z^{-2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^4$ 。 $S = a(z)b(z)$ 为二重三次 B 样条的生成函数 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z)$, 其中 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, i 表示扰动次数。则其再生 3 次多项式当且仅当

$$a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, \alpha_i = -\sum_{j=2}^i k^2 \alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

由上述公式, 表 2 表示当 $i = 1, 2, 3$ 时, S 再生 3 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 2. $2z^{-2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^4\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=1,2,3$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 3

表 2. $2z^{-2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^4\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=1,2,3$ 。再生数为 3 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
一次	$\alpha_1(z^{-1}+z-2)+1$	$\alpha_1=-\frac{1}{2}$	$S=-\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3}$
二次	$\sum_{k=1}^2\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1=-4\alpha_2-\frac{1}{2}$	$S=\frac{2z^{-2}(1+z)^4\left(\alpha_2z^{-2}+\left(-4\alpha_2-\frac{1}{2}\right)z^{-1}+(2+6\alpha_2)+\left(-4\alpha_2-\frac{1}{2}\right)z+\alpha_2z^2\right)}{16}$, α_2 为任意值
三次	$\sum_{k=1}^3\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1=-4\alpha_2-9\alpha_3-\frac{1}{2}$	$S=\frac{2z^{-2}(1+z)^4\left(\alpha_3z^{-3}+\alpha_2z^{-2}+\left(-4\alpha_2-9\alpha_3-\frac{1}{2}\right)z^{-1}+(2+6\alpha_2+16\alpha_3)+\left(-4\alpha_2-9\alpha_3-\frac{1}{2}\right)z+\alpha_2z^2+\alpha_3z^3\right)}{16}$, α_2, α_3 为任意值

取例题中 $j=6$ 的情形。取 $a(z)=2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6$, $S=a(z)b(z)$ 为二重五次 B 样条的生成函数 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z)$, 其中 $b(z)=\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$, i 表示扰动次数。则其再生 3 次多项式当且仅当

$$a''(1)=-\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1)=0, a(1)=2, \alpha_i=-\sum_{j=2}^i k^2\alpha_k + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}.$$

由上述公式, 表 3 表示当 $i=1,2,3$ 时, S 再生 3 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 3. $2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=1,2,3$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 3

表 3. $2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=1,2,3$ 。再生数为 3 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
一次	$\alpha_1(z^{-1}+z-2)+1$	$\alpha_1=-\frac{3}{4}$	$S=-\frac{(1+z)^6(3-10z+3z^2)}{128z^4}$
二次	$\sum_{k=1}^2\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1=-4\alpha_2-\frac{3}{4}$	$S=\frac{2z^{-3}(1+z)^6\left(\alpha_2z^{-2}+\left(-4\alpha_2-\frac{3}{4}\right)z^{-1}+\left(\frac{5}{2}+6\alpha_2\right)+\left(-4\alpha_2-\frac{3}{4}\right)z+\alpha_2z^2\right)}{128}$, α_2 为任意值

Continued

$$\text{三次} \quad \sum_{k=1}^3 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1 \quad \alpha_1 = -4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{3}{4}$$

$$S = \frac{2z^{-3}(1+z)^6 \left(\alpha_3 z^{-3} + \alpha_2 z^{-2} + \left(-4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{3}{4} \right) z^{-1} + \left(\frac{5}{2} + 6\alpha_2 + 16\alpha_3 \right) + \left(-4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \frac{3}{4} \right) z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 \right)}{128},$$

α_2, α_3 为任意值

4.1.2. $a(z) = -\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3}$

本例 $a(z)$ 生成数 $d_G = 3$ 。 $S = a(z)b(z)$ 为生成函数 $a(z) = -\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3}$ 添加扰动 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, 其中 i 表示扰动次数。 则其再生 3 次多项式当且仅当 $a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1)$, $a'(1) = 0$, $a(1) = 2$, $\alpha_i = -\sum_{j=2}^i j^2 \alpha_j + \frac{a^{(3)}(1)}{6a(1)}$ 。

由上述公式, 表 4 表示当 $i=1,2,3$ 时, S 再生 3 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 4. $-\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3} \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1 \right)$, $i = 1, 2, 3$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 3

表 4. $-\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3} \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1 \right)$, $i = 1, 2, 3$. 再生数为 3 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
一次	$\alpha_1 (z^{-1} + z - 2) + 1$	$\alpha_1 = 0$	$S = -\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2)}{16z^3}$
二次	$\sum_{k=1}^2 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = -4\alpha_2$	$S = -\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2) \left(\alpha_2 z^{-2} - 4\alpha_2 z^{-1} + (1+6\alpha_2) - 4\alpha_2 z + \alpha_2 z^2 \right)}{16z^3}$, α_2 为任意值
三次	$\sum_{k=1}^3 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = -4\alpha_2 - 9\alpha_3$	$S = -\frac{(1+z)^4(1-4z+z^2) \left(\alpha_3 z^{-3} + \alpha_2 z^{-2} + (-4\alpha_2 - 9\alpha_3) z^{-1} + (1+6\alpha_2 + 16\alpha_3) + (-4\alpha_2 - 9\alpha_3) z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 \right)}{16z^{3b}}$, α_2, α_3 为任意值

4.2. 细分多项式再生数为 5 的数值算例

$a(z) = 2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^j$, 其中 $j \geq 6$ 且 j 为偶数

本例 $a(z)$ 生成数 $d_G = j-1 \geq 5$ 。 $S = a(z)b(z)$ 为 B 样条生成函数 $a(z) = 2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^j$ 乘以扰动 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, 其中 i 表示扰动次数。 S 再生 5 次多项式当且仅当

- $i = 2$ 时,

$$a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \left(3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right).$$

2) $i \geq 3$ 时,

$$a^{(3)}(1) = -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (4k^4 - 16k^2)\alpha_k + 3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (k^4 - k^2)\alpha_k + \frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right),$$

其中 α_k 为自由参数, $k = 3, \dots, i$ 。

由上述公式, 表 5 表示当 $i = 2, 3, 4$ 时, S 再生 5 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 5. $2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^j \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1 \right)$, $i = 2, 3, 4$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 5

表 5. $2z^{-\frac{j}{2}} \left(\frac{1+z}{2} \right)^j \left(\sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1 \right)$, $i = 2, 3, 4$ 。再生数为 5 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
二次	$\sum_{k=1}^2 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = -\frac{1}{32}(6j + j^2)$ $\alpha_2 = \frac{1}{128}(2j + j^2)$	$S = \frac{2z^{-\frac{j}{2}}(1+z)^j \left(\frac{1}{128}(2j+j^2)z^{-2} - \frac{1}{32}(6j+j^2)z^{-1} + \left(1 + \frac{11j}{32} + \frac{3j^2}{64}\right) - \frac{1}{32}(6j+j^2)z + \frac{1}{128}(2j+j^2)z^2 \right)}{2^j}$
三次	$\sum_{k=1}^3 \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$	$\alpha_1 = \frac{1}{32}(480\alpha_3 - 6j - j^2)$ $\alpha_2 = \frac{1}{128}(-768\alpha_3 + 2j + j^2)$	$S = \frac{2z^{-\frac{j}{2}}(1+z)^j \left(\alpha_3 z^{-3} + \frac{1}{128}(-768\alpha_3 + 2j + j^2)z^{-2} + \frac{1}{32}(480\alpha_3 - 6j - 6j^2)z^{-1} + \left(1 - 20\alpha_3 + \frac{11j}{32} + \frac{3j^2}{64}\right) + \frac{1}{32}(480\alpha_3 - 6j - 6j^2)z + \frac{1}{128}(-768\alpha_3 + 2j + j^2)z^2 + \alpha_3 z^3 \right)}{2^j}$ <p style="text-align: center;">α_3 为任意值</p>

Continued

$$\begin{aligned}
 & 2z^{-\frac{j}{2}}(1+z)^j(\alpha_4 z^{-4} + \alpha_3 z^{-3}) \\
 & + \frac{1}{128}(-2560\alpha_4 - 768\alpha_3 + 2j + j^2)z^{-2} \\
 & + \frac{1}{32}(2048\alpha_4 + 480\alpha_3 - 6j - 6j^2)z^{-1} \\
 & + \left(1 - 20\alpha_3 - 90\alpha_4 + \frac{11}{32}j + \frac{3}{64}j^2\right) \\
 & + \frac{1}{32}(2048\alpha_4 + 480\alpha_3 - 6j - 6j^2)z \\
 & + \frac{1}{128}(-2560\alpha_4 - 768\alpha_3 + 2j + j^2)z^2 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4 \\
 S = & \frac{2^j}{\alpha_3, \alpha_4 \text{ 为任意值}}
 \end{aligned}$$

本例题中, 扰动次数为二次时, 当 $j = 2m$, 得到的生成函数为 Primal $[m, 2]$ 型拟样条。

取例题中 $j = 6$ 的情形。此时 $a(z) = 2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6$, $S = a(z)b(z)$ 为二重五次 B 样条的生成函数 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z)$, 其中 $b(z) = \sum_{k=1}^i \alpha_k (z^{-k} + z^k - 2) + 1$, i 表示扰动次数, S 再生 5 次多项式当且仅当

1) $i = 2$ 时,

$$\begin{aligned}
 a^{(3)}(1) &= -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{12} \left(3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right), \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right).
 \end{aligned}$$

2) $i \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}
 a^{(3)}(1) &= -\frac{10a^{(4)}(1) + a^{(5)}(1)}{20}, a''(1) = -\frac{1}{3}a^{(3)}(1), a'(1) = 0, a(1) = 2, \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (4k^4 - 16k^2)\alpha_k + 3a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{3} - \frac{a^{(5)}(1)}{10} \right), \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{12} \left(\sum_{k=3}^i (k^4 - k^2)\alpha_k + \frac{1}{2}a^{(3)}(1) - \frac{(a^{(3)}(1))^2}{12} - \frac{a^{(5)}(1)}{40} \right),
 \end{aligned}$$

其中 α_k 为自由参数, $k = 3, \dots, i$ 。

由上述公式, 表 6 表示当 $i = 2, 3, 4$ 时, S 再生 5 次多项式时的扰动参数取值及所形成的生成函数。

Table 6. $2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=2,3,4$. Perturbation parameter value and generating function when regeneration number is 5

表 6. $2z^{-3}\left(\frac{1+z}{2}\right)^6\left(\sum_{k=1}^i\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1\right)$, $i=2,3,4$ 。再生数为 5 时的扰动参数取值和生成函数

扰动次数	扰动形式	扰动参数取值	生成函数
二次	$\sum_{k=1}^2\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1 = -\frac{9}{4}$ $\alpha_2 = \frac{3}{8}$	$S = \frac{(1+z)^6(3-18z+38z^2-18z^3+3z^4)}{256z^5}$
三次	$\sum_{k=1}^3\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1 = 15\alpha_3 - \frac{9}{4}$ $\alpha_2 = -6\alpha_3 + \frac{3}{8}$	$S = \frac{2z^{-3}(1+z)^6\left(\alpha_3z^{-3} + \left(-6\alpha_3 + \frac{3}{8}\right)z^{-2} + \left(15\alpha_3 - \frac{9}{4}\right)z^{-1} + \left(\frac{19}{4} - 20\alpha_3\right) + \left(15\alpha_3 - \frac{9}{4}\right)z + \left(-6\alpha_3 + \frac{3}{8}\right)z^2 + \alpha_3z^3\right)}{2^6}$, α_3 为任意值
四次	$\sum_{k=1}^4\alpha_k(z^{-k}+z^k-2)+1$	$\alpha_1 = 15\alpha_3 + 64\alpha_4 - \frac{9}{4}$ $\alpha_2 = -6\alpha_3 - 20\alpha_4 + \frac{3}{8}$	$S = \frac{2z^{-3}(1+z)^6\left(\left(\frac{3}{160} - \frac{1}{20}\alpha_2 - \frac{3}{10}\alpha_3\right)z^{-4} + \alpha_3z^{-3} + \alpha_2z^{-2} + \left(-\frac{21}{20} - \frac{16}{5}\alpha_2 - \frac{21}{5}\alpha_3\right)z^{-1} + \left(\frac{19}{4} - 20\alpha_3 - 90\alpha_4\right) + \left(-\frac{21}{20} - \frac{16}{5}\alpha_2 - \frac{21}{5}\alpha_3\right)z + \alpha_2z^2 + \alpha_3z^3 + \left(\frac{3}{160} - \frac{1}{20}\alpha_2 - \frac{3}{10}\alpha_3\right)z^4\right)}{2^6}$, α_3, α_4 为任意值

5. 总结

本文通过将二重基本型拟样条 $a(z)$ 乘以扰动 $b(z)$ 的方式得到一族再生数为三次和五次的细分多项式。同时得到生成再生数为三次和五次的细分多项式时 $a(z)$ 应满足的条件以及 $b(z)$ 中参数的统一表达式。未来还需继续研究以下两个方面：一是将再生数提升至更高的情况时， $a(z)$ 需要哪些限定条件以及参数表达式的推导和证明；二是当细分多项式具有不同的再生数时，所引入参数是否有统一表达式。

参考文献

- [1] Chaikin, G. M. (1974) An Algorithm for High Speed Curve Generation. *Computer Graphics and Image Processing*, **3**, 346-349. [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(74\)90028-8](https://doi.org/10.1016/0146-664X(74)90028-8)
- [2] Riesenfeld, R.F. (1975) On Chaikin's Algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, **4**, 304-310. [https://doi.org/10.1016/0146-664X\(75\)90017-9](https://doi.org/10.1016/0146-664X(75)90017-9)
- [3] Sabin, M.A. (2004) Recent Progress in Subdivision: A Survey. In: Dodgson, N.A., Floater, M.S., Eds., *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. Springer-Verlag, Berlin, 203-230.
- [4] Doo, D. and Sabin, M. (1978) Behaviour of Recursive Division Surfaces Near Extraordinary Points. *Computer Aided Design*, **10**, 356-360. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90111-2](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90111-2)
- [5] Catmull, E. and Clark, J. (1978) Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer Aided Design*, **10**, 350-355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)

- [6] Dong, B. and Shen, Z. (2007) Pseudo-Splines, Wavelets and Framelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **22**, 78-104. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2006.04.008>
- [7] Dyn, N., Hormann, K., Sabin, M.A. and Shen, Z. (2008) Polynomial Reproduction by Symmetric Subdivision Schemes. *Journal of Approximation Theory*, **155**, 28-42. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2008.04.008>
- [8] Conti, C. and Hormann, K. (2011) Polynomial Reproduction for Univariate Subdivision Schemes of Any Arity. *Journal of Approximation Theory*, **163**, 413-437. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2010.11.002>
- [9] Luo, Z.X. and Qi, W.F. (2013) On Interpolatory Subdivision from Approximating Subdivision Scheme. *Applied Mathematics and Computation*, **220**, 339-349. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.025>
- [10] 亓万锋, 王金玲. 偏移量构造细分格式的最高求和规则[J]. 辽宁师范大学(自然科学版), 2017, 40(1): 14-19.
- [11] 毛智永, 亓万锋, 崔利宏. 高阶中心差分偏移量方法构造细分求和规则阶数问题[J]. 应用数学进展, 2018, 7(2): 231-235. <https://doi.org/10.12677/AAM.2018.72028>
- [12] 时军. 基于生成函数的细分格式构造及多项式再生性的研究[D]: [博士学位论文]. 合肥: 合肥工业大学, 2018.
- [13] Charina, M. and Conti, C. (2013) Polynomial Reproduction of Multivariate Scalar Subdivision Schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **240**, 51-61. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.06.013>