Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 519-525
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122055

Hans汉斯

基于公理模糊集理论的综合决策模型及其应用研究

陶丽丽*，万　莹，高　辉

大连海洋大学信息工程学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年1月14日；录用日期：2023年2月8日；发布日期：2023年2月17日

摘　要

多属性决策是现代管理科学领域的热点研究课题。现有方法大多存在共同的难题就是决策结果的不可解释性，从而导致决策结果有失科学性。本文在前期研究基础上，将具有独特优势的公理模糊集(AFS)理论与经典决策方法相结合，通过应用AFS模糊概念描述和聚类分析算法、数据包络分析(DEA)和TOPSIS构建一个多阶段的综合决策模型并通过处理企业供应商的选择问题来验证其科学性和实用性。此项研究既能加强公理模糊集理论的应用能力，也能为多属性决策问题的解决提供更有利的方法和工具。

关键词

综合决策，AFS聚类分析，DEA，TOPSIS

Research on Comprehensive Decision-Making Model Based on Axiomatic Fuzzy Set Theory and Its Application

Lili Tao*, Ying Wan, Hui Gao

School of Information Science & Engineering, Dalian Ocean University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 14th, 2023; accepted: Feb. 8th, 2023; published: Feb. 17th, 2023

Abstract

Multi-attribute decision-making is a hot research topic in the field of modern management science. Most of the existing methods have a common problem, that is the inexplicability of the deci-

*通讯作者。

文章引用: 陶丽丽, 万莹, 高辉. 基于公理模糊集理论的综合决策模型及其应用研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 519-525. DOI: 10.12677/aam.2023.122055

sion-making results, leading to the unscientific decision-making results. On the basis of previous research, this paper combines the axiomatic fuzzy set (AFS) theory with classical decision-making methods, builds a multi-stage comprehensive decision-making model by applying AFS clustering analysis algorithm, data envelopment analysis (DEA) and TOPSIS, and verifies its scientificity and practicability by dealing with the selection of enterprise suppliers. This research can not only strengthen the application ability of axiomatic fuzzy set theory, but also provide more favorable methods and tools for solving multi-attribute decision-making problems.

Keywords

Comprehensive Decision-Making, AFS Cluster Analysis, DEA, TOPSIS

1. 研究背景

多属性决策是现代管理科学领域的热点研究课题，其理论和方法广泛应用于经济、管理和军事等诸多领域，如供应商选择、投资决策、武器系统性能评定、经济效益综合排序等。随着经济、科学技术和社会的发展，人们遇到的实际问题越来越复杂，单凭决策者个人的知识和经验做出决策，已不能适应这种变化了。因此，需要对多属性决策方法进行深入的研究。

1978 年，著名的运筹学家 A. Charnes 和 W. W. Cooper 等人开始创建数据包络分析法，这是运筹学、管理科学和数理经济学交叉研究的一个新领域。它的最大优点就是方法本身比较简单，易于理解，并且在实际应用中其算法也比较容易实现。但是，DEA 对异常值相当敏感，只有宏观意义，这样往往难以给出具体的政策建议。1981 年，C. L. Hwang 提出了逼近于理想解的排序方法(TOPSIS)，该方法首先确定一个理想点，以与理想点最近的方案为最佳方案，从而减少因评价者的不同或其偏好的变化而引起的评价结果的不准确性，但它无法反映出各方案与正负理想解的接近程度。为了克服 TOPSIS 方法的这一不足，S. Opricovic 于 1998 年提出了 VIKOR 方法，该方法也是一种基于理想点法的决策方法，同时采用了 Lp-metric 发展而来的聚合函数，其最大的特色就是最大化群体效益和最小化反对意见的个别遗憾，所以其妥协解可被决策者接受。

随着各类方法的不断涌现，它们的应用研究也越来越广泛：Shih 等人[1]扩展 TOPSIS 方法用来进行组决策；王晶晶等人[2]运用层次分析法对危化品运输企业风险进行评估预警；刘庆等人[3]应用单值中智 VIKOR 法建立了供应商优选模型；范钰鑫[4]通过 DEA 模型对我国 52 家新能源汽车上市企业的股权融资效率进行测算和分析；Pessanha Jose 等人[5]应用 DEA 模型研究巴西输电公司运营支出基准。

综上所述，任何一种决策方法在应用过程中都会有其独特的优势同时也存在着局限性，只使用某一种方法所得到的决策结果一定是不全面的，决策依据也是不充分的，于是增强可解释性在决策领域受到了广泛关注，具有可解释性的模型输出有利于决策者判断结果是否可信任。人们希望设计出一种多属性决策模型，从多角度获得可信任的、易于解释的决策结果。对于目前几乎所有的多属性决策方法给出的决策结果只是数值型的优先值，而没有对每个决策对象作出具体的性能与特征描述来说明其优势与缺陷。因此需要进一步探索多属性决策模型及其可解释性，扩展模型的应用范围。

综上所述，无论应用哪一种决策方法都会被其缺陷所局限，得不到最科学的决策结果。因此，为了

更好地应用这些经典决策方法，我们应用公理模糊集的相关理论和方法与经典的决策方法相结合构建综合的多阶段决策模型，这样既填补了经典方法本身固有的缺陷又发挥了 AFS 理论的独特优势，并且给出决策结果一个明确的语义解释，使得决策依据更加充分，从而更好地解决多属性决策问题。

2. 知识准备

2.1. DEA

假设有 n 个决策单元(DMU)被评估。每个 DMU 有 m 个输入和 s 个输出，然后，为了评估 DMU 0 的效率，经典的 CCR 模型[6]解决以下优化问题：

$$\max h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{jo}} \tag{1}$$

满足：$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ri}}{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ji}} \le 1, i = 1,\cdots,n$， $\begin{array}{l} u_r > 0, r = 1,\cdots,s, \\ v_j > 0, j = 1,\cdots,m. \end{array}$

优化问题(1)是一个分式规划。Charnes 等人提出利用 Charner-Cooper 变换，将以上分式规划转化为一个等价的线性规划。具体如下：

$$t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{j0}}, \omega = tv, \mu = tu$$

那么原始的分式规划可以转化为：$\max \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0}$

满足：

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \omega_j x_{ji} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ri} \ge 0, i = 1,\cdots,n, \\ &\sum_{j=1}^{m} \omega_j x_{j0} = 1, \\ &\mu_r \ge 0, r = 1,\cdots,s, \\ &\omega_j \ge 0, j = 1,\cdots,m. \end{aligned}$$

2.2. AFS 相关理论

2.2.1. AFS 模糊概念描述[7] [8]

1) 设 $\varepsilon \ge 0$，寻找集合 $B_{x_i}^{\varepsilon}$ 定义如下：

$$B_{x_i}^{\varepsilon} = \left\{ m \in EM \middle| \mu_m(x_i) \ge \mu_\theta(x_i) - \varepsilon \right\},$$

$B_{x_i}^{\varepsilon}$ 是 EM 中简单概念的集合，那么 x_i 属于他们的程度大于或等于 $\mu_\theta(x_i) - \varepsilon$；

2) 寻找集合 $A_{x_i}^{\varepsilon}$ 如下：

$$A_{x_i}^{\varepsilon} = \left\{ \prod_{m \in A} m \middle| \mu_{\prod_{m\in A} m}(x_i) \ge \mu_\theta(x_i) - \varepsilon, A \subseteq B_{x_i}^{\varepsilon} \right\};$$

3) 从 $\zeta_{x_i} \in A_{x_i}^{\varepsilon}$ 中选择 x_i 的最好描述如下：

$$\zeta_{x_i} = \arg\min_{\zeta \in A_{x_i}^{\varepsilon}} \left\{ \sum_{x \in X, x \neq x_i} \mu_{\zeta}(x) \right\},$$

所以 x 可以被描述成 ζ_{x_i} 。

2.2.2. AFS 聚类分析[9]

1) 应用每一个 $x_i \in X$ 的模糊描述 ξ_{x_i} 在 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上建立模糊关系矩阵 $F = (f_{ij})_{n\times n}$ ，在这里 $f_{ij} = \min\left\{\mu_{\zeta_{x_i}\wedge\zeta_{x_j}}(x_i), \mu_{\zeta_{x_i}\wedge\zeta_{x_j}}(x_j)\right\}$ 。

2) 根据阈值 $\alpha \in [0,1]$ 找到恰当的类。设 $Q = F^r = (q_{ij})_{n\times n}$ ，布尔矩阵 $Q_\alpha = F^r = (q_{ij}^{\alpha})_{n\times n}$ ，这里 $q_{ij}^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow q_{ij} \geq \alpha, \alpha \in [0,1]$ 。对于， $x_i, x_j \in X, \alpha \in [0,1]$ 当且仅当 $q_{ij}^{\alpha} = 1, x_i, x_j$ 在阈值 α 下是同一类的。对于某些 $x_i \in X$ ，如果 $q_{ii}^{\alpha} = 0$ 那么阈值 α 不能确定 x_i 属于哪一类。对于每一个 $x_i \in X$ ，如果 $q_{ij}^{\alpha} = 1$， $q_{ii}^{\alpha} = 0$ ，对于任意的 j， $i \neq j$ ，即 x_i 自己为一类，那么在阈值 α 下的这个聚类结果被认为是无效的。在实际中，阈值 α 的值只是在 $\{q_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ 中考虑。

3) 在阈值 $\alpha \in \{q_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ 下的所有结果中确定最佳的聚类结果和每一类 C_k 的描述 ζ_{C_k} 。对于每一类 $C_k \subseteq X$ ，这里 C_k 是在阈值 α 下的一类， $\zeta_{C_k} = \vee_{x\in C_k} \zeta_x$ 是类 C_k 的模糊描述。模糊概念 $\zeta_{bou} = \vee_{1\leq k_1, k_2 \leq l, k_1 \neq k_2} \left(\zeta_{C_{k_1}} \wedge \zeta_{C_{k_2}}\right) \in EM$ 描述了在可行的聚类 $X = \{C_1, C_2, \cdots, C_l\}$ 中的界限。由于 $\mu_{\zeta_{bou}}(x)$ 给出了 X 中每个样本属于边界 ζ_{bou} 的隶属度，所以它能用来评价类之间的边界的清晰度。于是新的模糊聚类有效性指标 I_α 定义如下：

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{\sum_{x \in \cup_{1\leq k \leq l} C_k} \mu_{\zeta_{bou}}(x)}{\sum_{x \in \cup_{1\leq k \leq l} C_k} \mu_{\zeta_{Total}}(x)} + \frac{|C|}{|X|}$$

这里 $\zeta_{Total} = \vee_{1\leq k \leq l} \zeta_{C_k}$ 对于 $l \geq 2$ 。 $|C|$ 是类的个数， $|X|$ 是样本的个数。显然 I_α 越小，在阈值 α 下的聚类结果就越清晰也越好。于是最好的聚类结果可以通过 I_α 来选择。

3. 模型构建

1) 应用 DEA 方法做初评价

DEA 的基础是相对效率，它将生产过程或者系统作为一个单元，每一个单元为一个决策单元，通过一定数量的投入和产出的活动做出有效性评价。DEA 的最大优点就是方法本身比较简单，易于理解，并且在实际应用中其算法也比较容易实现。因此，在该模型的第一阶段我们应用 DEA 方法做一个初始的评价，快速选出其中优先值为 1 的有效单元，这样便可以大量删减无效数据从而大幅度降低下一阶段的计算时间。

但是，DEA 对异常值相当敏感，只有宏观意义，其最终计算结果只能给出某几个评价对象是有效的，却得不到这些有效单元的详细特点和精确排序，这样往往难以给出具体的政策建议，所以，接下来我们还需对此结果做进一步的评价。

2) 应用 AFS 聚类算法对有效单元进行聚类分析

对于目前几乎所有的决策模型，其结果只是给出数值型的优先值，而没有对每个决策对象作出具体的优劣描述与分析，这就是决策结果的不可解释性问题。针对这一问题，我们在第二阶段应用 AFS 聚类分析算法将已选出的有效单元分成不同的类别，并且给出每一类中的决策对象一个明确的语义描述来说明每一类的特点以及各类间的相似和不同之处，并给出每个决策对象一个明确的属性特征描述，那么决策者就可以在自己偏好的属性类中做进一步的决策。

3) 应用 TOPSIS 在每一类中分别计算优先值并排序

TOPSIS 方法的基本观念在于首先界定理想解与负理想解，而后根据各备选对象的评估值与理想对象的接近程度来排列评价对象之间的优先顺序，该方法既能考虑群效用的最大化与个体遗憾的最小化，还能充分考虑决策者的主观偏好，从而使决策更具合理性。综上所述，为了得到各个有效单元的精确排序，在该模型的第三阶段，我们应用 TOPSIS 方法对每一类中的决策对象分别计算其优先值并排序，这样决策者就可以根据聚类分析结果的每一类的语义描述在自己偏好的属性类中做出最佳的决策，使得决策依据更加充分，决策结果更加合理。

4. 实验分析

在本文中，我们应用供应商选择问题来验证所提出模型的实用性。某工厂需要为其重要部件选择最合适的供应商[10]，现共有 10 个候选供应商，包含 7 个评价指标(属性)，分别为增益型属性 m_1 (产品质量)，m_2 (研发能力)，m_3 (生产能力)，m_4 (售后服务)，m_5 (财务状况)和损失型属性 m_6 (产品价格)，m_7 (递送延时率)，每个指标的具体数据以及权重值如表 1 所示。

Table 1. All evaluation index data of 10 candidate suppliers
表 1. 10 个候选供应商的全部评价指标数据

属性	m_1 (%)	m_2 (%)	m_3 (%)	m_4 (%)	m_5	m_6	m_7 (%)
权重	(0.2)	(0.1)	(0.2)	(0.1)	(0.1)	(0.2)	(0.1)
s_1	0.81	0.85	0.97	0.82	230	355	0.83
s_2	0.75	0.86	0.89	0.91	130	289	0.92
s_3	0.73	0.72	0.80	0.74	160	502	0.75
s_4	0.84	0.80	0.86	0.92	180	451	0.86
s_5	0.74	0.91	0.87	0.93	150	295	0.90
s_6	0.95	0.81	0.94	0.79	170	307	0.79
s_7	0.89	0.86	0.99	0.81	240	492	0.89
s_8	0.99	0.82	0.85	0.83	190	338	0.80
s_9	0.68	0.70	0.83	0.75	120	380	0.83
s_{10}	0.71	0.75	0.80	0.71	140	290	0.85

Table 2. Supplier data set with efficiency value of 1
表 2. 效率值为 1 的供应商数据集

属性	m_1 (%)	m_2 (%)	m_3 (%)	m_4 (%)	m_5	m_6	m_7 (%)
权重	(0.2)	(0.1)	(0.2)	(0.1)	(0.1)	(0.2)	(0.1)
s_1	0.81	0.85	0.97	0.82	230	355	0.83
s_2	0.75	0.86	0.89	0.91	130	289	0.92
s_5	0.74	0.91	0.87	0.93	150	295	0.90
s_6	0.95	0.81	0.94	0.79	170	307	0.79
s_7	0.89	0.86	0.99	0.81	240	492	0.89
s_8	0.99	0.82	0.85	0.83	190	338	0.80

首先，我们应用 DEA 方法计算以上 8 个候选供应商的效率值如下：

s_1：1.0000；s_2：1.0000；s_3：0.9633；s_4：0.9242；s_5：1.0000；s_6：1.0000；s_7：1.0000；s_8：1.0000；s_9：0.8872；s_{10}：0.9033。

然后，将效率值为 1 的供应商 s_1，s_2，s_5，s_6，s_7，s_8 (具体数据如表 2 所示)应用 AFS 聚类分析算法进行聚类分析并给出每一类的语义描述，结果如下：

第一类：s_1，s_7，语义描述为 $m_3\, m_5\, m_6$，此类供应商的特点为生产能力强、财务状况好并且产品价格高；

第二类：s_2，语义描述为 $m_5'\, m_6'\, m_7$，此类供应商的特点为财务状况不好、产品价格不高并且递送延时率高；

第三类：s_5，语义描述为 $m_1'\, m_2\, m_4$，此类供应商的特点为产品质量不好、研发能力强并且售后服务好；

第四类：s_6，语义描述为 $m_2'\, m_4'\, m_7'$，此类供应商的特点为研发能力不强、售后服务不好并且递送延时率不高；

第五类：s_8，语义描述为 $m_1\, m_3'$，此类供应商的特点为产品质量好并且生产能力不强；

最后，应用 TOPSIS 将每一类中的候选供应商分别进行排序，结果如下：

第一类：s_1，s_7；第二类：s_2；第三类：s_5；第四类：s_6；第五类：s_8。

在以往的多属性决策研究中，多数方法只能给出数值型的优先值，而没有对每个决策对象作出具体的性能与特征描述来说明其优势与缺陷，这样的决策结果一定是不够科学的，决策依据也是不充分的；而我们在本文中构建的三阶段综合决策模型，首先应用 DEA 方法快速选出优先值为 1 的有效单元，这样便可以大量删减无效数据从而大幅度降低下一阶段的计算时间，然后应用 AFS 聚类分析算法将已选出的有效单元分成不同的类别，并且给出每一类中的候选样本一个明确的语义描述来说明每一类的特点以及各类间的相似和不同之处，最后应用 TOPSIS 方法将每一类中的候选单元按优先值进行排序，那么决策者就可以在自己偏好的属性类中做出最优选择，具体如下：

如果想要选择一个生产能力强并且财务状况好的供应商，那么 s_1 是最佳选择；

如果想要选择一个研发能力强并且售后服务好的供应商，那么 s_5 是最佳选择；

如果特别注重产品质量的话，那么 s_8 是最佳选择；

如果特别注重产品售后服务的话，那么 s_5 是最佳选择；

如果特别注重递送延时率的话，那么 s_6 是最佳选择。

以上分析表明，我们在本文中构建的综合决策模型既克服了经典决策方法本身固有的缺陷又很好地发挥了 AFS 理论的独特优势，给出各类候选供应商一个明确的语义描述，来说明其在各个评价属性指标上的优势和不足之处，那么决策者就可以在自己偏好的属性指标类中做出最优选择，从而使得决策依据更加充分。

5. 结语

本文应用 AFS 理论的相关方法与经典决策方法相结合构建多阶段的综合决策模型，首先应用 DEA 方法做一个初始的评价，快速选出其中优先值为 1 的有效单元；然后，应用 AFS 聚类分析算法将已选出的有效单元分成不同的类别，并且给出每一类中的决策对象一个明确的语义描述来说明每一类的特点以及各类间的相似和不同之处，并给出每个决策对象一个明确的属性特征描述；最后，我们应用 TOPSIS 方法对每一类中的决策对象分别计算其优先值并排序，这样决策者便可以根据聚类分析结果的每一类的语义描述在自己偏好的属性类中做出最佳的决策，从而使得决策依据更加充分，决策结果更加合理。为

了验证模型的实用性，我们将其用来处理企业供应商选择问题，得到了比较理想的决策结果。在以后的研究中，我们也可以将此模型应用于其他的多属性决策问题中。

基金项目

本文的研究工作得到了辽宁省教育厅高等学校基本科研项目 JL202014 和 JL202016 的资助。

参考文献

[1] Shih, H.S., Shyur, H.J. and Lee, E.S. (2017) An Extension of TOPSIS for Group Decision Making. *Mathematical and Computer Modelling*, **45**, 801-813. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.03.023

[2] 王晶晶, 孙宁, 张蕾, 王安晨, 李爱. 基于 AHP 的危化品运输企业风险预警研究[J]. 物流工程与管理, 2019(6): 120-121.

[3] 刘庆, 化小会. 基于单值中智 VIKOR 法的供应商优选模型[J]. 科学技术与工程, 2020(18): 7129-7136.

[4] 范钰鑫. 基于 DEA 的我国新能源汽车上市企业股权融资效率测评[J]. 商展经济, 2021(1): 43-45.

[5] Pessanha, J.F.M. and Melo, A.C.G. (2021) Benchmarking the Operational Expenditures of Brazilian Transmission Utilities by Using DEA Models. *Electric Power Systems Research*, **190**, Article ID: 106675. https://doi.org/10.1016/j.epsr.2020.106675

[6] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978) Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444. https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8

[7] Liu, X.D., Wang, W. and Chai, T.Y. (2005) The Fuzzy Clustering Analysis Based on AFS Theory. *IEEE Transactions on Systems*, *Man and Cybernetics*, *Part B*, **35**, 1013-1027. https://doi.org/10.1109/TSMCB.2005.847747

[8] Liu, X.D., Chai, T.Y. and Wang, W. (2007) Approaches to the Representations and Logic Operations for Fuzzy Concepts in the Framework of Axiomatic Fuzzy Set Theory I. *Information Sciences*, **177**, 1007-1026. https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.07.011

[9] Liu, X.D. and Pedrycz, W. (2008) Axiomatic Fuzzy Set Theory and Its Applications. Springer-Verlag, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00402-5

[10] Tao, L.L., Chen, Y., Liu, X.D. and Wang, X. (2012) An Integrated Multiple Criteria Decision Making Model Applying Axiomatic Fuzzy Set Theory. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 5046-5058. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.042