Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 764-770
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122078

Hans汉斯

$\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\geq\ell}\}$-禁止图的边极值问题研究

傅凌婷，王　健[*]，武彩萍

太原理工大学数学学院，山西　晋中

收稿日期：2023年1月26日；录用日期：2023年2月19日；发布日期：2023年2月28日

摘　要

Turán问题是极值图论中的核心研究课题之一。令 $\mathcal{F}$ 表示由一些图组成的集族，如果对任意的 $F\in\mathcal{F}$，图G都不包含F作为子图，则称图G是 $\mathcal{F}$ -禁止图。将Turán数 $ex(n,\mathcal{F})$ 定义为n个顶点的 $\mathcal{F}$ -禁止图中的最大边数。令 C_{2t+1} 表示长度为 $2t+1$ 的圈，P_ℓ 表示一条长度为 ℓ 的路，$\mathcal{C}_{\geq\ell}$ 表示由长度大于等于 ℓ 的所有的圈构成的集族。本文主要研究了 $\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\geq\ell}\}$ -禁止图以及 $\{C_{2t+1},\mathcal{P}_\ell\}$ -禁止图的Turán数，当 $\ell>4t-2$ 时，证明了 $ex(n,\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\geq\ell}\})=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)$。当 ℓ 为奇数且 $\ell\geq 4t-2$ 时，证明了 $ex(n,\{C_{2t+1},\mathcal{P}_\ell\})=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)$。

关键词

图兰数，$\mathcal{F}$ -禁止图，路和圈

Research on Extremal Problems of Edges in $\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\geq\ell}\}$-Free Graphs

Lingting Fu, Jian Wang[*], Caiping Wu

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Jan. 26th, 2023; accepted: Feb. 19th, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Turán problem is one of the central topics in extremal graph theory. Let $\mathcal{F}$ be a family of graphs.

[*]通讯作者。

文章引用: 傅凌婷, 王健, 武彩萍. $\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\geq\ell}\}$ -禁止图的边极值问题研究[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 764-770.
DOI: 10.12677/aam.2023.122078

If for any $F \in \mathcal{F}$, G does not contain F as a subgraph, then we say G is $\mathcal{F}$-free. The Turán number $ex(n,\mathcal{F})$ is defined as the maximum number of edges in an $\mathcal{F}$-free graph on n vertices. Let C_{2t+1} denote a cycle of length $2t+1$, let $\mathcal{C}_{\geq \ell}$ denote a family of cycles with lengths from ℓ to n and let P_ℓ denote a path of length ℓ. In the present paper, we study the Turán number for $\{C_{2t+1}, \mathcal{C}_{\geq \ell}\}$-free graphs and $\{C_{2t+1}, \mathcal{P}_\ell\}$-free graphs. For $\ell > 4t-2$, we determine that $ex(n,\{C_{2t+1}, \mathcal{C}_{\geq \ell}\}) = \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right)$. For ℓ is odd and $\ell \geq 4t-2$, we prove that $ex(n,\{C_{2t+1}, \mathcal{P}_\ell\}) = \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right)$.

Keywords

Turán Number, $\mathcal{F}$-Free Graph, Paths and Cycles

1. 引言

设 $G(V,E)$ 是一个简单无向图，其中 V 和 E 分别表示图 G 的顶点集和边集。用 $e(G)$ 表示图 G 的边集大小。令 H 是一个图，若 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称 H 是 G 的一个子图。令 $\mathcal{F}$ 表示由一些图组成的集族，如果对任意的 $F\in\mathcal{F}$，图 G 都不包含 F 作为子图，那么称图 G 是 $\mathcal{F}$-禁止图。Turán 数 $ex(n,\mathcal{F})$ 定义为 n 个顶点的 $\mathcal{F}$-禁止图中的最大边数。如果集族 $\mathcal{F}$ 仅包含一个简单图 F，则我们可以将 $ex(n,\mathcal{F})$ 简写为 $ex(n,F)$。关于 Turán 数现在已经有大量的研究，详见相关文献[1]-[12]。

设 G_1 和 G_2 是图 G 的两个不相交的子图，$G_1\cup G_2$ 表示 G_1 和 G_2 的并图，其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$，边集为 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$。$G_1\vee G_2$ 表示 G_1 和 G_2 的联图，其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$，边集为 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{xy \mid x\in V(G_1), y\in V(G_2)\}$。$K_n$ 表示 n 个顶点的完全图，E_n 表示 n 个顶点的空图。令 $T_r(n)$ 表示 n 个顶点的 Turán 图，即含有 n 个顶点的完全 r 部图且每个部集的大小为 $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ 或 $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$。

1907 年，Mantel [7]证明了以下定理：

定理 1.1. 若 G 是 n 个顶点的 K_3-禁止图，则

$$ex(n,K_3)=\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

同时，二部 Turán 图是唯一的可以达到边极值的图。

1941 年，Turán [9]证明了 Turán 图是唯一一个达到最大边数的 K_{r+1} 禁止图。

定理 1.2.对于 $n\geq r+1$，$r\geq 2$，

$$ex(n,K_{r+1})=e(T_r(n)).$$

Erdős 和 Gallai [3]在 1959 年证明了 P_ℓ 的图兰数上界。

定理 1.3. 若 $n \ge \ell+1$，则

$$ex\left(n,P_\ell\right)=\frac{\left(\ell-2\right)n}{2}.$$

当 $\ell-1$ 整除 n 时，$\dfrac{n}{\ell-1}$ 个点不交的 $K_{\ell-1}$ 的并是取到等号的一个图。

Faudree 和 Schelp [13]以及 Kopylov [14]确定了对于任意的 n 的值，$ex\left(n,P_\ell\right)$ 的精确值，并且刻画了对应的极图。

定理 1.4. 令 $n=q\left(\ell-1\right)+r$，$0\le r\le \ell-2$，且 $\ell\ge 2$，则

$$ex\left(n,P_\ell\right)=q\binom{\ell-1}{2}+\binom{r}{2}.$$

相应的极图为 $qK_{\ell-1}\cup K_r$，即 q 个点不交的 $K_{\ell-1}$ 和一个 K_r 的并。当 ℓ 是偶数且同时 r 是 $\dfrac{\ell}{2}$ 或者 $\dfrac{\ell}{2}-1$，极图为 $t\left(0\le t<q\right)$ 个点不交的 $K_{\ell-1}$ 和一个 H 的并，其中 H 为 $K_{\frac{\ell}{2}-1}\vee K_{n-t(\ell-1)-\frac{\ell}{2}+1}$。

Erdős 和 Gallai [3]在 1959 年证明了 $\mathcal{C}_{\ge\ell}$ 的图兰数上界。

定理 1.5. 对于 $n\ge\ell$，

$$ex\left(n,\mathcal{C}_{\ge\ell}\right)\le\frac{\left(\ell-1\right)\left(n-1\right)}{2}.$$

当 $\ell-2$ 整除 $n-1$ 时，$\dfrac{n-1}{\ell-2}$ 个 $K_{\ell-1}$ 共用一个点的图是取到等号的一个图。

Woodall [15]在 1976 年以及 Kopylov [14]在 1977 年独立地证明了 $ex\left(n,\mathcal{C}_{\ge\ell}\right)$ 的精确值。

定理 1.6. 令 $n=q\left(\ell-2\right)+r$，$1\le r\le\ell-2$，且 $\ell\ge 3$，$q\ge 1$，则

$$ex\left(n,\mathcal{C}_{\ge\ell}\right)=q\binom{\ell-1}{2}+\binom{r}{2}.$$

2015 年，Füredi 和 Gunderson [16]研究了奇圈的图兰数，并且给出了以下定理：

定理 1.7. 对 $n\ge 1$，$2k+1\ge 5$，

$$ex\left(n,C_{2k+1}\right)=\begin{cases}\dbinom{n}{2} & n\le 2k,\\ g\left(n,k\right) & 2k+1\le n\le 4k-1,\\ \left\lfloor\dfrac{n^2}{4}\right\rfloor & n\ge 4k-2.\end{cases}$$

其中，当 $n=\left(s-1\right)\left(2k-1\right)+r$，且 $s\ge 1$，$2\le r\le 2k$，s 和 r 都是整数时，

$$g\left(n,k\right)=\left(s-1\right)\binom{2k}{2}+\binom{r}{2}.$$

在本文中，我们研究了 n 个点的 $\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}$-禁止图，以及当 ℓ 为奇数时 $\left\{C_{2t+1},P_\ell\right\}$-禁止图的最大边数。

定理 1.8. 对于 $n\ge\ell>4t-2$，则

$$ex\left(n,\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}\right)=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).$$

注意到当$n\le \ell$时，根据定理 1.7 和 1.8 可以推出$ex\left(n,\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}\right)=ex\left(n,C_{2t+1}\right)$。显然，$E_{\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}\vee E_{n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}$是一个$\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}$-禁止图，定理 1.8 证明了$E_{\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}\vee E_{n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}$是一个边数最多的$\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}$-禁止图。

定理 1.9. 对于$n\ge\ell\ge 4t-2$，则

$$ex\left(n,\left\{C_{2t+1},P_{\ell}\right\}\right)=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).$$

注意到当$n\le \ell$时，根据定理 1.7 和 1.9 可以推出$ex\left(n,\left\{C_{2t+1},P_{\ell}\right\}\right)=ex\left(n,C_{2t+1}\right)$。显然，$E_{\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}\vee E_{n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}$是一个$\left\{C_{2t+1},P_{\ell}\right\}$-禁止图，定理 1.9 证明了$E_{\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}\vee E_{n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor}$是一个边数最多的$\left\{C_{2t+1},P_{\ell}\right\}$-禁止图。

下面让我们回顾证明中需要用到的符号和引理。对于任意的$X\subseteq V(G)$，用$G[X]$表示由顶点集合X和边集合

$$E(X)=\left\{uv\in E(G):u,v\in X\right\}$$

构成的子图。令$G-X=G\left[V(G)\setminus X\right]$，用

$$N_G(X)=\left\{v\in V(G):\exists u\in X,uv\in E(G)\right\}$$

表示G中与X中顶点相邻的所有顶点的集合。我们将$N_G(\{x\})$简写为$N_G(x)$。图G顶点x的度$\deg_G(x)$表示$N_G(x)$的大小。在不会引起混淆的情况下，我们通常将省略下标。我们用$\delta(G)$表示图G中顶点度的最小值。图G的周长$c(G)$定义为G中最长圈的长度。

Dirac [17]在 1952 年证明了下面的引理。

引理 1.1. 若G是一个n个点的二连通图，则

$$c(G)\ge\min\left\{2\delta(G),n\right\}.$$

本文结构安排如下：在第二节中，我们证明了定理 1.8。在第三节中，我们证明了定理 1.9。

2. 定理 1.8 的证明

本节中，我们对$\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}$-禁止图$(\ell>4t-2)$的最大边数问题进行研究。

定理 1.8 的证明令G为一个n个顶点的$\left\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge\ell}\right\}$-禁止图。

情况 1：$\ell=2k+1$。

我们对n进行归纳。当$n=2k$时，由于$2k\ge 4t-2$，根据定理 1.7 可得

$$e(G)\le ex\left(2k,C_{2t+1}\right)=k^2.$$

现假设定理 1.8 在$2k,2k+1,\cdots,n-1\ge\ell-1$时结论都成立，下面证明结论对$n$成立。

若G不是连通的，不妨设G_1是G的含有n_1个顶点的连通分支，则由归纳假设可知

$$\begin{aligned}e(G)&=e(G_1)+e\left(G-V(G_1)\right)\\&\le\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n_1-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-n_1-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)\\&\le\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).\end{aligned}$$

若 G 不是二连通的，不妨设 G_1 是 G 的含有 n_1 个顶点的二连通分支，同样由归纳假设可知

$$\begin{aligned}e(G)&=e(G_1)+e(G-V(G_1))\\&\le\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n_1-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-n_1+1-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right)\\&\le\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).\end{aligned}$$

若 G 是二连通的，当 $n\ge 2k+1$ 时，若存在一个点 v，使得 $\deg(v)\le k$，则

$$e(G)=e(G-v)+\deg(v)\le k(n-1-k)+k=k(n-k)=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).$$

若 $\delta(G)\ge k+1$，根据引理 1.1 可知 $c(G)\ge\min\{2\delta(G),n\}\ge 2k+1$，即图 G 一定包含一个长度大于等于 $2k+1$ 的圈，矛盾。

情况 2：$\ell=2k$。

我们对 n 进行归纳。当 $n=2k-1$ 时，由于 $2k-1\ge 4t-2$，根据定理 1.7 可得

$$e(G)\le ex(2k-1,C_{2t+1})=k(k-1).$$

现假设定理 1.8 在 $2k-1,2k,\cdots,n-1\ge\ell-1$ 时结论都成立，下面证明结论对 n 成立。

若 G 不连通或一连通，则类似情况 1.中的证明，仍可得

$$e(G)=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).$$

若 G 是二连通的，当 $n\ge 2k$ 时，若存在一个点 v，使得 $\deg(v)\le k-1$，则

$$\begin{aligned}e(G)&=e(G-v)+\deg(v)\\&\le(k-1)(n-1-k+1)+k-1\\&=(k-1)(n-k+1)\\&=\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{\ell-1}{2}\right\rfloor\right).\end{aligned}$$

若 $\delta(G)\ge k$，根据引理 1.1 可知 $c(G)\ge\min\{2\delta(G),n\}\ge 2k$，即图 G 一定包含一个长度大于等于 $2k$ 的圈，矛盾。

3. 定理 1.9 的证明

类似于定理 1.8 的证明，我们利用数学归纳法来对 ℓ 为奇数时的 $\{C_{2t+1},P_\ell\}$-禁止图 $(\ell\ge 4t-2)$ 的边数的上界进行估计。

定理 1.9 的证明 令 G 为一个 n 个顶点的 $\{C_{2t+1},P_\ell\}$-禁止图。当 ℓ 为奇数，令 $\ell=2k+1$。

我们对 n 进行归纳。当 $n=2k+1$ 时，由于 $2k+1\ge 4t-2$，根据定理 1.7 可得

$$e(G)\le ex(2k,C_{2t+1})=k^2.$$

现假设定理 1.9 在 $2k+1,2k+2,\cdots,n-1\ge\ell-1$ 时结论都成立，下面证明结论对 n 成立。

若 G 不是连通的，不妨设 G_1 是 G 的含有 n_1 个顶点的连通分支，则由归纳假设可知

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G_1)+e(G-V(G_1)) \\ &\le \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n_1-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right)+\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n-n_1-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right) \\ &\le \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right). \end{aligned}$$

若 G 不是二连通的，不妨设 G_1 是 G 的含有 n_1 个顶点的二连通分支，同样由归纳假设可知

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G_1)+e(G-V(G_1)) \\ &\le \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n_1-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right)+\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n-n_1+1-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right) \\ &\le \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right). \end{aligned}$$

若 G 是二连通的，当 $n \ge 2k+2$ 时，若存在一个点 v，使得 $\deg(v) \le k$，则

$$e(G)=e(G-v)+\deg(v) \le k(n-1-k)+k=k(n-k)=\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left(n-\left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor\right).$$

若 $\delta(G) \ge k+1$，根据引理 1.1 可知 $c(G) \ge \min\{2\delta(G),n\} \ge 2k+2$，则图 G 一定包含一条长度为 $c(G)-1 \ge 2k+1$ 的路，矛盾。

4. 结论

本文主要利用数学归纳法研究具有 n 个顶点的 $\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge \ell}\}$-禁止图，文中给出了 n 个顶点的 $\{C_{2t+1},\mathcal{C}_{\ge \ell}\}$-禁止图的边数的上界。此外，文中还对任意 n 个顶点的 $\{C_{2t+1},P_\ell\}$-禁止图，当 ℓ 为奇数时，给出了 $\{C_{2t+1},P_\ell\}$-禁止图的边数的一个上界。

参考文献

[1] Alon, N., Krivelevich, M. and Sudakov, B. (2003) Turán Numbers of Bipartite Graphs and Related Ramsey-Type Questions. *Combinatorics, Probability and Computing*, **12**, 477-494. https://doi.org/10.1017/S0963548303005741

[2] Alon, N. and Shikhelman, C. (2016) Many T Copies in H-Free Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **121**, 146-172. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.03.004

[3] Erdős, P. and Gallai, T. (1959) On Maximal Paths and Circuits of Graphs. *Acta Mathematica Hungarica*, **10**, 337-356. https://doi.org/10.1007/BF02024498

[4] Füredi, Z. (1991) On a Turán type problem of Erdős. *Combinatorica*, **11**, 75-79. https://doi.org/10.1007/BF01375476

[5] Keevash, P. (2011) Hypergraph Turan Problems. *Surveys in Combinatorics*, **392**, 83-140. https://doi.org/10.1017/CBO9781139004114.004

[6] Kővári, P., Sós, V. and Turán, P. (1954) On a Problem of Zarankiewicz. In: *Colloquium Mathematicum*, Vol. 3, Polska Akademia Nauk, Warszawa, 50-57.

[7] Mantel, W. (1907) Promblem 28. *Wiskundige Opgaven*, **10**, 60-61.

[8] Sidorenko, A. (1995) What We Know and What We Do Not Know about Turán Numbers. *Graphs and Combinatorics*, **11**, 179-199. https://doi.org/10.1007/BF01929486

[9] Turán, P. (1941) On an Extremal Problem in Graph Theory. *Mathematica Fiz. Lapok*, **48**, 436-452.

[10] Yuan, L.T. (2018) Extremal Graphs for the k-Flower. *Journal of Graph Theory*, **89**, 26-39. https://doi.org/10.1002/jgt.22237

[11] Yuan, L.T. (2021) Extremal Graphs for Odd Wheels. *Journal of Graph Theory*, **98**, 691-707.

https://doi.org/10.1002/jgt.22727

[12] Yuan, L.T. (2022) Extremal Graphs for Edge Blow-Up of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **152**, 379-398. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2021.10.006

[13] Faudree, R.J. and Schelp, R.H. (1975) Path Ramsey Numbers in Multicolorings. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **19**, 150-160. https://doi.org/10.1016/0095-8956(75)90080-5

[14] Kopylov, G.N. (1977) Maximal Paths and Cycles in a Graph. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **234**, 19-21.

[15] Woodall, D.R. (1976) Maximal Circuits of Graphs I. *Acta Mathematica Hungarica*, **28**, 77-80. https://doi.org/10.1007/BF01902497

[16] Füredi, Z. and Gunderson D.S. (2015) Extremal Numbers for Odd Cycles. *Combinatorics*, *Probability and Computing*, **24**, 641-645. https://doi.org/10.1017/S0963548314000601

[17] Dirac, G.A. (1952) Some Theorems on Abstract Graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s3-2**, 69-81. https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69