

基于超拉普拉斯先验上的交叠组稀疏去除脉冲噪声方法

白萍

河北工业大学, 理学院, 天津

收稿日期: 2023年2月8日; 录用日期: 2023年3月4日; 发布日期: 2023年3月13日

摘要

由于图像复原具有不适定性, 寻找一个有意义的图像先验仍然是图像处理上的重要挑战。在本篇论文中, 提出了一个基于超拉普拉斯先验的交叠组稀疏模型用于去除脉冲噪声, 且对于数据保真项采取 L_p ($0 < p < 1$) 范数。超拉普拉斯先验更能拟合自然图像的先验, 交叠组稀疏是在图像去噪和图像去模糊中应用广泛。虽然是一项简单而广泛的研究, 但该正则化在成像科学中仍有需求。为解决非凸非光滑最小化问题, 我们采用交替乘子方向法 (ADMM) 作为主要算法框架。对于子问题分别使用 FFT 算法和 MM 算法。通过数值实验验证, 所提出的模型在 PSNR 和 SSIM 值上是有效的。

关键词

超拉普拉斯先验, 交叠组稀疏, 脉冲噪声, ADMM

Removing Impulse Noise Method Based on Hyper Laplacian Prior on Overlapping Group Sparsity

Ping Bai

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Feb. 8th, 2023; accepted: Mar. 4th, 2023; published: Mar. 13th, 2023

Abstract

Finding a meaningful image prior remains an important challenge in image processing due to the uncomfortable nature of image restoration. In this thesis, an overlapping group sparsity model

based on a hyper-Laplacian prior is proposed for impulse noise removal, and the data fidelity term is taken to be the L_p ($0 < p < 1$) norm. The hyper-Laplacian prior is a better fit to the natural image prior, and overlapping group sparsity is widely used in image denoising and image deblurring. Although it is a simple and extensive study, the regularization is still in demand in imaging science. To solve the non-convex non-smooth minimization problem, the alternating multiplier direction method (ADMM) is used as the main algorithmic framework. For the subproblems, the FFT algorithm and the MM algorithm are used respectively. The proposed model is validated by numerical experiments for PSNR and SSIM values.

Keywords

Hyper-Laplacian Prior, Overlapping Group Sparsity, Impulse Noise, ADMM

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在景物成像过程中，由于目标的高速运动、散射、成像系统畸变和噪声干扰，致使最后形成的图像存在种种恶化，称之为“退化”。图像中常见的一种噪声类型是脉冲噪声。这类噪声通常由于成像过程中的错误切换、传输错误、电磁干扰和成像传感器的噪声而破坏图像。两种最常见的脉冲噪声是盐椒噪声和随机值噪声[1]。因此，恢复脉冲噪声污染的图像是图像处理的研究热点问题[2] [3]。

传统的去除脉冲噪声的图像恢复问题通常被建模为一个形式的线性逆问题

$$\min_u \frac{1}{2} \|Ku - f\|_1 + \lambda \psi(u), \quad (1)$$

其中，第一项为数据保真项， $\psi(u)$ 为正则项， λ 为正则项参数，用于平衡数据保真项和正则项。数据保真度项取决于噪声模型的噪声分布类型，而正则化项对图像的期望先验属性建模。

对于正则项，不同的选择有不一样的去噪模型。当 $\psi(u) = \|\nabla u\|_1$ 该模型被称为 TVL1 [4]。然而，TV 正则会产生阶梯效应[5]。为此，引入了一些修正的模型像高阶全变分(HOTV L1) [6]，广义全变分正则(TGV L1) [7]。

基于交叠组稀疏度(OGS) [8]的模型用于自然图像去噪，并通过数值实验证明该模型比一些基于梯度的模型具有更好的鲁棒性。受 OGS 的启发，Selesnick 和 Chen [9]考虑了组稀疏全变分正则模型，并将其应用于一维信号去噪问题。在文献[10]的基础上，Liu 等人[10]将具有交叠组稀疏全变分的概念应用于脉冲噪声下的图像恢复，提出了一种脉冲噪声下图像去噪和去模糊的模型。然而，这个模型仍然存在轻微的阶梯效应。

L1 正则项会产生过度惩罚的解，因此，使用 L1 范数的正则项或数据保真度项都受到这种影响。在这一点上，在图像重构中的正则化，由于非凸正则泛函的边缘保持能力，所以优先选择非凸正则泛函。而在数据保真项中，非凸泛函由于其对大误差和离群值的稳健性而被选。

在[11] [12] [13] [14] [15]中，涉及非凸泛函的数据保真度已被用于脉冲噪声下的图像恢复，这些泛函包括平滑限幅绝对偏差(SCAD)、指数型(ET)、Geman 函数、LOG 函数、 L_p ($0 < p < 1$)范数和 L_0 范数。然而，在这些工作中仍然使用 TV 正则化作为正则项，因此，阶梯效应仍然可能出现在恢复的图像中。

此外,在[16]中也使用了非凸数据保真度并将其用于稀疏信号恢复和矩阵补齐。对于正则化的选择,非凸正则项已被证明可以产生清晰的边缘保持图像[17]。最近,文献[18]表明对于在超拉普拉斯先验上的交叠组稀疏正则具有鲁棒性。

基于超拉普拉斯先验可以很好地逼近自然图像梯度的重尾分布,交叠组稀疏可以通过引入额外的结构信息来弥补阶梯现象,我们引入了超拉普拉斯上的交叠组稀疏(OGS-HL)先验,用于脉冲噪声去噪,并且对于数据保真项采取 L_p ($0 < p < 1$) 范数。由于模型是非凸非光滑优化问题,ADMM 方法非常适用。对于子问题采取 FFT 算法和 MM 算法进行求解,最后通过数值实验证明了图像去噪和去模糊的有效性。

2. 超拉普拉斯先验上的交叠组稀疏

Selesnic 等人[9]定义了一个向量 $x \in R^n$ 的 K 点组: $x_{i,K} = [x(i), \dots, x(i+K-1)] \in R^K$, $x_{i,K}$ 可以看作是索引 i 开始的 K 连续样本的一个块。对于一维情况,交叠组稀疏正则化项可以表示为:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \|x_{i,K}\|_2,$$

其中, K 表示组大小。

Liu 等人[10]将交叠组稀疏正则从一维信号扩展到二维图像。一个图像矩阵 $f \in R^{n \times n}$ 的 $K \times K$ 点组表示为:

$$\tilde{f}_{i,j,K,K} = \begin{bmatrix} f_{i-a_1,j-a_1} & f_{i-a_1,j-a_1+1} & \cdots & f_{i-a_1,j+a_2} \\ f_{i-a_1+1,j-a_1} & f_{i-a_1+1,j-a_1+1} & \cdots & f_{i-a_1+1,j+a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i+a_1,j-a_1} & f_{i+a_1,j-a_1+1} & \cdots & f_{i+a_1,j+a_2} \end{bmatrix} \in R^{K \times K},$$

其中, $a_1 = \lfloor (K-1)/2 \rfloor$, $a_2 = \lfloor K/2 \rfloor$, 且 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示小于或等于的最大整数。设 $f_{i,j,K,K}$ 是通过排列 $\tilde{f}_{i,j,K,K}$ 所有元素得到的向量。二维数组的交叠组稀疏正则化项为:

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|f_{i,j,K,K}\|_2.$$

超拉普拉斯先验可以为图像梯度的重尾分布提供一个良性的近似,因此引起了人们的广泛兴趣。Jon 等人[18]进一步研究了图像梯度的交叠组稀疏性,其稀疏性用 L_q ($0 < q < 1$) 伪范数测量。对于同样的 $K \times K$ 点组,定义超拉普拉斯先验交叠组稀疏正则化项为:

$$\psi_{OH}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| |f_{i,j,K,K}|^q \right\|_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{k_1=-a_1}^{a_2} \sum_{k_2=-a_1}^{a_2} |f_{i+k_1,j+k_2}|^{2q}}.$$

其中,向量的 $|\cdot|^q$ 是其元素是相应元素的绝对值的 q 次幂的向量。当 $K=1$ 时,上面式子是典型的超拉普拉斯先验;当 q 的取值为 1 时便是典型的交叠组稀疏正则模型,即 $\psi_{OH}(f) = \psi(f)$ 。

3. 提出的模型

在这一部分中,我们首先介绍了所提出的模型,然后在 ADMM 框架下对其进行求解。

脉冲噪声在现实生活中的已经存在,并且在生产生活中很容易产生脉冲噪声。我们提出了一个针对脉冲噪声的模型,该模型为:

$$\min_u \lambda \|Ku - f\|_p^p + \phi_{OH}(\nabla u) + I(u) \quad (2)$$

其中, $0 < p < 1$, $\lambda > 0$, $\nabla = (D_1, D_2)$ 。

为了解决所提出的模型，使用 ADMM 算法框架。通过引入辅助变量 r, x_1, x_2 ，那么原始的复杂优化问题可以转化为以下的约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min_u \lambda \|r\|_p^p + \sum_{i=1}^2 \phi_{\text{OH}}(v) + I(w) \\ \text{s.t } r = Ku - f, v = \nabla u, w = u. \end{aligned}$$

那么，该约束优化问题增广拉格朗日方程可以表示为：

$$\begin{aligned} L_A(r, u, v, w, z) = \lambda \|r\|_p^p + \phi_{\text{OH}}(v) + I(w) - z_v^T (v - \nabla u) + \frac{\rho_v}{2} \|v - \nabla u\|_2^2 - z_w^T (w - u) \\ + \frac{\rho_w}{2} \|w - u\|_2^2 - z_r^T (r - Ku + f) + \frac{\rho_r}{2} \|r - Ku + f\|_2^2 \end{aligned}$$

其中， z_v, z_w 和 z_r 是对偶变量(拉格朗日乘子)，变量 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$ 为罚参数。

r 子问题： r 子问题即为求解如下极小化问题：

$$r^{k+1} = \arg \min_r \frac{\rho_r}{2} \left\| r - \left(Ku^k - f + \frac{z_3^k}{\rho_3} \right) \right\|_2^2 + \lambda \|r\|_p^p \tag{3}$$

令 $\bar{r} = Ku^k - f + z_3^k / \rho_3$ ，(3)可以写成一个 Lp ($0 < p < 1$)正则化问题：

$$r^{k+1} = \arg \min_r \frac{1}{2} \|r - \bar{r}\|_2^2 + \tau \|r\|_p^p,$$

其中参数 τ 为正则化参数。求解非凸 Lp 正则化问题，可以采用 IRL1 算法[19]。定义 $g_i = \tau \cdot p / (|r_i^k| + \varepsilon)^{1-p}$ 为权重， r^{k+1} 的迭代为：

$$r^{k+1} = \arg \min_r \frac{1}{2} \|r - \bar{r}\|_2^2 + \sum_i g_i |r_i|,$$

即为： $r^{k+1} = \text{sign}(\bar{r}) \odot \max(|\bar{r}| - g_i, 0)$ 。

u 子问题： u 子问题可以转化为以下极小化问题：

$$\begin{aligned} u^{k+1} = \arg \min_u \frac{\rho_r}{2} \|r - Ku + f\|_2^2 - z_r^T (r - Ku + f) + \frac{\rho_v}{2} \|v - \nabla u\|_2^2 \\ - z_v^T (v - \nabla u) + \frac{\rho_2}{2} \|z - u\|_2^2 - z_2^T (z - u). \end{aligned}$$

假定图像 u 符合周期边界条件，矩阵 $\nabla^T \nabla$ 和 $K^T K$ 是带循环块的块循环矩阵，可以通过 2D 快速傅立叶变换对角化。因此， u 子问题的求解可以通过一个快速傅立叶变换(FFT)和一个逆 FFT 运算在傅立叶域中有效地求解。故此 u 子问题可以转化为：

$$u^{k+1} = \mathcal{F}^{-1}(rhs/lhs), \tag{4}$$

其中，

$$\begin{aligned} lhs = |\mathcal{F}[K]|^2 + \frac{\rho_v}{\rho_r} |\mathcal{F}[\nabla]|^2 + \frac{\rho_z}{\rho_r}, \\ rhs = F \left[K^T \left(r^{k+1} + f - \frac{z_3^k}{\rho_3} \right) + \frac{1}{\rho_1} D_1^T (\rho_1 x_1^k - z_1) + \frac{1}{\rho_1} D_2^T (\rho_1 x_2^k - z_1) + \frac{1}{\rho_r} (\rho_z z^k - \mu_z) \right] \end{aligned}$$

v 子问题： v 子问题可以转化为以下最小化问题：

$$v^{k+1} = \arg \min_v \frac{\rho_v}{2} \left\| v - \left(\nabla u^{k+1} + \frac{z_v^k}{\rho_v} \right) \right\|_2^2 + \frac{1}{\rho_v} \phi_{\text{OH}}(v). \quad (5)$$

为了解决这个子问题，采用了一种基于 MM 迭代方法，详见[19]。

w 子问题：求解 w 子问题即为求解如下极小化问题：

$$w^{k+1} = \arg \min_w \frac{\rho_w}{2} \left\| w - \left(u^{k+1} + \frac{z_w^k}{\rho_w} \right) \right\|_2^2 + I(w) \quad (6)$$

对于上述问题的求解可以使用投影法：

$$w^{k+1} = P_{\Omega} \left[u^k + \frac{z_w^k}{\rho_w} \right] = \min \left(255, \max \left(u^{k+1} + \frac{z_w^k}{\rho_w}, 0 \right) \right).$$

拉格朗日乘子的更新：

$$\begin{aligned} z_1^{k+1} &= z_1^k - \rho_v (v^{k+1} - \nabla u^{k+1}), \\ z_2^{k+1} &= z_2^k - \rho_w (w^{k+1} - u^{k+1}), \\ z_3^{k+1} &= z_3^k - \rho_3 (r^{k+1} - Ku^{k+1} + f). \end{aligned} \quad (7)$$

因此，求解 u 的 ADMM 框架可以总结为**算法 1**。

算法 1.

ADMM 算法求解所提出的模型

输入： $f, \lambda > 0$ 组大小, p, q

初始化： $u^0 = f$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$, $N = 400$, $k = 0$

迭代： 1) 求解 r 子问题通过(3)式

2) 求解 u 子问题通过(4)式

3) 求解 v 子问题通过(5)式

4) 求解 w 子问题通过(6)式

5) 拉格朗日乘子的更新通过(7)式

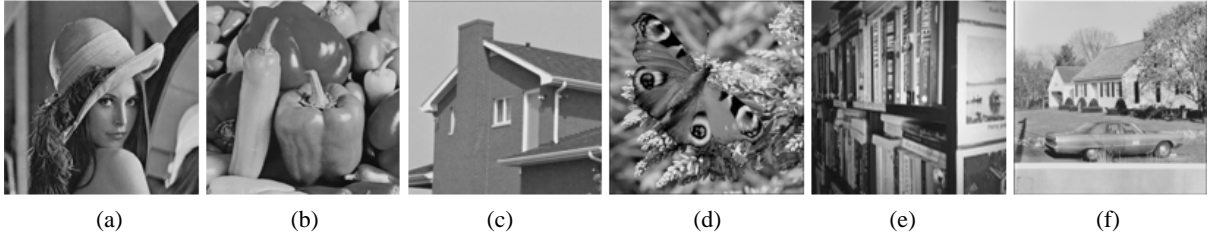
6) $k = k + 1$

满足迭代终止条件

4. 数值实验

针对带有脉冲噪声的图像问题进行了数值实验，并且与现有的其他算法进行了比较，通过数值实验证明了提出的方法的有效性。对于实验中的测试的图像，像素水平从 256×256 到 640×640 ，具体的图像见图 1。所有的实验结果用 MATLAB 2019a 在具备 Intel(R) Core (TM) i5 2.7G 处理器和 4 GB 的安装内存的 Dell 电脑上完成的。

本篇实验结果通过峰值信噪比(PSNR)和结构相似性(SSIM)两个指标来衡量恢复图像的质量。一般情况下，PSNR 值越高意味着所恢复的图像质量越好，SSIM 值小于等于 1 并且 SSIM 指数越接近 1 恢复的图像质量越好。



Note: (a) lena (358 × 358); (b) peppers (256 × 256); (c) house (256 × 256); (d) butterfly (450 × 450); (e) books (640 × 640); (f) lighthouse (512 × 512)

Figure 1. Test images from the experiment.

图 1. 实验中的测试图像

PSNR 被定义为:

$$PSNR = 10 \log \frac{\max_{u, \hat{u}}^2}{1/N^2 \sum_{i,j=1}^N [u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}]^2},$$

其中, $\max_{u, \hat{u}}$ 是原始图像 u 和恢复图像 \hat{u} 中的最大可能的像素值。其次, SSIM 可以被定义为:

$$SSIM = \frac{(2\bar{u}\bar{\hat{u}} + C_1)(2\delta_{u, \hat{u}} + C_2)}{(\bar{u}^2 + \bar{\hat{u}}^2 + C_1)(\delta_u^2 + \delta_{\hat{u}}^2 + C_2)},$$

其中,

$$\delta_u^2 = \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{i,j=1}^N (u_{i,j} - \bar{u})^2, \delta_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{i,j=1}^N (\hat{u}_{i,j} - \bar{\hat{u}})^2, \delta_{u, \hat{u}} = \frac{1}{N^2 - 1} \sum_{i,j=1}^N (u_{i,j} - \bar{u})(\hat{u}_{i,j} - \bar{\hat{u}})$$

这里, \bar{u} 表示 u 的平均值, $C_1 = 255^2/10^4, C_2 = 9 \cdot 255^2/10^4$ 。一般来说, 在实验中, 我们算法的迭代终止准则为:

$$\frac{\|u_{k+1} - u_k\|}{\|u_k\|} \leq 1 \times 10^{-3},$$

其中, u_{k+1} 和 u_k 分别表示在当前迭代和先前迭代的恢复图像。

4.1. 参数选择

首先, 讨论了 r 子问题中的 p 参数。图 2 显示了该参数在去除高斯核为 7×7 噪声水平为 0.3 的椒盐噪声时 PSNR 和 SSIM 的影响。在图 2 中, 观察到 p 在 0.4 之后趋于稳定。为了方便, 取参数 $p = 0.5$ 进行后续实验。

其次, 讨论 $x_i (i = 1, 2)$ 子问题中的 q 参数, 图 3 显示了该参数在去除高斯核为 7×7 噪声水平为 0.3 的椒盐噪声时 PSNR 和 SSIM 的影响。对于参数 q 值的取值, 在图 3 中可以看到当 q 接近 1 时, PSNR 和 SSIM 逐渐增加, 并且在 $q = 0.7, q = 0.8$ 和 $q = 0.9$ 时变得稳定。因此, 在后续的实验中, 简单的取 $q = 0.8$ 值。

为了选择最优的内迭代次数 N , 我们选择测试图像中两个图像的“peppers”和“house”, 图像“pepper”先被 7×7 高斯核模糊然后增加 30% 的椒盐噪声, 图像“house”先被 9×9 平均核模糊然后增加 40% 的椒盐噪声。固定 $q = 0.8, p = 0.5, K = 3, \lambda = 120$ 。在去模糊实验中, MM 算法中组大小的值是变化的, 其他参数保持不变。内部迭代次数 N 和 PSNR、SSIM 和 CPU 时间的值可见表 1。从表 1 中, 我们可以看到内迭代次数最优选择为 5。

为了选择最优的交叠组稀疏正则项中的组大小 K ，我们选择测试图像中的“peppers”，“house”，“lighthouse”三个图像，这三个图像被先被 7×7 高斯核模糊然后增加 30% 的椒盐噪声。固定 $p = 0.5$ ， $q = 0.8$ ， $N = 5$ ， $\lambda = 120$ 。MM 迭代中的组大小值是变化的，其他参数保持不变。组大小 K 和图像的 PSNR 与 SSIM 的关系详细见图 4，且从图 4 中可以看出选择组大小为 $K = 3$ 。

λ 的值取决于图像和噪声水平。对于高斯核下的去模糊， λ 的典型值在 [75, 150] 之间，而对于平均模糊情况，则在 [35, 130] 之间，在我们的实验中，取值为 120。

最后是关于 ρ_1, ρ_2, ρ_3 的选择，选择正确的 ρ_1, ρ_2, ρ_3 值对算法的运行速度至关重要。对于非凸问题我们知道， ρ_1, ρ_2, ρ_3 的值不能太小，如果太小，那么算法会不收敛，而如果太大，那么算法的运行速度非常地慢。我们根据经验设置了 $\rho_1 = 2.5, \rho_2 = 5, \rho_3 = 5$ 。

Table 1. The choice of inner iteration

表 1. 内迭代的选择

核	噪声	图像	内迭代	PSNR	SSIM	时间
7×7 高斯核	30%	peppers	1	34.378	0.941	21.998
			5	34.607	0.944	62.053
			20	34.539	0.944	214.174
			100	34.533	0.944	1036.7
			200	34.537	0.944	2011.8
9×9 平均核	40%	house	1	34.043	0.888	22.753
			5	34.359	0.889	69.342
			20	34.414	0.888	242.964
			100	34.431	0.888	1145.9
			200	34.445	0.888	2101.8

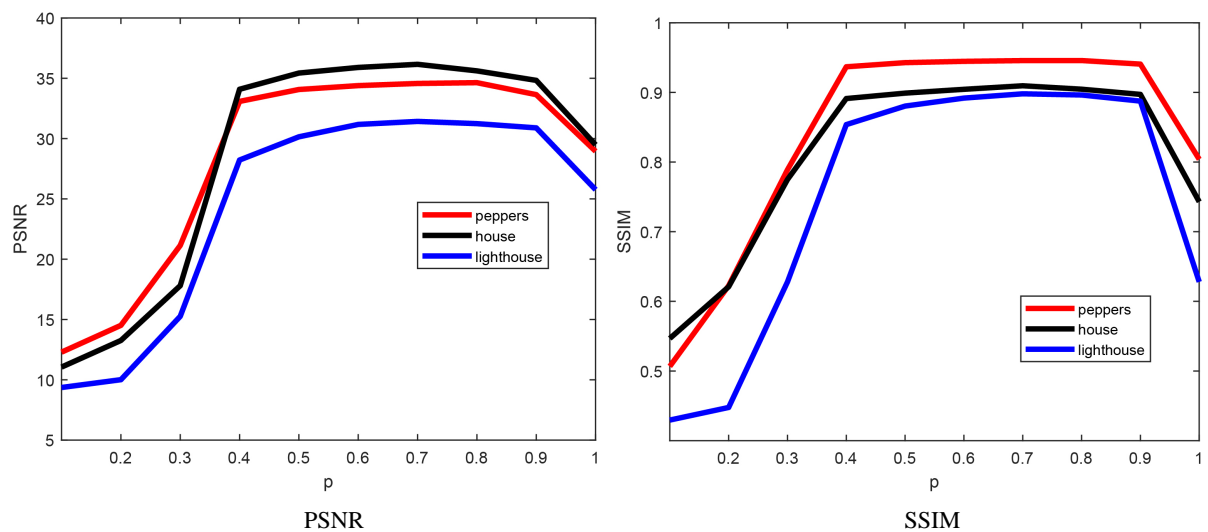


Figure 2. p with PSNR, SSIM

图 2. p 与 PSNR、SSIM 关系

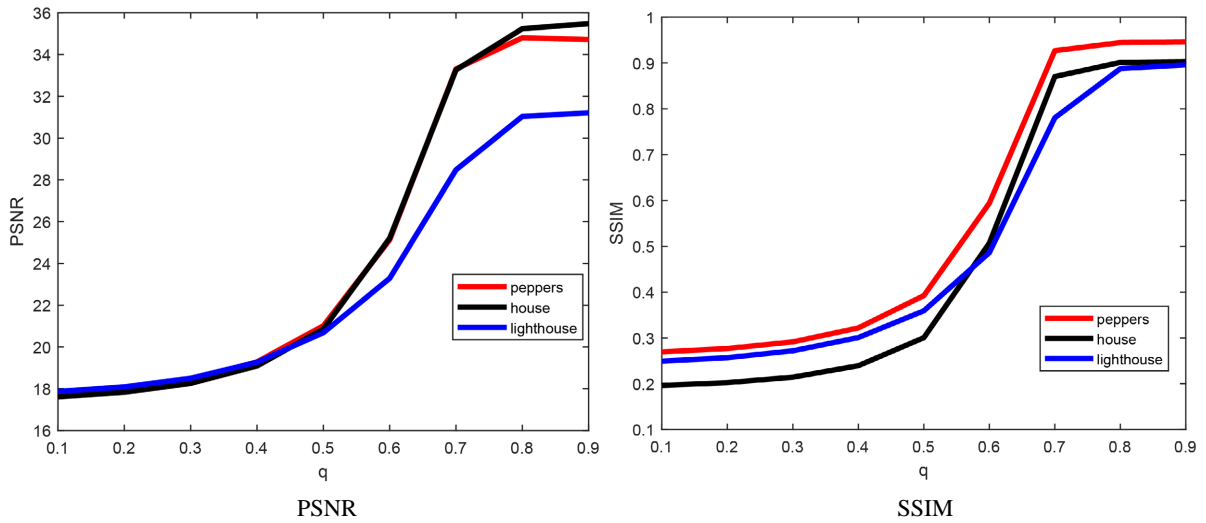


Figure 3. q with PSNR, SSIM
图 3. q 与 PSNR、SSIM 关系

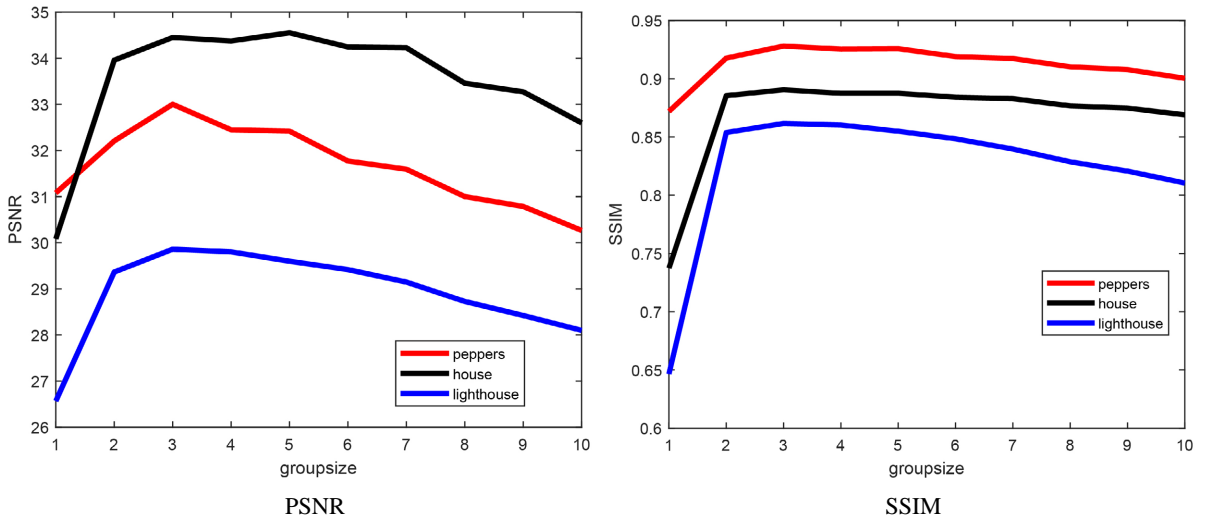


Figure 4. Group size with PSNR, SSIM
图 4. 组大小与 PSNR、SSIM 关系

4.2. 图像去噪

为了说明该方法的优越性,我们将其与现有的模型进行了比较,即 TVL1 模型[4],HOTV L1 模型[6], OGSL1 模型[10],HNHOTV-OGS 模型[16]。在数值实验中,我们测试了实验中给出的 6 张图片。对于上述所提及的模型都采用 ADMM 算法求解,且上述的模型,取其相应论文中的各项参数,以达到最优的 PSNR 和 SSIM 值。图 5、图 6 分别显示了 TVL1 模型, HOTV L1 模型, OGSL1 模型, HNHOTV-OGS 模型的去噪效果和所提出的模型的去模糊结果。(a)~(g)是图像的整体效果,(a')~(g')是图像的局部效果。结果汇总在表 2 和表 3 中。从这些表中,可以观察到:首先,对于椒盐噪声(SP)和随机值噪声(RV),所提出的方法几乎总是优于其他三种方法且 PSNR 和 SSIM 值比其他的四种方法高不少。因此,可以说,用该方法恢复的图像在结构上更接近于原始的干净图像。从表 2 和表 3 中的结果中可以观察到,当破坏为 50% 及以上(对于随机值的脉冲噪声为 50% 及以上)时,非凸数据保真度项(HNHOTV-OGS 模型和所提出

的模型)在抑制脉冲噪声方面的有效性。

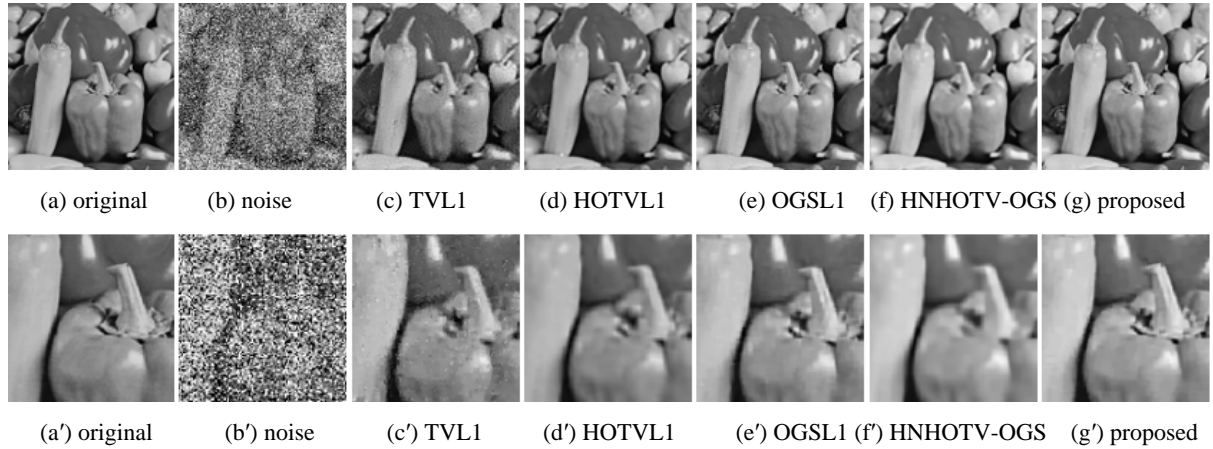


Figure 5. Deblurring results are shown for the TVL1, HOTVL1, OGSL1, HNHOTV-OGS and the proposed model with the addition of a 5×5 Gaussian kernel blur and 50% pretzel noise removed

图 5. 显示了 TVL1, HOTVL1, OGSL1, HNHOTV-OGS 和 proposed 的去模增加 5×5 高斯核模糊和 50% 的椒盐噪声的去模糊结果

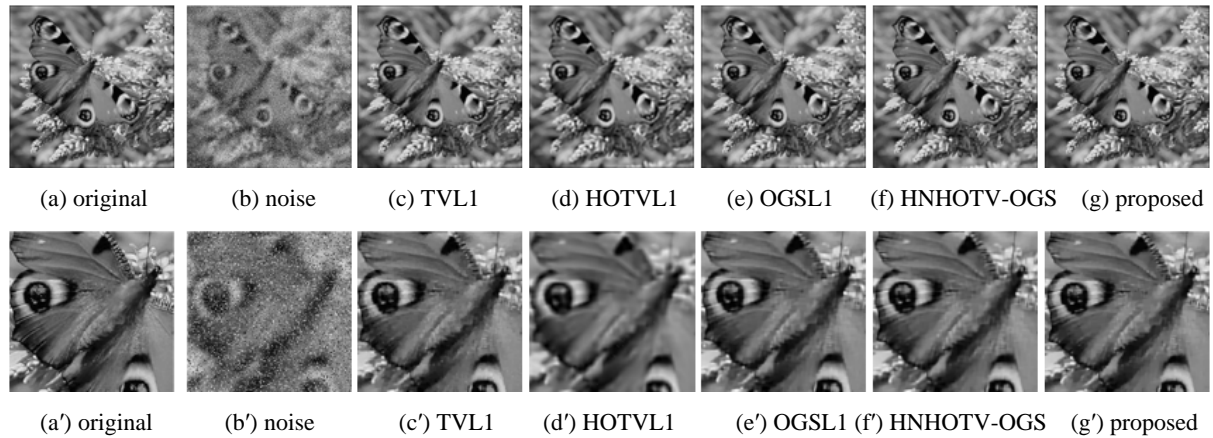


Figure 6. Deblurring results are shown for the TVL1, HOTVL1, OGSL1, HNHOTV-OGS and the proposed model with the addition of a 9×9 Average kernel blur and 30% pretzel noise removed

图 6. 显示了 TVL1, HOTVL1, OGSL1, HNHOTV-OGS 和 proposed 在去除增加 9×9 平均核模糊和 30% 的随机值噪声的去模糊结果

Table 2. PSNR and SSIM values of existing and proposed methods for image deblurring with the addition of 5×5 Gaussian kernel blur and impulse noise

表 2. 现有的方法和所提出的方法对于增加 5×5 高斯核模糊和脉冲噪声的图像去模糊的 PSNR 值和 SSIM 值

图像	噪声水平	噪声值	TVL1	HOTVL1	OGSL1	HNHOTV-OGS	our
		PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM
peppers	30% (SP)	10.386 /0.046	30.054 /0.896	32.228 /0.935	32.447 /0.929	32.791 /0.935	34.460 /0.944
	40% (SP)	9.162 /0.030	29.077 /0.878	32.091 /0.921	31.310 /0.913	32.306 /0.930	33.562 /0.939

Continued

	50% (SP)	8.270 /0.024	27.425 /0.825	28.082 /0.856	28.801 /0.852	29.892 /0.905	31.640 /0.909
	60% (SP)	7.484 /0.018	24.424 /0.695	28.039 /0.874	26.926 /0.844	29.892 /0.895	31.203 /0.921
	30% (RV)	13.819 /0.095	30.211 /0.901	32.551 /0.934	32.207 /0.925	32.704 /0.934	34.665 /0.944
	40% (RV)	12.743 /0.072	28.832 /0.880	32.410 /0.911	30.010 /0.885	30.310 /0.912	34.260 /0.942
	50% (RV)	11.748 /0.052	26.558 /0.819	26.594 /0.848	26.719 /0.830	31.200 /0.920	32.425 /0.927
	60% (RV)	11.035 /0.039	22.866 /0.694	22.994 /0.748	25.854 /0.804	28.557 /0.889	31.776 /0.925
house	30% (SP)	31.764 /0.872	34.295 /0.895	34.295 /0.895	34.174 /0.890	34.175 /0.891	36.152 /0.906
	40% (SP)	30.873 /0.858	33.084 /0.882	33.084 /0.882	32.827 /0.883	33.547 /0.886	35.737 /0.901
	50% (SP)	29.232 /0.815	29.740 /0.850	29.740 /0.850	33.084 /0.875	33.835 /0.879	35.104 /0.895
	60% (SP)	24.747 /0.652	28.953 /0.835	28.953 /0.835	30.349 /0.871	31.021 /0.871	31.899 /0.876
	30% (RV)	31.478 /0.872	34.040 /0.893	34.040 /0.893	35.445 /0.907	32.167 /0.874	36.108 /0.905
	40% (RV)	30.790 /0.859	32.261 /0.874	32.261 /0.874	33.369 /0.891	31.705 /0.869	35.602 /0.899
	50% (RV)	27.973 /0.812	29.047 /0.835	29.047 /0.835	27.995 /0.819	30.980 /0.862	34.979 /0.895
	60% (RV)	23.811 /0.661	25.012 /0.727	25.012 /0.727	25.006 /0.760	29.678 /0.848	30.577 /0.869
light house	30% (SP)	10.285 /0033	27.570 /0.822	30.334 /0.882	30.993 /0.892	27.606 /0.822	31.467 /0.898
	40% (SP)	90.491 /0.023	26.952 /0.799	29.489 /0.867	30.155 /0.876	27.209 /0.810	30.754 /0.888
	50% (SP)	8.141/0.017	25.732 /0.738	28.093 /0.835	28.515 /0.844	26.762 /0.796	29.827 /0.874
	60% (SP)	7.350 /0.012	22.339 /0.553	25.937 /0.771	23.987 /0.722	26.343 /0.780	27.760 /0.808
	30% (RV)	13.619 /0.073	27.375 /0.817	30.149 /0.880	25.442 /0.741	27.531 /0.821	31.401 /0.897
	40% (RV)	12.434 /0.051	26.626 /0.791	28.626 /0.846	25.096 /0.726	27.064 /0.807	30.554 /0.886
	50% (RV)	11.524 /0.039	24.719 /0.695	24.965 /0.739	24.429 /0.99	26.620 /0.793	28.984 /0.846
	60% (RV)	10.802 /0.031	21.165 /0.514	21.409 /0.580	22.457 /0.633	25.376 /0.758	24.498 /0.819

Table 3. PSNR and SSIM values of existing and proposed methods for image deblurring with the addition of 9×9 Average kernel blur and impulse noise**表 3.** 现有的方法和所提出的方法对于增加 9×9 平均核模糊和脉冲噪声的图像去模糊的 PSNR 值和 SSIM 值

图像	噪声水平	噪声值		TVL1	HOTVL1	OGSL1	HNHOTV-OGS	our
		PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM	PSNR /SSIM
lena	30% (SP)	10.300 /0.030	29.432 /0.845	26.325 /0.780	30.022 /0.872	30.099 /0.877	31.024 /0.885	
	40% (SP)	9.076 /0.020	28.278 /0.800	26.141 /0.773	29.537 /0.862	29.744 /0.870	30.621 /0.879	
	50% (SP)	8.131 /0.013	26.998 /0.767	25.928 /0.764	28.790 /0.844	29.328 /0.861	30.146 /0.871	
	60% (SP)	7.387 /0.012	25.382 /0.655	25.437 /0.741	27.644 /0.812	28.792 /0.848	29.431 /0.858	
	30% (RV)	13.613 /0.067	29.412 /0.844	26.680 /0.792	29.94 /0.870	30.101 /0.876	31.039 /0.886	
	40% (RV)	12.418 /0.048	27.922 /0.757	26.287 /0.776	29.079 /0.850	29.697 /0.868	30.511 /0.878	
	50% (RV)	11.603 /0.037	25.953 /0.757	25.339 /0.738	26.836 /0.772	29.089 /0.856	29.844 /0.866	
	60% (RV)	10.829 /0.027	23.005 /0.656	22.355 /0.644	23.247 /0.696	27.638 /0.829	27.913 /0.832	
butterfly	30% (SP)	10.594 /0.033	25.764 /0.852	22.376 /0.726	27.063 /0.865	27.277 /0.874	28.483 /0.890	
	40% (SP)	9.049 /0.023	24.873 /0.818	22.204 /0.77	26.461 /0.849	26.813 /0.864	27.924 /0.880	
	50% (SP)	8.423 /0.018	29.232 /0.815	22.001 /0.705	25.532 /0.822	26.282 /0.849	27.256 /0.865	
	60% (SP)	7.645 /0.012	24.747 /0.652	21.177 /0.661	24.097 /0.768	25.500 /0.829	26.130 /0.840	
	30% (RV)	13.476 /0.079	26.631 /0.839	22.857 /0.750	26.997 /0.864	27.261 /0.873	28.475 /0.890	
	40% (RV)	12.453 /0.056	25.329 /0.788	22.500 /0.733	26.023 /0.838	26.742 /0.861	27.849 /0.877	
	50% (RV)	11.678 /0.045	23.049 /0.727	21.942 /0.701	24.091 /0.776	26.058 /0.845	26.972 /0.860	
	60% (RV)	10.975 /0.033	20.551 /0.611	0.640 /0.630	21.308 /0.670	24.416 /0.804	27.741 /0.811	
books	30% (SP)	10.285 /0.033	27.570 /0.822	23.348 /0.716	29.428 /0.901	29.718 /0.907	31.080 /0.922	
	40% (SP)	9.049 /0.023	26.952 /0.799	23.150 /0.704	28.556 /0.885	29.147 /0.897	30.407 /0.914	
	50% (SP)	8.141 /0.017	25.732 /0.738	22.898 /0.688	27.426 /0.861	28.413 /0.884	29.588 /0.903	

Continued

60% (SP)	7.350 /0.012	22.339 /0.553	22.514 /0.659	25.675 /0.808	27.443 /0.864	28.272 /0.882
30% (RV)	12.759 /0.064	28.748 /0.875	23.818 /0.738	29.172 /0.898	29.656 /0.906	31.048 /0.921
40% (RV)	11.692 /0.047	26.555 /0.780	23.351 /0.706	27.967 /0.870	29.021 /0.895	30.362 /0.913
50% (RV)	10.810 /0.035	23.015 /0.686	22.158 /0.615	23.842 /0.730	28.036 /0.878	29.225 /0.899
60% (RV)	10.114 /0.027	20.187 /0.522	19.323 /0.456	20.233 /0.566	24.710 /0.817	28.045 /0.837

5. 结论

在这篇论文中，基于超拉普拉斯先验可以很好地逼近自然图像梯度的重尾分布，交叠组稀疏可以通过引入额外的结构信息来弥补阶梯现象，我们引入了超拉普拉斯上的交叠组稀疏先验，用于脉冲噪声去噪。数据保真项由于 L1 范数会产生过度惩罚的解，因此并不采 L1 范数而采取 L_p ($0 < p < 1$) 范数。由于该模型是非凸非光滑优化问题，ADMM 方法非常适用。最后通过数值实验证明了图像去噪和去模糊的有效性。

参考文献

- [1] Yang, J., Zhang, Y. and Yin, W. (2009) An Efficient TVL1 Algorithm for Deblurring Multichannel Images Corrupted by Impulsive Noise. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 2842-2865. <https://doi.org/10.1137/080732894>
- [2] Wong, R.K.W. and Lee, T.C.M. (2017) Matrix Completion with Noisy Entries and Outliers. *The Journal of Machine Learning Research*, **18**, 5404-5428.
- [3] Cai, J.-F., Chan, R.H. and Nikolova, M. (2010) Fast Two-Phase Image Deblurring under Impulse Noise. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **36**, 46-53. <https://doi.org/10.1007/s10851-009-0169-7>
- [4] Chan, S.H., Khoshabeh, R., Gibson, K.B., Gill, P.E. and Nguyen, T.Q. (2011) An Augmented Lagrangian Method for Total Variation Video Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, **20**, 3097-3111. <https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2158229>
- [5] Chambolle, A. and Lions, P.-L. (1997) Image Recovery via Total Variation Minimization and Related Problems. *Numerische Mathematik*, **76**, 167-188. <https://doi.org/10.1007/s002110050258>
- [6] Bredies, K. and Holler, M. (2020) Higher-Order Total Variation Approaches and Generalisations. *Inverse Problems*, **36**, Article ID: 123001. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab8f80>
- [7] Bredies, K., Kunisch, K. and Pock, T. (2010) Total Generalized Variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **3**, 492-526. <https://doi.org/10.1137/090769521>
- [8] Peyré, G. and Fadili, J. (2011) Group Sparsity with Overlapping Partition Functions. 2011 *19th European Signal Processing Conference*, Barcelona, 29 August-2 September 2011, 303-307.
- [9] Selesnick, I.W. and Chen, P.-Y. (2013) Total Variation Denoising with Overlapping Group Sparsity. 2013 *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, 26-31 May 2013, 5696-5700. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2013.6638755>
- [10] Liu, G., Huang, T.-Z., Liu, J. and Lv, X.-G. (2015) Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Image Deblurring under Impulse Noise. *PLOS ONE*, **10**, e0122562. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0122562>
- [11] Cui, Z.-X. and Fan, Q. (2018) A “Nonconvex+Nonconvex” Approach for Image Restoration with Impulse Noise Removal. *Applied Mathematical Modelling*, **62**, 254-271. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.05.035>
- [12] Gu, G., Jiang, S. and Yang, J. (2017) A TVSCAD Approach for Image Deblurring with Impulsive Noise. *Inverse Problems*, **33**, Article ID: 125008. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa9383>
- [13] Zhang, B., Zhu, G. and Zhu, Z. (2020) A TV-Log Nonconvex Approach for Image Deblurring with Impulsive Noise. *Signal Processing*, **174**, Article ID: 107631. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107631>

-
- [14] Zhang, X., Bai, M. and Ng, M.K. (2017) Nonconvex-TV Based Image Restoration with Impulse Noise Removal. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **10**, 1627-1667. <https://doi.org/10.1137/16M1076034>
- [15] Yuan, G. and Ghanem, B. (2019) ℓ_0 TV: A Sparse Optimization Method for Impulse Noise Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 352-364. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2017.2783936>
- [16] Adam, T., Paramesran, R., Yin, M.M. and Ratnavelu, K. (2021) Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Impulse Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **80**, 18503-18530. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-10583-y>
- [17] Nikolova, M., Ng, M.K. and Tam, C.-P. (2010) Fast Nonconvex Nonsmooth Minimization Methods for Image Restoration and Reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, **9**, 3073-3088. <https://doi.org/10.1109/TIP.2010.2052275>
- [18] Jon, K., Sun, Y., Li, Q., *et al.* (2021) Image Restoration using Overlapping Group Sparsity on Hyper-Laplacian Prior of Image Gradient. *Neurocomputing*, **420**, 57-69. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.08.053>
- [19] Candès, E.J., Wakin, M.B. and Boyd, S.P. (2008) Enhancing Sparsity by Reweighted ℓ_1 Minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **14**, 877-905. <https://doi.org/10.1007/s00041-008-9045-x>