**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2023, 12(3), 837-846**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123086

# 拟微分算子在Besov空间上的有界性

**蔡士瑛**

浙江师范大学数学系, 浙江 金华

收稿日期：2023年2月8日；录用日期：2023年3月4日；发布日期：2023年3月13日

## 摘　要

在本文我们考虑振幅$a$属于**Hörmander**类$S^m_{\rho,1}$时的拟微分算子$T_a$在**Besov**空间上的有界性. 对于$0 \leq \rho \leq 1, p \geq 1$，令

$$m_0 = m_0(\rho, p) = \begin{cases} n(\rho-1)/p & ,1 \leq p \leq 2; \\ n(\rho-1)/2 & ,p \geq 2. \end{cases}$$

如果$a \in S^m_{\rho,1}$且$s > m - m_0$，我们证明拟微分算子$T_a$是**Besov**空间$B^s_{p,q}$到$B^{s-m+m_0}_{p,q}$的有界算子. 这个结果推广了**Stein**的一个小结果.

## 关键词

拟微分算子，**Hörmander**类，**Besov**空间

# On the Boundedness of Pseudo-Differential Operators on Besov Spaces

**Shiying Cai**

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. $8^{th}$, 2023; accepted: Mar. $4^{th}$, 2023; published: Mar. $13^{th}$, 2023

文章引用: 蔡士瑛. 拟微分算子在Besov空间上的有界性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 837-846.
DOI: 10.12677/aam.2023.123086

## Abstract

**In this note, we consider the boundedness of the pseudo-differential operator $T_a$ whose symbol $a$ belongs to Hörmander class $S^m_{\rho,1}$ on Besov spaces.Let $0 \le \rho \le 1, p \ge 1$**

$$m_0 = m_0(\rho, p) = \begin{cases} n(\rho-1)/p & ,1 \le p \le 2; \\ n(\rho-1)/2 & ,p \ge 2. \end{cases}$$

**If $a \in S^m_{\rho,1}$ and $s > m - m_0$, then the pseudo-differential operator $T_a$ is bounded from $B^s_{p,q}$ to $B^{s-m+m_0}_{p,q}$. And our work is to generalize a result of Stein.**



## Keywords

**Pseudo-Differential Operator, Hörmander Class, Besov Space**



Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access


## 1. 研究背景和现状

拟微分算子在偏微分方程中有广泛应用. Kohn-Nirenberg和Hörmander分别在 [1, 2]开始系统研究这类算子. 一般而言, 一个拟微分算子形式上如下定义

$$T_{\phi,a}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x,\xi)} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

其中$\hat{f}$表示$f$的Fourier变换, $a$称为振幅.$\phi$称为相位函数.当$\phi(x,\xi) = x\cdot\xi$时,是拟微分算子.对于振幅$a$, 最重要的一类空间是Hörmander 在 [3] 引进的Hörmander类$S^m_{\rho,\delta}$. 我们说$a$属于$S^m_{\rho,\delta}(m \in \mathbb{R}, 0 \le \rho, \delta \le 1)$是指对所有多重指标$\alpha, \beta$, $a$ 满足

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| = A_{\alpha,\beta} < +\infty.$$

在拟微分算子的理论中, 它在Lebesgue空间$L^p$和Hardy空间$H^1$上的有界性是最重要的问题之一. 现在这个问题已经有了充分的研究. 简而言之, 如果$a \in S^m_{\rho,\delta}, \delta < 1$, 那么当$m \le \min\{0, n(\rho-\delta)/2\}$时, 那么$T_a$ 在$L^2$上有界, 具体可以参看Hörmander [4], Hounie [5]等. 进一步, 对于$a \in S^m_{\rho,1}$, Rodino在 [6]中证明当$m < n(\rho-1)/2$时$T_a$在$L^2$上有界. 同时他构造了一个例子$a \in S^{n(\rho-1)/2}_{\rho,1}$ 使得$T_a$在$L^2$ 上不是有界的. 类似的反例$a \in S^0_{1,1}$可以参看Ching [7]和Stein [8] P. 272. 对于端点情形, 在未出版的讲义中, Stein证明了当$a \in S^{n(\rho-1)/2}_{\rho,\delta}$且$0 \le \delta < \rho = 1$或者$0 < \delta = \rho < 1$时, $T_a$是弱$(1,1)$有界且从$H^1$ 到$L^1$有界. Álvarez和Hounie [9]推广了这一结果, 他们证明了如果$a \in S^m_{\rho,\delta}$, $0 < \rho \le 1$, $0 \le \delta < 1$且$m = \frac{n}{2}(\rho - 1 + \min\{0, \rho-\delta\})$, 那么$T_a$是弱$(1,1)$有界且从$H^1$到$L^1$有界. $L^p$上的有界性可以通过Fefferman-Stein的解析插值方法给出. 进一步, 对于振幅$a$属于$S^m_{\rho,1}$或者更大的粗糙Hörmander类$L^\infty S^m_\rho$时, Guo-Zhu在 [10]中证明了各种临界情形的有界性或者给出无界的反例.

如前所述, 当$a \in S^{n(\rho-1)/2}_{\rho,1}$时$T_a$在$L^2$上未必是有界的, 但对于这种情形的某些特例, Stein在 [8]中有一个有趣的小结果.

## 2. 本文主要结果

**定理A** ( [8] P. 253, Proposition 6) 如果$a \in S^m_{1,1}$且$\gamma > m$, 那么拟微分算子$T_a$是从Lipschitz空间$\Lambda_\gamma$到$\Lambda_{\gamma-m}$的有界映射.

我们在本文中的主要目的是从几个方面推广Stein的这个结果. 首先我们介绍下Littlewood-Paley分解和Besov空间. 这里$B_r$表示$\mathbb{R}^n$中以原点为中心半径为$r$的球. 取非负函数$\eta \in C^\infty_c(B_2)$ 使得对$\xi \in B_1$恒有$\eta(\xi) = 1$并定义

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \eta(\xi),\ \ \widehat{\varphi_j}(\xi) = \eta(2^{-j}\xi) - \eta(2^{1-j}\xi), j \in \mathbb{Z}.$$

容易看出$\widehat{\varphi_j}$支集落在环$\{\xi : 2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+1}\}$内且不难验证以下的等式

$$\widehat{\varphi}(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\varphi_j}(\xi) = \eta(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} [\eta(2^{-j}\xi) - \eta(2^{1-j}\xi)] = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

$$\varphi_j(x) = 2^{jn}\varphi_0(2^j x), \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{Z}.$$

$S'(\mathbb{R}^n)$表示缓增广义函数空间. 对于$s \in \mathbb{R}, 0 < p \le \infty, 0 < q < \infty$, 我们定义非齐次Besov空间和齐次Besov空间,

$$B^s_{p,q} = \{f \in S' : \|f\|_{B^s_{p,q}} = \|\varphi * f\|_p + (\sum_{j=1}^{\infty} (2^{js}\|\varphi_j * f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < \infty\};$$

$$\dot{B}^s_{p,q} = \{f \in S' : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = (\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{js}\|\varphi_j * f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < \infty\}.$$

对于$s \in \mathbb{R}, 0 < p \le \infty, q = \infty$, 两个空间定义修正为

$$B^s_{p,\infty} = \{f \in S' : \|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \|\varphi * f\|_p + \sup_{1 \le j < \infty} 2^{js}\|\varphi_j * f\|_p < \infty\};$$

$$\dot{B}^s_{p,\infty} = \{f \in S' : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js}\|\varphi_j * f\|_p < \infty\}.$$

在本文中, 为了方便, 当$q=\infty$时我们也采用$q<\infty$时的表达式, 不再予以区分. 另外, 也为了简便起见, 以后我们记

$$\Delta_j f=\varphi_j * f,\;\; S_0 f=\varphi * f.$$

对于齐次Besov空间, 由于多项式的模为零, 若两个广义函数差几乎处处等于一个多项式, 则两个广义函数认为是相同的.

众所周知, Lipschitz空间和$L^2$都是非齐次Besov空间的特例, 具体地说, $B^s_{\infty,\infty}=\Lambda_s, B^0_{2,2}=L^2$.

对于$0\le\rho\le 1, 1\le\rho\le\infty$, 定义

$$m_0=m_0(\rho,p)=\begin{cases} n(\rho-1)/p & ,1\le p\le 2;\\ n(\rho-1)/2 & ,p\ge 2.\end{cases}$$

下面是我们的主要定理

**定理 1** 如果$a\in S^m_{\rho,1}$且$s>m-m_0$, 那么对于拟微分算子$T_a$我们有

$$\|T_a f\|_{B^{s-m+m_0}_{p,q}}\le C\|f\|_{B^s_{p,q}} \tag{2.1}$$

其中常数$C$仅依赖于$n,\rho,p,m,s$和$a$在$S^m_{\rho,1}$中的某些半范数.

**注1.** 如果取$\rho=1$则立即有$m_0=0$, 此时再令$p=q=\infty, s=\gamma$, 利用$B^s_{\infty,\infty}=\Lambda_s$我们就得到了定理A.

**注2.** 这里如果去掉$s>m-m_0$的假设结论未必成立. 例如令$p=q=2, m=m_0=n(\rho-1)/2, s=m-m_0=0$, 则此时$B^0_{2,2}=L^2$, 而我们已经知道这种情形下$T_a$在$L^2$上未必是有界的, 因此定理中的结论不再成立.

在本文中, 我们用字母$C$表示一个正常数, 它仅依赖于$n,\rho,p,m,s$和$a$在$S^m_{\rho,1}$中的某些半范数, 而且在不同地方它表示的具体数值可能不一样, 我们一般不再详细说明. 另外, 我们假设计算中出现的$f$都属于Schwartz空间, 因此涉及的积分都是绝对可积的, 而后再利用稠密性扩展到一般情形.

## 3. 主要定理的证明

首先我们给出一个非常基础的引理, 这个结果在相关文献中基本都有, 为完整起见, 我们这里也给出证明.

**引理 1** 设$a\in S^m_{\rho,1}, 0\le\rho\le 1$, 那么对任意$m\in\mathbb{R}, p\in[1,\infty]$, 拟微分算子$T_a$和$S_0$的复合满足

$$\|T_a S_0 f\|_p\le C\|f\|_p. \tag{3.1}$$

**证明** 显然$T_a S_0 f$可表示为

$$T_a S_0 f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\eta(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{k}(x,x-y)f(y)dy$$

其中$\widetilde{k}(x,z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}a(x,\xi)\eta(\xi)d\xi$. 利用Fourier变换的基本性质容易得到

$$\begin{aligned}(1+|z|)^{2n}|\widetilde{k}(x,z)| &= C\sum_{|\alpha|\le 2n}|z^\alpha\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}a(x,\xi)\eta(\xi)d\xi| = C\sum_{|\alpha|\le 2n}|\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}\partial_\xi^\alpha[a(x,\xi)\eta(\xi)]d\xi| \\ &\le C\sum_{|\alpha|\le 2n}|\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_\xi^\alpha[a(x,\xi)\eta(\xi)]|d\xi \le C.\end{aligned}$$

故由Young不等式立即可得

$$\begin{aligned}\|T_aS_0f\|_p &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{k}(x,x-y)f(y)dy)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x-y|)^{-2n}|f(y)|dy)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\|f\|_p.\end{aligned}$$

这个引理证毕. □

我们稍微修改了下 [11]中的命题2.3得到下面这个引理.

**引理 2** 设$a\in S^m_{\rho,1}, 0\le\rho\le 1$, 那么当$j\ge 1, 1\le p\le\infty$时, 拟微分算子$T_a$和$\Delta_j$的复合满足

$$\|T_a\Delta_jf\|_p \le C2^{j(m-m_0)}\|f\|_p. \tag{3.2}$$

**证明** 记$a_j(x,\xi)=(\eta(2^{-j}\xi)-\eta(2^{1-j}\xi))a(x,\xi)$, 则$\{\xi: a_j(x,\xi)\ne 0\}\subset\{\xi: 2^{j-1}<|\xi|<2^{j+1}\}$. 当$j\ge 1$时, 对任意多重指标$\alpha$显然有

$$|\partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi)| \le C2^{j(m-\rho|\alpha|)}.$$

根据定义$T_a\Delta_j$可表示为

$$\begin{aligned}T_a\Delta_jf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\widehat{\Delta_jf}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}(\eta(2^{-j}\xi)-\eta(2^{1-j}\xi))a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}k_j(x,x-y)f(y)dy\end{aligned}$$

其中$k_j(x,z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}a_j(x,\xi)d\xi$.

取$\sigma_j(z)=2^{jn\rho}(1+2^{j\rho}|z|)^{-3n}$, 则显然有$\|\sigma_j\|_1=C$.

当$1\le p\le 2$时, $p$的共轭数$p'=\frac{p}{p-1}\ge 2$. 此时对任意$x\in\mathbb{R}^n$, 利用Fourier变换的基本性质和Hausdorff-Young不等式, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{k_j(x,x-y)}{\sigma_j^{\frac{1}{p}}(x-y)}|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}} &= 2^{-\frac{jn\rho}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k_j(x,z)(1+2^{j\rho}|z|)^{\frac{3n}{p}}|^{p'}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq 2^{-\frac{jn\rho}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|k_j(x,z)(1+2^{j\rho}|z|)^{3n}|^{p'}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C2^{-\frac{jn\rho}{p}}\sum_{|\alpha|\leq 3n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|2^{j\rho|\alpha|}z^{\alpha}k_j(x,z)|^{p'}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= C2^{-\frac{jn\rho}{p}}\sum_{|\alpha|\leq 3n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|2^{j\rho|\alpha|}z^{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}a_j(x,\xi)d\xi\right|^{p'}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= C2^{-\frac{jn\rho}{p}}\sum_{|\alpha|\leq 3n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}\left(2^{j\rho|\alpha|}\partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi)\right)d\xi\right|^{p'}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq C2^{-\frac{jn\rho}{p}}\sum_{|\alpha|\leq 3n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|2^{j\rho|\alpha|}\partial_\xi^\alpha a_j(x,\xi)|^{p}d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C2^{-\frac{jn\rho}{p}}\sum_{|\alpha|\leq 3n}\left(\int_{|\xi|<2^{1+j}}2^{jmp}d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C2^{-\frac{jn\rho}{p}}2^{j(m+\frac{n}{p})}=C2^{j(m-m_0)}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

这个不等式对$p>2$未必成立, 因为我们需要用到Hausdorff-Young不等式. 另外注意这里的$m_0$跟$p$有关, 而常数$C$跟$x$无关.

因此, 根据(3.3), 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
|T_a\Delta_j f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}k_j(x,x-y)f(y)dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\frac{k_j(x,x-y)}{\sigma_j^{\frac{1}{p}}(x-y)}|\sigma_j^{\frac{1}{p}}(x-y)|f(y)|dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{k_j(x,x-y)}{\sigma_j^{\frac{1}{p}}(x-y)}|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sigma_j(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C2^{j(m-m_0)}(\sigma_j*|f|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

现在, 利用(3.4)和Young不等式可得

$$
\|T_a\Delta_j f\|_p\leq C2^{j(m-m_0)}\|\sigma_j*|f|^p\|_1^{\frac{1}{p}}\leq C2^{j(m-m_0)}\|\sigma_j\|_1^{\frac{1}{p}}\|f\|_p=C2^{j(m-m_0)}\|f\|_p. \tag{3.5}
$$

注意$p\geq 2$时$m_0$跟具体的$p$无关, 故对任意$p>2$由(3.4)我们有

$$
|T_a\Delta_j f(x)|\leq C2^{j(m-m_0)}(\sigma_j*|f|^2)^{\frac{1}{2}}.
$$

利用类似(3.5)的计算, 当$p>2$时, 我们可以证明

$$\begin{aligned}\|T_a\Delta_j f\|_p &\leq C2^{j(m-m_0)}\|(\sigma_j*|f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p\\ &= C2^{j(m-m_0)}\|\sigma_j*|f|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C2^{j(m-m_0)}\|\sigma_j\|_1^{\frac{1}{2}}\|f^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}}\\ &= C2^{j(m-m_0)}\|f\|_p.\end{aligned}$$

因此对所有$1\leq p\leq\infty$我们证明了这个引理. □

**引理 3** 设$j$和$L$是两个非负整数, 假设存在$\lambda_j$使得对任意多重指标$\alpha, |\alpha|\leq L$都有$\|\partial_x^\alpha F_j\|_p\leq C2^{j|\alpha|}\lambda_j$, 则对任意正整数$k$我们有

$$\|\Delta_k F_j\|_p\leq C2^{(j-k)L}\lambda_j. \tag{3.6}$$

**证明** $\eta$如前定义, 对$l=1,2,...,n$定义

$$b_0(\xi)=\eta(\xi),\ \ b_l(\xi)=(1-\eta(\xi))\frac{\xi_l}{|\xi|^2},$$

则显然$b_0,b_1,...,b_n\in S_{1,0}^{-1}$且

$$b_0(\xi)+\sum_{l=1}^n b_l(\xi)\xi_l=1,\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

因此对任意非负整数$L$有

$$\begin{aligned}\Delta_k F_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi_k}(\xi)(b_0(\xi)+\sum_{l=1}^n b_l(\xi)\xi_l)^L\widehat{F_j}(\xi)d\xi\\ &= \sum_{|\alpha|\leq L}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}b_\alpha(\xi)\widehat{\varphi_k}(\xi)\xi^\alpha\widehat{F_j}(\xi)d\xi\\ &= \sum_{|\alpha|\leq L}T_{b_\alpha}\Delta_k(\partial^\alpha F_j)(x)\end{aligned}$$

其中$b_\alpha=b_0^{L-|\alpha|}\prod_{l=1}^n b_l^{\alpha_l}\in S_{1,0}^{-L}$. 在引理2中取$m=-L,\rho=1$ (此时$m_0(1,p)=0$)我们得到

$$\|\Delta_k F_j\|_p\leq\sum_{|\alpha|\leq L}\|T_{b_\alpha}\Delta_k(\partial^\alpha F_j)\|_p\leq C2^{-kL}\sum_{|\alpha|\leq L}\|\partial^\alpha F_j\|_p\leq C2^{-kL}\sum_{|\alpha|\leq L}2^{j|\alpha|}\lambda_j\leq C2^{(j-k)L}\lambda_j.$$

引理3证毕. □

下面我们证明定理1.

对$f\in B_{p,q}^s, j\geq 1$, 记$f_j'=(\Delta_{j-1}+\Delta_j+\Delta_{j+1})f$, 则显然有$\Delta_j f=\Delta_j f_j'$.

根据$a \in S^m_{\rho,1}$, 不难看出

$$\partial_x^\alpha T_a f(x) = \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi^\beta \partial_x^\gamma a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi = T_{a_\alpha} f(x)$$

其中$a_\alpha(x,\xi) = \xi^\beta \partial_x^\gamma a(x,\xi) \in S^{m+|\alpha|}_{\rho,1}$. (这个式子对粗糙Hörmander类$L^\infty S^m_\rho$不成立.)

现在, 对$j \geq 1$和任意多重指标$\alpha$, 由引理2得

$$\|\partial_x^\alpha T_a \Delta_j f\|_p = \|T_{a_\alpha}\Delta_j f'_j\|_p \leq C 2^{j(|\alpha|+m-m_0)}\|f'_j\|_p. \tag{3.7}$$

令$\lambda_j = 2^{js}\|f'_j\|_p, j \geq 1$. 当$k \leq j$时, 在引理3中取$L = 0$得

$$2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a \Delta_j f\|_p \leq C 2^{k(s-m+m_0)} 2^{j(m-m_0)}\|f'_j\|_p = C 2^{(k-j)(s-m+m_0)}\lambda_j.$$

而当$k > j$时, 记$L_0$为大于$s-m+m_0$的最小正整数, 在引理3中取$L = L_0$得

$$2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a \Delta_j f\|_p \leq C 2^{k(s-m+m_0)} 2^{(j-k)L_0} 2^{j(m-m_0)}\|f'_j\|_p = C 2^{(j-k)(L_0-s+m-m_0)}\lambda_j.$$

令$\delta = \min\{s-m+m_0, L_0-s+m-m_0\}$, 则由$s$的假设和$L_0$的定义知$\delta > 0$. 综合上面两个式子, 对所有$j,k \geq 1$我们有

$$2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a \Delta_j f\|_p \leq C 2^{-|j-k|\delta}\lambda_j. \tag{3.8}$$

利用同样的计算和引理1有

$$2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a S_0 f\|_p \leq C 2^{-k\delta}\|S_0 f\|_p. \tag{3.9}$$

为方便起见, 当$j \leq 0$时不妨令$\lambda_j = 0$, 根据(3.8), (3.9)和Minkovsky不等式我们有

$$\begin{aligned}
\|T_a f\|_{B^{s-m+m_0}_{p,q}} &= \|S_0 T_a f\|_p + \left(\sum_{k=1}^\infty (2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|S_0 f\|_p + \left(\sum_{k=1}^\infty (2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a S_0 f\|_p + \sum_{j=1}^\infty 2^{k(s-m+m_0)}\|\Delta_k T_a \Delta_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|S_0 f\|_p + C\left(\sum_{k=1}^\infty (2^{-k\delta}\|S_0 f\|_p + \sum_{j=1}^\infty 2^{-|j-k|\delta}\lambda_j)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\left(\|S_0 f\|_p + \left(\sum_{k=1}^\infty (\sum_{j=-\infty}^\infty 2^{-|j|\delta}\lambda_{k-j})^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq C\left(\|S_0 f\|_p + \sum_{j=-\infty}^\infty 2^{-|j|\delta}(\sum_{k=1}^\infty \lambda_{k-j}^q)^{\frac{1}{q}}\right) = C\left(\|S_0 f\|_p + \sum_{j=-\infty}^\infty 2^{-|j|\delta}(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^q)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\left(\|S_0 f\|_p + \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-|j|\delta}(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{ks}\|(\Delta_{k-1}+\Delta_k+\Delta_{k+1})f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$\leq \quad C\left(\|S_0 f\|_p + (\sum_{k=1}^{\infty}(2^{ks}\|\Delta_k f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}}\right) \leq C\|f\|_{B^s_{p,q}}.$$

故这个定理证毕. □

## 4. 总结

从Stein [8] P. 253, Proposition 6中获得启发, 本文以Littlewood-Paley分解为工具, 研究了拟微分算子在一定条件下Besov空间上有界性. 今后, 我们研究的内容是将本文的结果推广到傅里叶积分算子在Besov空间上的有界性.

## 参考文献


[1] Hörmander, L. (1965) Pseudo-Differential Operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **18**, 501-517. https://doi.org/10.1002/cpa.3160180307

[2] Kohn, J.J. and Nirenberg, L. (1965) An Algebra of Pseudo-Differential Operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **18**, 269-305. https://doi.org/10.1002/cpa.3160180121

[3] Hörmander, L. (1967) Pseudo-Differential Operators and Hypoelliptic Equations. In: Calderón, A.P., Ed., *Singular Integrals. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 10*, AMS, Providence, RI, 138-183.

[4] Hörmander, L. (1971) On the $L^2$ Continuity of Pseudo-Differential Operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **24**, 529-535. https://doi.org/10.1002/cpa.3160240406

[5] Hounie, J. (1986) On the $L^2$-Continuity of Pseudo-Differential Operators. *Communications in Partial Differential Equations*, **11**, 765-778. https://doi.org/10.1080/03605308608820444

[6] Rodino, L. (1976) On the Boundedness of Pseudo Differential Operators in the Class $L^m_{\rho,1}$. *Proceedings of the AMS*, **58**, 211-215. https://doi.org/10.2307/2041387

[7] Ching, C.H. (1972) Pseudo-Differential Operators with Nonregular Symbols. *Journal of Differential Equations*, **11**, 436-447. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90057-5

[8] Stein, E.M. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals (PMS-43). Princeton University Press, Princeton, NJ.

[9] Álvarez, J. and Hounie, J. (1990) Estimates for the Kernel and Continuity Properties of Pseudo-Differential Operators. *Arkiv Matematik*, **28**, 1-22. https://doi.org/10.1007/BF02387364

[10] Guo, J. and Zhu, X. (2022) Some Notes on Endpoint Estimates for Pseudo-Differential Operators. https://arxiv.org/abs/2201.10724

[11] Kenig, C.E. and Staubach, W. (2007) Ψ-Pseudodifferential Operators and Estimates for Maximal Oscillatory Integrals. *Studia Mathematica*, **183**, 249-258.
https://doi.org/10.4064/sm183-3-3