Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 1068-1076
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123108

可积函数Hölder不等式的等价不等式

沈诗雨，张盛婕，张文彬

常熟理工学院，数学与统计学院，江苏 常熟

收稿日期：2023年2月15日；录用日期：2023年3月11日；发布日期：2023年3月20日

摘 要

Hölder不等式在分析学和初等不等式理论中扮演着极其重要的角色。作为相关研究的一个重要方面，它与其它不等式之间的等价关系的研究也越来越受到重视。本文证明了测度空间上积分形式的Hölder不等式与算术平均-几何平均不等式，以及它与幂平均不等式之间的等价关系。这些结果极大地推广了李勇涛等最近建立的离散不等式等价关系。

关键词

Hölder不等式，算术平均-几何平均不等式，幂平均不等式，等价性

Equivalent Inequalities of the Hölder Inequality for Integrable Functions

Shiyu Shen, Shengjie Zhang, Wenbin Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changshu Institute of Technology, Changshu Jiangsu

Received: Feb. 15^{th}, 2023; accepted: Mar. 11^{th}, 2023; published: Mar. 20^{th}, 2023

Abstract

Hölder inequality plays an extremely important role in analysis and elementary inequality theory. As an important aspect of related research, the study of its equiva-

文章引用: 沈诗雨, 张盛婕, 张文彬. 可积函数Hölder不等式的等价不等式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1068-1076.
DOI: 10.12677/aam.2023.123108

lence relationship with other inequalities has also received increasing attention. This paper proves the Hölder inequality and the AM-GM inequality in measure space, and its equivalence relationship with the power mean inequality. These results generalize the discrete inequality equivalence relationship recently established by Li *etal*.

Keywords

Hölder Inequality, AM-GM Inequality, Power Average Inequality, Equivalence

1. 引言

在经典分析领域中加权算术平均-几何平均不等式 [1]通常是从Jensen不等式推断出来的, 与算术平均-几何平均不等式相比, Jensen不等式是一个更广义的不等式。此外, 由Leonard James Rogers发现并由Otto Hölder 独立发现的Hölder不等式 [2]是研究积分和L_p空间的一个基本且不可或缺的不等式也是Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式 [3]的推广。Hölder不等式用于证明Minkowski 不等式, 这是$L_p(\mu)$ 空间 [4,5]中的三角形不等式。序列$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$的加权幂平均(也称为广义平均), $M(a)$ 被定义为$M_r^m(a) = m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{1}{r}}$, 这是一个集合的函数族, 在分析不等式中起着至关重要的作用 [2–6]。

近年来，许多研究人员对研究一些著名的分析不等式之间的数学等价性感兴趣, 如Cauchy－Schwarz不等式, Bernoulli不等式, Wielandt 不等式和Minkowski 不等式, 详见 [7–13]。此外, 这些研究注意到加权算术平均-几何平均不等式, Hölder不等式和加权幂平均不等式之间的关系仍然不太清楚, 尽管一个不等式通常有助于证明另一个不等式 [1,12], 在上述研究的激励下, 详细证明了这三个著名不等式之间的数学等价性; [15]中引入的结果也得到了推广。

定理A 令$0 \le a_i, b_i \in \mathbb{R}(i = 1, \cdots, n)$, $p, q \in \mathbb{R}$, 且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 如果$0 \le c_i \in \mathbb{R}(i = 1, \cdots, n)$ 并且$0 \le \lambda_i \in \mathbb{R}(i = 1, \cdots, n)$, 有$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$, 则以下不等式相互等价

离散*Hölder*不等式:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

离散加权*AM-GM*不等式：

$$\prod_{k=1}^{n} c_k^{\lambda_k} \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k. \tag{2}$$

离散加权幂平均不等式： 若$0 \le r \le s$, 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{3}$$

定理A表明离散形式的Hölder不等式与加权算术平均-几何平均不等式, 以及加权幂平均不等式是等价的。一个自然的问题是对连续形式的Hölder不等式, 其等价形式表现为怎样的不等式, 它们与不等式(2) 与(3)又有怎样联系? 本文回答了上述问题, 给出了"连续形式"的AM-GM 不等式和幂平均不等式, 并证明了它们与连续形式的Hölder不等式之间的等价性。特别地, 我们的结果是基于测度空间上的测度积分来展开的。

为叙述我们的结果, 需引进下列记号: 设(Ω, μ)为一测度空间, f, g 为(Ω, μ)上可积函数。记测度μ在Ω上的总质量为$|\mu|$。对$p \ge 1$, 我们定义f的L_p 范数$||f||_p$如下:

$$||f||_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \Omega.$$

我们的主要结果是:

定理 1.1 令$p, q > 1$, 且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 设$f, g$为测度空间$\Omega$上的可积函数, μ为Ω上的一个测度, $0 < r < s$, 则以下不等式相互等价。

***(i)Hölder*积分不等式：**

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu(x) \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4}$$

***(ii)AM-GM*不等式：**

$$\exp\left(\frac{1}{|\mu|}\int_{\Omega} \ln|f(x)| d\mu(x)\right) \le \frac{1}{|\mu|}\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x). \tag{5}$$

***(iii)*幂平均不等式：**

$$\left(\frac{1}{|\mu|}\int_{\Omega} |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{1}{|\mu|}\int_{\Omega} |f(x)|^s d\mu(x)\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{6}$$

显然, 在不等式(4)-(6)中, 若$\Omega = [a, b]$且f, g只在$x_i \in [a, b], i \in 1, 2, \cdots, n$上的非0 值, 则容易证明(4)-(6)对应(1)-(3)。基于此观察, 我们将(5)和(6)称为连续形式的AM-GM不等式和幂平均不等式。

2. 连续形式的Hölder不等式与算术平均-几何平均不等式的等价性

定理 2.1 连续形式的*Hölder*不等式(4)与连续*AM-GM*不等式(5)等价。

证明：

在Hölder不等式(4)中, 令

$$f = \frac{1}{|\mu|^{\frac{1}{p}}}|\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p}}, \quad g = \left(\frac{1}{|\mu|}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

则可得

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|d\mu(x) \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p}}d\mu(x)\right)^p. \tag{7}$$

在(7)中, 令$|\tilde{\tilde{f}}(x)| = |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p}}$, 则可得

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|d\mu(x) = \frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{\tilde{f}}(x)|d\mu(x). \tag{8}$$

对(8)式右边应用不等式(7), 我们有

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{\tilde{f}}(x)|^{\frac{1}{p}}d\mu(x) \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{\tilde{f}}(x)|^{\frac{1}{p^2}}d\mu(x)\right)^p. \tag{9}$$

合并(7), (8), (9)可有

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|d\mu(x) \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p}}d\mu(x)\right)^p \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p^2}}d\mu(x)\right)^{p^2}.$$

继续这个过程, 我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f|dx &\geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f|^{1/p}dx\right)^p \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f|^{\frac{1}{p^2}}dx\right)^{p^2} \\ &\geq \cdots \geq \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f|^{\frac{1}{p^n}}dx\right)^{p^n} \geq \cdots.\end{aligned}$$

特别地, 当n趋于无穷, 我们有

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|d\mu(x) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p^n}}d\mu(x)\right)^{p^n}. \tag{10}$$

接下来, 对(10)式求极限。我们令

$$A = \left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p^n}}d\mu(x)\right)^{p^n}.$$

考虑$\ln A$在$n \to \infty$时的极限, 即求

$$\lim_{n\to\infty} \ln A = \lim_{n\to\infty} p^n \ln\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p^n}} d\mu(x)\right). \tag{11}$$

我们将证明

$$\lim_{n\to\infty} p^n \ln\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^{\frac{1}{p^n}} d\mu(x)\right) = \frac{1}{|\mu|}\int_\Omega ln|\tilde{f}(x)|d\mu. \tag{12}$$

显然，若令$\frac{1}{p^n} = y$, 则$p^n = \frac{1}{y}$, 上式左边变为

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^y d\mu(x)\right)}{y}.$$

应用洛必达法则可得

$$\lim_{n\to\infty} \ln A = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega \ln|\tilde{f}(x)||\tilde{f}(x)|^y d\mu(x)}{\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^y d\mu(x)}.$$

$$= \frac{1}{|\mu|}\int_\Omega \ln|\tilde{f}(x)|d\mu(x).$$

这样就证明了(12)。

反过来，假设(5)成立，我们将证明(4)必然成立。

对于$\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], c_1, c_2 > 0$, 作为(5)式的一个离散情形, 我们有以下加权基本不等式

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \geq c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2}. \tag{13}$$

在(13)中令$\lambda_1 = \frac{1}{p}, \lambda_2 = \frac{1}{q}$, 以及

$$c_1 = |f(x)|^p \int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x);$$

$$c_2 = |g(x)|^q \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x),$$

可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}|f(x)|^p \int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) + \frac{1}{q}|g(x)|^q \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \\ &\geq |f(x)||g(x)| \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{14}$$

对(14)两边关于$d\mu$积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x)+\frac{1}{q}\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x)\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\\ &\quad\geq \left(\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu(x).\end{aligned}$$

此即

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu(x)\leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

证毕。 □

3. 测度空间上算术平均-几何平均不等式和幂平均不等式之间的等价性

定理 3.1 连续的AM-GM不等式(5)与连续幂平均不等式(6)等价。

证明：在(6)式中令$s=1$, r依次取$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$, 则可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|d\mu(x)&\geq\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^{\frac{1}{2}}d\mu(x)\right)^2\\ &\geq\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^{\frac{1}{3}}d\mu(x)\right)^3\\ &\geq\cdots\\ &\geq\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^{\frac{1}{n}}d\mu(x)\right)^n\\ &\geq\cdots.\end{aligned}\tag{15}$$

在上述不等式链中令$t=\frac{1}{n}$, 则当n趋于无穷时, t趋于0, 并且有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^{\frac{1}{n}}d\mu(x)\right)^n=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^t d\mu(x)\right)^{\frac{1}{t}}.$$

对右边求极限(再次应用洛必达法则), 可得

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|^t d\mu(x)\right)^{\frac{1}{t}}=\exp\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega \ln|f(x)|d\mu(x)\right).\tag{16}$$

合并(15)与(16), 我们有

$$\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega |f(x)|d\mu(x)\geq\exp\left(\frac{1}{|\mu|}\int_\Omega \ln|f(x)|d\mu(x)\right).$$

这样就得到了(5)。

DOI: 10.12677/aam.2023.123108

反过来, 假设(5)成立, 我们将证明(6)必然成立。

我们将仅仅需要(5)式以下的特殊情形：

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \geq c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2}. \tag{17}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], c_1, c_2 > 0.$

在(18)式中令$\lambda_1 = \frac{r}{s}, \lambda_2 = 1 - \frac{r}{s}$, 并且令

$$u_s(f) = \frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^s d\mu(x). \tag{18}$$

以及

$$c_1 = \frac{1}{|\mu|} |f(x)|^s u_s(f)^{-1}; \quad c_2 = \frac{1}{|\mu|}.$$

则有

$$\frac{r}{s} \frac{1}{|\mu|} |f(x)|^s u_s(f)^{-1} + \left(1 - \frac{r}{s}\right) \frac{1}{|\mu|} \geq \left(\frac{1}{|\mu|} |f(x)|^s u_s(f)^{-1}\right)^{\frac{r}{s}} \left(\frac{1}{|\mu|}\right)^{1-\frac{r}{s}}. \tag{19}$$

对(19)式两边关于$d\mu$积分, 由(18)式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x) u_s(f)^{-\frac{r}{s}} &\leq \frac{r}{s} \int_\Omega \frac{1}{|\mu|} |f(x)|^s u_s(f)^{-1} d\mu(x) + \left(1 - \frac{r}{s}\right) \int_\Omega \frac{1}{|\mu|} d\mu(x) \\ &= \frac{r}{s} + \left(1 - \frac{r}{s}\right) = 1.\end{aligned}$$

此即

$$\frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x) \left(\frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^s d\mu(x)\right)^{-\frac{r}{s}} \leq 1.$$

由此可得

$$\left(\frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{|\mu|} \int_\Omega |f(x)|^s d\mu(x)\right)^{\frac{1}{s}}.$$

证毕。 □

4. 总结

凸性是数学中一个基础而重要的研究课题。凸性相关不等式的优化形式和等价形式的应用是一个既初等而又不失前沿性的研究方向。凸性相关不等式的等价性在诸多前沿课题中有着深入而广泛的应用, 例如, Sobolev嵌入理论的优化与加强, 逆Sobolev不等式的建立等等。它在几何分析、泛函分析、概率统计等领域也有着重大意义。

本文研究了Hölder不等式与算术平均-几何平均不等式、幂平均不等式等重要不等式之间的等价性拓展到连续测度空间的可行性。我们的结果极大地推广了既有离散情形时的相关等价性, 在相关应用的可适配性上也将会更广泛、灵活。后续我们将继续研究凸性相关极值问题, 力求证明加强形式的加权几何平均-算术平均不等式, 并建立连续版本的加强幂平均不等式及其等价形式, 推动凸性相关不等式及其应用的研究。

基金项目

本项目获江苏省大学生创新创业训练项目资助, 项目编号：202210333019Z。

参考文献

[1] Abramovich, S., Mond, B. and Pečarić, J.E. (1997) Sharpening Jensen's Inequality and a Majorization Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **214**, 721-728. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5527

[2] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G. and Pólya, G. (1952) Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Dragomir, S.S. (2003) A Survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Type Discrete Inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **4**, Article 63.

[4] Beckenbach, E.F. and Bellman, R. (2012) Inequalities (Vol. 30). Springer Science & Business Media, Berlin.

[5] Mitrinovic, D.S. and Vasic, P.M. (1970) Analytic Inequalities (Vol. 1). Springer-Verlag, Berlin.

[6] Abramovich, S., Mond, B. and Pećarić, J.E. (1997) Sharpening Jensen's Inequality and a Majorization Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **214**, 721-728. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5527

[7] Fujii, M., Furuta, T., Nakamoto, R. and Takahashi, S.E. (1997) Operator Inequalities and Covariance in Noncommutative Probability. *Mathematica Japonicae*, **46**, 317-320.

[8] Li, Y.C. and Shaw, S.Y. (2006) A Proof of Hölder's Inequality Using the Cauchy-Schwarz Inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **7**, Article 62.

[9] Maligranda, L. (2001) Equivalence of the Hölder-Rogers and Minkowski Inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, **4**, 203-207. https://doi.org/10.7153/mia-04-18

[10] Maligranda, L. (2012) The AM-GM Inequality Is Equivalent to the Bernoulli Inequality. *The Mathematical Intelligencer*, **34**, 1-2. https://doi.org/10.1007/s00283-011-9266-8

[11] Zhang, F. (2001) Equivalence of the Wielandt Inequality and the Kantorovich Inequality. *Linear and Multilinear Algebra*, **48**, 275-279. https://doi.org/10.1080/03081080108818673

[12] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (1979) Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications (Vol. 143, pp. xx+-569). Academic Press, New York.

[13] Sitnik, S.M. (2010) Generalized Young and Cauchy-Bunyakowsky Inequalities with Applications: A Survey. arXiv preprint.

[14] Lin, M. (2012) The AM-GM Inequality and CBS Inequality Are Equivalent. *The Mathematical Intelligencer*, **34**, 6. https://doi.org/10.1007/s00283-012-9292-1

[15] Li, Y., Gu, X.M. and Zhao, J. (2018) The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality Is Equivalent to the Hölder Inequality. *Symmetry*, **10**, Article 380. https://doi.org/10.3390/sym10090380