

具有饱和发病率的害虫治理SI模型的动力学研究

周培, 蒋杉

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2023年2月21日; 录用日期: 2023年3月16日; 发布日期: 2023年3月23日

摘要

本文建立了一个具有饱和发生率的分段光滑SI害虫治理模型, 以此刻画只有当易感害虫数量达到经济阈值时才对其进行综合害虫治理的策略。利用Filippov系统定性分析理论, 分析了模型在不同阈值全局动力学, 得到地方病平衡点和伪平衡点的全局稳定性。研究表明, 在不同的经济阈值范围下, 增加染病害虫的投放量以及减少杀虫剂的使用量能避免害虫数量爆发, 可以为害虫治理提供策略和方法。

关键词

Filippov, 全局稳定, SI模型, 害虫治理

Dynamics of an SI Model for Pest Management with Saturated Morbidity

Pei Zhou, Shan Jiang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Feb. 21st, 2023; accepted: Mar. 16th, 2023; published: Mar. 23rd, 2023

Abstract

In this paper, a piecewise smooth SI pest control model with saturation incidence rate is established, in order to draw the management strategy of chemical control only when the number of susceptible pests reaches the economic threshold. Using the qualitative analysis theory of Filippov system, the global dynamics of the model in different thresholds and parameter ranges are analyzed, and the global stability of endemic equilibrium and pseudo equilibrium is obtained. Particularly, when the parameters and thresholds are properly selected, the two endemic equilibrium points will be bi-stable. The research shows that increasing or decreasing the dosage of pesticides can effectively control the number of pests and avoid economic losses under different economic threshold ranges.

Keywords

Filippov, Global Stability, SI Model, Pest Control

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2019年, 联合国经济和社会事务部发文表示世界人口在2030年预计增长到85亿左右, 在2050年将达到97亿 [1]. 为了保障日益增长的人口需求, 粮食生产面临巨大挑战. 害虫作为农作物的天敌, 给农作物的生产带来严重影响, 怎么样对害虫进行治理是人们一直关注的热点话题. 化学治理和生物治理是我们常用的方法, 但频繁地使用杀虫剂对人类健康和环境不利. 生物防治的方式通常是投放天敌, 传播疾病等. 例如, 文献 [2] 中提出了一种利用寄生蜂向农作物害虫传递致命病毒来保护作物的方法. 生物防治看似是对环境没有污染的有效方式, 但投放天敌可能会引来其他虫害, 且实验室培养带病虫害的成本较高, 所以也存在很大弊端.

为了解决单一控制措施带来的弊端, 对害虫进行治理时往往将这两种方式有机结合, 即综合害虫治理 (IPM) [3]. 当害虫数量超过经济阈值 (ET) 时, 采取措施, 使害虫数量在经济危害水平 (EIL) 以下, 这种方式不仅可以获得最佳的经济效益而且能减少因控制策略对环境带来的负面影响. 对

于IPM策略,许多学者建立了数学模型对害虫治理进行研究,如不连续控制的害虫治理 [4-6]、具有脉冲效应的生物数学模型等.

文章中在文献 [7]的基础上,假设疾病已在害虫中传播,将害虫分为易感害虫(S)和感染害虫(I).感染害虫不会对农作物造成影响,所以我们将易感害虫作为控制指标,一旦易感害虫数量达到ET,采取IPM措施.然而,文献 [8]中提出感染者与易感者的传播数量不可能一直与I成线性增长,由于感染害虫数量过多疾病传播次数将达到饱和.因此,本文将一个饱和发病率 $\frac{\beta I}{1+\alpha I}$ 考虑到Filippov病虫害治理模型中,对其进行动力学分析,探讨使得易感害虫数量低于ET的措施.

2. 模型介绍及预备知识

2.1. 害虫治理SI模型

本文建立具有饱和发病率的害虫防治模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - dS - \eta q_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon)I + \eta(p - q_2)I, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示易感害虫和染病害虫在 t 时刻的种群数量; r 表示易感害虫的出生率; β 表示传染率, d 和 ε 表示害虫的自然死亡率和因病死亡率; $\alpha > 0$ 为饱和参数, q_1 和 q_2 分别表示由于喷洒杀虫剂的作用使得易感害虫与染病害虫种群数量减少的比率; p 为染病害虫的释放速率.

$$\eta = \begin{cases} 0, S < ET, \\ 1, S > ET, \end{cases}$$

为控制函数, ET 为控制阈值.控制函数 η 表示当易感害虫数量大于 ET ,喷洒杀虫剂,当易感害虫数量低于 ET 时,不采取措施.令 $q = p - q_2$,同时假设 $r > d + q_1$.

令 $H(Z) = S(t) - ET, Z = (S, I)^T$.且

$$F_1(Z) = (f_{11}, f_{12})^T = \left[rS - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - dS, \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon)I \right]^T$$

$$F_2(Z) = (f_{21}, f_{22})^T = \left[rS - \frac{\beta S(t)I}{1+\alpha I} - dS - q_1 S, \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon)I - qI \right]^T$$

系统(2.1)可写成如下的Filippov系统

$$\dot{Z} = \begin{cases} F_1(Z), Z \in G_1 \\ F_2(Z), Z \in G_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $G_1 = \{Z \in R_+^2 : H(Z) < 0\}, G_2 = \{x \in R_+^2 : H(Z) > 0\}$.同时记 $\Sigma = \{Z \in R_+^2 : H(Z) = 0\}$ 为系统(2.1)的切换线.

由于向量场的不连续性,本文将讨论系统(1.1)Filippov意义下的解,其定义如下:

定义2.1. 若向量函数 $(S(t), I(t))$ 在 $[0, T]$ 的任意有界闭子区间 (t_1, t_2) 上绝对连续 $(0 < T < +\infty)$, 满足初始条件 $S(0) = S_0$ 和 $I(0) = I_0$, 且存在可测函数 $\lambda = \lambda(t) : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ 使得对几乎所有的 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - dS - \gamma q_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon)I + \gamma q I, \end{cases} \quad (2.3)$$

那么称向量函数 $(S(t), I(t))$ 是系统((2.1))过初始值 (S_0, I_0) 的解.

定义2.2. Filippov系统(2.1)平衡点 [9]

- 1) 若 $F_1(Z^*) = 0, H(Z^*) < 0$ 或 $F_2(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$ 成立, 则 Z^* 为实平衡点;
- 2) 若 $F_1(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$ 或 $F_2(Z^*) = 0, H(Z^*) < 0$ 成立, 则 Z^* 为虚平衡点;
- 3) 若 $\lambda F_1(Z^*) + (1 - \lambda)F_2(Z^*) = 0, H(Z^*) = 0$, 则称 Z_* 为伪平衡点, 其中

$$\lambda(Z) = \frac{\langle H_Z, F_2 \rangle}{\langle H_Z, F_2 - F_1 \rangle}.$$

2.2. 子系统动力学分析

在这一部分, 主要分析了两个子系统的动力学行为.

对于子系统 S^1 , 其基本再生数为 $R_1 = \frac{\beta}{\alpha(r-d)}$. 子系统 S^1 存在一个零平衡点 $E_0 = (0, 0)$, 由Jacobian行列式可得 E_0 为鞍点. 当 $R_1 > 1$ 时, 存在一个地方病平衡点 $E_1 = (S_1, I_1) = \left(\frac{d+\varepsilon}{\beta-\alpha(r-d)}, \frac{r-d}{\beta-\alpha(r-d)} \right)$. 相应地, 对于子系统 S^2 , 其基本再生数为 $R_2 = \frac{\beta}{\alpha(r-d-q_1)}$, 存在一个无病平衡点 $E_0 = (0, 0)$, E_0 为鞍点. 当 $R_2 > 1$ 时, 存在地方病平衡点 $E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{d+\varepsilon-q}{\beta-\alpha(r-d-q_1)}, \frac{r-d-q_1}{\beta-\alpha(r-d-q_1)} \right)$.

命题2.3. 如果 $R_1 > 1$, 子系统 S^1 在 G_1 区域存在唯一渐近稳定的地方病平衡点 E_1 ; 如果 $R_2 > 1$, 子系统 S^2 在 G_2 区域存在唯一渐近稳定的地方病平衡点 E_2 .

证明. 将子系统 S^1 改写成

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{-\beta(I-I_1)S}{(1+\alpha I)(1+\alpha I_1)} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta(S-S_1)I + \alpha\beta I I_1(S-S_1) - \alpha\beta I S_1(I-I_1)}{(1+\alpha I)(1+\alpha I_1)} \end{cases}$$

考虑李雅普诺夫函数

$$V_1 = (1 + \alpha I_1) \left(S - S_1 - S_1 \ln \frac{S}{S_1} \right) + \left(I - I_1 - I_1 \ln \frac{I}{I_1} \right).$$

得到 $\frac{dV_1}{dt} = -\alpha\beta(I - I_1)^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha I_1)(1+\alpha I)} \right) \leq 0$. 根据Lasalla不变原理, 可得 E_1 在 G_1 区域全局渐近稳定.

类似地, 考虑李雅普诺夫函数

$$V_2 = (1 + \alpha I_2) \left(S - S_2 - S_2 \ln \frac{S}{S_2} \right) + \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right)$$

由 $\frac{dV_2}{dt} = -\alpha\beta(I - I_2)^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha I_2)(1+\alpha I)} \right) \leq 0$, 可得 E_2 在 G_2 区域全局渐近稳定. \square

3. 滑模动力学分析

根据滑模域的定义,我们可以得到 $\Sigma_s = \{x \in \Sigma | \langle H_z, F_1(x) \rangle > 0, \langle H_z, F_1(x) \rangle < 0\}$ 即

$$\langle H_z, F_1(x) \rangle > 0 \Rightarrow I < I_1$$

$$\langle H_z, F_2(x) \rangle < 0 \Rightarrow I > I_2$$

且 $I_2 < I_1$,可得 $\Sigma_s = \{x \in \Sigma | I_2 < I < I_1, S = ET\}$

由Filippov凸方法可得系统(2.1)沿 Σ_s 的滑模方程为

$$\dot{I} = \frac{\beta ET}{1 + \alpha I} I - \frac{q\beta}{q_1(1 + \alpha I)} I^2 - \frac{q_1(d + \varepsilon) - q(r - d)}{q_1} I = g(I). \quad (3.1)$$

令 $\xi = q_1(d + \varepsilon) + q_2(r - d)$. 设 $\dot{I} = 0$,表示 $g(I) = 0$, 它相当于

$$\varphi(I) = -(q\beta + \alpha\xi)I^2 + (q_1\beta ET - \xi)I = 0 \quad (3.2)$$

因此,等式(3.2)有两个根

$$I^{(1)} = 0, I^{(2)} = \frac{\xi - q_1\beta ET}{q_2\beta - \alpha\xi}$$

那么系统可能存在一个伪平衡点 $E_p = [ET, I^{(2)}]$.

下面我们得到 $I^{(2)} \in [I_2, I_1]$ 的充要条件:

$$\varphi(I_1) = \frac{\beta q_1(r-d)[ET(\beta - \alpha(r-d) - \varepsilon - d)]}{[\beta - \alpha(r-d)]^2} = \beta q_1 I_1 (ET - S_1),$$

$$\varphi(I_2) = \frac{\beta q_1(r-d-q_1)[ET(\beta - \alpha(r-d-q_1) - \varepsilon - d + q)]}{[\beta - \alpha(r-d-q_1)]^2} = \beta q_1 I_2 (ET - S_2).$$

如果 $S_2 < ET < S_1$ 时,可得 $\varphi(I_1) < 0, \varphi(I_2) > 0$,由零点存在定理可知 $I^{(2)} \in [I_2, I_1]$,伪平衡点 E_p 存在.然后,我们可以得到

$$\dot{g}(I^{(2)}) = -\frac{(\beta ET q_1 - \xi)(\beta q + \alpha\xi)}{\beta q_1(q + \alpha ET q_1)} < 0.$$

4. 全局动力学分析

为了保证系统中存在正平衡点的存在性,我们假设 $R_1 > 1$.本节将分析Filippov的全局动力学,首先排除所有可能的极限环,然后再将平衡点的实虚和局部稳定性相结合,可以在理论和数值模拟上得到系统的全局动力学.由于ET取值的不同,所有可能的平衡点的存在性和稳定性也不同,所以分下列三种情况进行讨论.在得到系统的全局稳定性前,我们先排除系统存在的极限环.

引理4.1. 系统(2.1)不存在包含部分滑模段 Σ_s 的极限环.

证明. 当 $S_2 < ET < S_1$ 时,伪平衡点 E_p 存在且局部渐近稳定,这表明从 G_i 出发的轨线到达滑模段 $I_1 I_2$ 后趋向伪平衡点 E_p .此时,系统内不存在包含部分滑模段的极限环.

当 $ET > S_1$ 时, 存在实平衡点 E_1 . 假设存在包含部分滑模段 Σ_s 的极限环 Γ , 轨线 Γ 经过切点 (ET, I_1) 并且再次到达 Σ_s , 如图 1(a) 所示. 这与定理 3.1 中 E_1 全局渐近稳定相矛盾, 所以从切点 (ET, I_1) 出发的轨线不会到达 Σ_s , 即不存在包含部分滑模段的极限环. 我们也可以用类似的方法证明若 $ET < S_2$ 时不存在极限环. \square

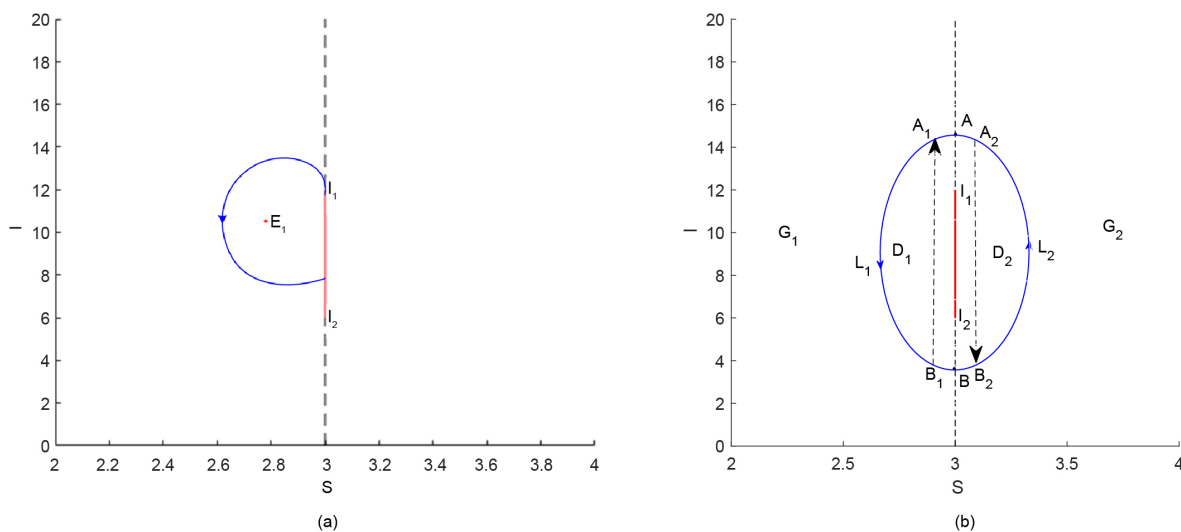


Figure 1. Schematic diagram of excluding limit cycle

图 1. 排除环示意图

引理 4.2. 系统 (2.1) 不存在环绕滑模段 Σ_s 的极限环.

证明. 假设存在一个环绕滑模段 $I_1 I_2$ 的极限环 L , 如图 1(b) 所示. 令 $L = L_1 + L_2$, 且 $L_i = L \cap G_i$. 极限环和直线 $S = ET - \epsilon, S = ET + \epsilon$ 在点 P_1, Q_1 与 P_2, Q_2 处相交. 令 ∂D_1 为线段 L_1 与 $B_1 A_1$ 所围成的区域 D_1 的边界, 令 ∂D_2 为线段 L_2 与 $A_2 B_2$ 所围成的区域 D_2 的边界. 同时, A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 的纵坐标分别为 $a, b, a - \delta_1(\epsilon), a - \delta_2(\epsilon), b + \delta_3(\epsilon), b + \delta_4(\epsilon)$, 并且满足 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_i(\epsilon) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$. 取 Dulac 函数 $B(SI) = \frac{1}{SI}$, 那么

$$\iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_{11})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{12})}{\partial I} \right] dSdI + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_{21})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{22})}{\partial I} \right] dSdI = \frac{-2\alpha}{(1 + \alpha I)^2} < 0 \quad (4.1)$$

在 D_1 中应用格林公式有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_{11})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{12})}{\partial I} \right] dSdI &= \oint_{\partial D_1 + \overrightarrow{B_1 A_1}} B(f_{11}dI - f_{12}dS) \\ &= \oint_{\partial D_1} B(f_{11}dI - f_{12}dS) + \int_{\overrightarrow{B_1 A_1}} Bf_{11}dI \\ &= \int_{\overrightarrow{B_1 A_1}} Bf_{11}dI \\ &= \int_{b+\delta_3(\epsilon)}^{a-\delta_1(\epsilon)} \left(\frac{r}{I} - \frac{\beta}{1 + \alpha I} - \frac{d}{I} \right) dI \end{aligned}$$

同样地,在 D_2 中应用格林公式有

$$\begin{aligned} & \iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_{21})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{22})}{\alpha I} \right] dSdI = \int_{\vec{A_2B_2}} Bf_{21} dI \\ & = \int_{a-\delta_2(\epsilon)}^{b+\delta_4(\epsilon)} \left(\frac{r}{I} - \frac{\beta}{1+\alpha I} - \frac{d}{I} - \frac{q_1}{I} \right) dI \end{aligned}$$

那么可得

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_{11})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{21})}{\partial I} \right] + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_{21})}{\partial S} + \frac{\partial(Bf_{22})}{\alpha I} \right] \right) dSdI \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{b+\delta_3(\epsilon)}^{a-\delta_1(\epsilon)} \left(\frac{r}{I} - \frac{\beta}{1+\alpha I} - \frac{d}{I} \right) dI + \int_{a-\delta_2(\epsilon)}^{b+\delta_4(\epsilon)} \left(\frac{r}{I} - \frac{\beta}{1+\alpha I} - \frac{d}{I} - \frac{q}{I} \right) dI \right). \\ & = \int_b^a \frac{q}{I} dI > 0. \end{aligned}$$

这与(4.1)出现矛盾.因此,不存在环绕滑模段 I_1I_2 的极限环. \square

情形1.1 当 $S_2 < S_1 < ET$ 时,地方病平衡点 E_1 为实平衡点, E_2 为虚平衡点.在得到系统的全局稳定性前,我们先排除系统存在的极限环.

定理4.3. 如果 $S_2 < S_1 < ET$,实平衡点 E_1 全局渐近稳定.

证明. 当 $S_2 < S_1 < ET$ 时, E_1 为实平衡点, E_2 为虚平衡点.又由式(3.1)的性质可知 $g(I_1) > 0, g(I_2) > 0$,所以 $[I_2, I_1]$ 上, $g(I) > 0$,这说明此时不存在伪平衡点,且滑模段上的轨线方向从下往上.由引理(4.1)与(4.2)可知系统(2.1)不存在极限环.因此,在 G_2 中的轨线无论是否切中滑模段最终趋于 G_1 ,而 G_1 中的轨线将趋向于 E_1 ,由命题(2.3)可知 E_1 全局渐近稳定.所以无论初始位置如何,轨线最终都会稳定到 E_1 ,所以 E_1 全局渐近稳定如图2(a))所示. \square

情形1.2当 $S_2 < ET < S_1$ 时, E_1 和 E_2 都为虚平衡点.

定理4.4. 如果 $S_2 < ET < S_1$,伪平衡点 E_p 全局渐近稳定.

证明. 当 $S_2 < ET < S_1$ 时, E_1 和 E_2 都为虚平衡点,由式(3.1)的性质可知 $g(I_1) < 0, g(I_2) > 0$,所以在 $[I_2, I_1]$ 上存在唯一的零点,也就是说伪平衡点 E_p 存在且局部渐近稳定.在这种情况下,可知 E_1 位于 G_2 区域, E_2 位于 G_1 区域,所以轨线都趋向相反区域以达到自身平衡,又因为 E_p 局部渐近稳定,且由引理(4.1)与(4.2)可知不存在极限环.所以所有轨线最终都会击中滑模段并收敛到伪平衡点,因此可知伪平衡点 E_p 全局渐近稳定,如图2(b))所示. \square

情形1.3当 $ET < S_2 < S_1$ 时,存在实平衡点 E_2 ,虚平衡点 E_1 .可得以下结论,其证明过程类似于定理(4.5),轨线图像如图2(c))所示.

定理4.5. 如果 $ET < S_2 < S_1$,实平衡点 E_2 全局渐近稳定.

5. 生物学意义

本文以Filippov动力学系统为基础,建立了具有饱和发生率的害虫治理SI模型,对其进行系统分析,并指出化学防治和生物防治对害虫治理的作用.研究得出,当 $R_2 < 1$ 时,只有无病平衡点 E_0 存

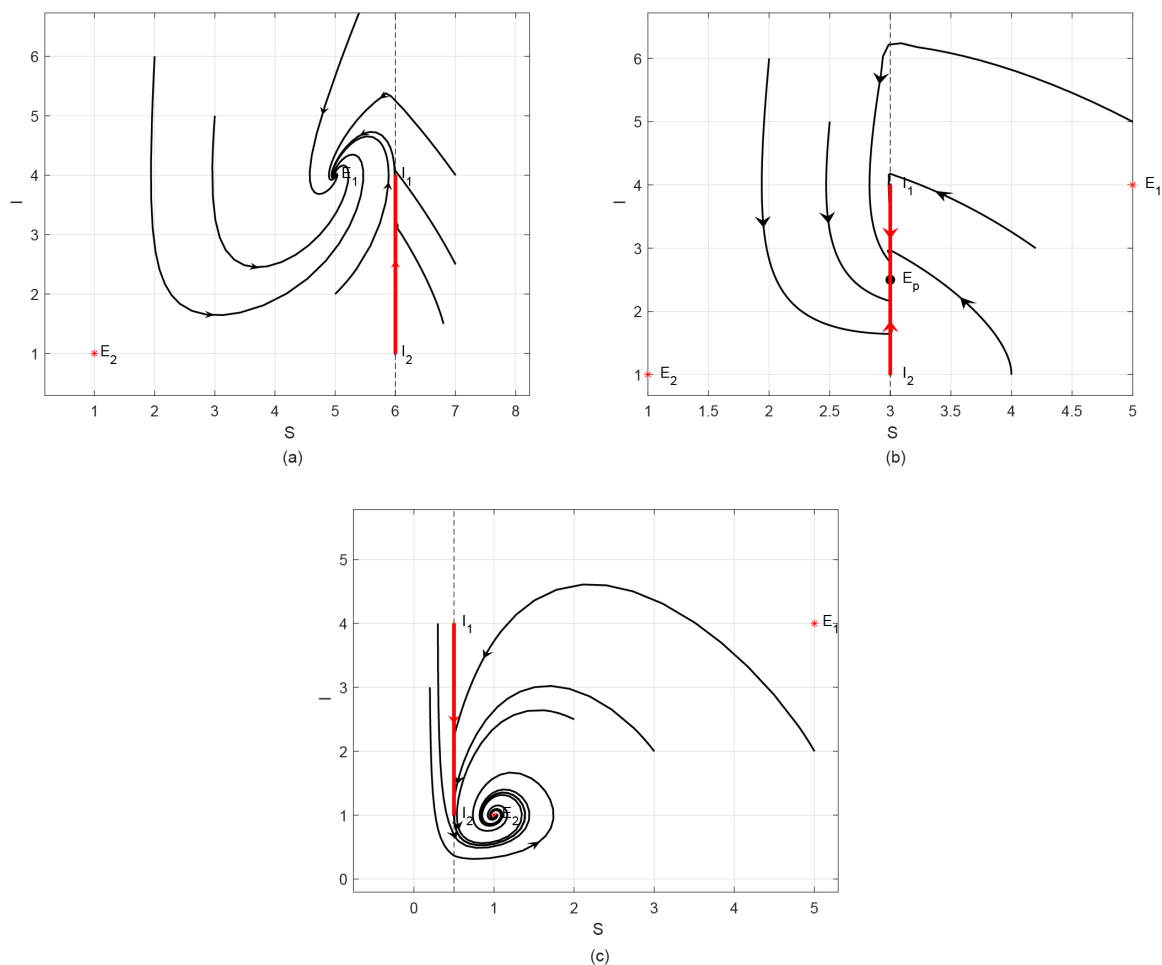


Figure 2. The system (2.1) is globally asymptotically stable in three cases: (a) $ET = 6$, (b) $ET = 3$ and (c) $ET = 0.5$. Other parameters are $r = 0.7$, $d = 0.3$, $q_1 = 0.2$, $q = 0.3$, $\beta = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.5$

图 2. 系统(2.1)分别在(a) $ET = 6$, (b) $ET = 3$, (c) $ET = 0.5$ 三种情况下的全局渐近稳定相图, 其他参数为 $r = 0.7$, $d = 0.3$, $q_1 = 0.2$, $q = 0.3$, $\beta = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.5$

在,且 E_0 为鞍点,这说明害虫不太可能走向灭绝. 在 $R_1 > 1$ 的前提下,第四章中对地方病平衡点和伪平衡点的全局稳定性进行了分析.当 $S_2 < S_1 < ET$ 或者 $S_2 < ET < S_1$ 时,地方病平衡点 E_1 或伪平衡点 E_p 全局渐近稳定,此时易感害虫的数量稳定在阈值 ET 以下或者稳定在 ET 处,能够避免害虫数量的爆发.也就是说控制可控参数 q ,增加染病害虫的投放量以及减少杀虫剂的使用量使得 $\frac{d+\varepsilon-q}{\beta-\alpha(r-d)} < ET$ 能避免害虫数量爆发对经济造成损失,可以为害虫治理提供策略和方法.

参考文献

- [1] United Nations (2019) World Population Prospects 2019: Highlights. United Nations Department for Economic and Social Affairs, New York.
- [2] Peng, H. (2005) Wasps Deliver Deadly Virus to Crop Pests. *Virus Research*, **114**, 80-81.

- [3] Costa, M.I. (2010) Integrated Pest Management: Theoretical Insights from a Threshold Policy. *Neotropical Entomology*, **39**, 1-8. <https://doi.org/10.1590/S1519-566X2010000100001>
- [4] Tang, S., Liang, J., Xiao, Y., *et al.* (2012) Sliding Bifurcations of Filippov Two Stage Pest Control Models with Economic Thresholds. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 1061-1080. <https://doi.org/10.1137/110847020>
- [5] Liu, L., Xiang, C., Tang, G., *et al.* (2019) Sliding Dynamics of a Filippov Forest-Pest Model with Threshold Policy Control. *Complexity*, **2019**, Article ID: 2371838. <https://doi.org/10.1155/2019/2371838>
- [6] Qin, W., Tan, X., Tosato, M., *et al.* (2019) Threshold Control Strategy for a Non-Smooth Filippov Ecosystem with Group Defense. *Applied Mathematics and Computation*, **362**, Article ID: 124532. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.046>
- [7] Liu, B., Liu, W., Tao, F., *et al.* (2015) A Dynamical Analysis of a Piecewise Smooth Pest Control SI Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**, Article ID: 1550068. <https://doi.org/10.1142/S0218127415500686>
- [8] Capasso, V. and Serio, G. (1978) A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, **42**, 43-61. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(78\)90006-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90006-8)
- [9] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.