Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 860-872
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123088

分红率有界下带借贷利率的经典模型的最优分红与注资问题

刘　月

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2023年2月8日；录用日期：2023年3月4日；发布日期：2023年3月13日

摘　要

本文研究了在分红率有界的情况下，带借贷利率的经典风险模型中最优分红与注资问题。目标是最大化绝对破产前的累计折现分红与注资成本之差，首先给出值函数和可行策略的性质，然后得到了动态规划原理和验证定理。

关键词

分红与注资，借贷利率，经典风险模型

Optimal Dividend and Capital Injection Problems for Classical Models with Debit Interest: The Case of Bounded Dividend Rates

Yue Liu

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Feb. 8th, 2023; accepted: Mar. 4th, 2023; published: Mar. 13th, 2023

Abstract

In this paper, we study the optimal dividend and capital injection problem of the classical risk model with interest rate. Our objective is to find a dividend and capital injection policy that maximizes the difference between the cumulative expected discounted dividend pay-outs and the cu-

文章引用：刘月．分红率有界下带借贷利率的经典模型的最优分红与注资问题[J]．应用数学进展, 2023, 12(3): 860-872.
DOI: 10.12677/aam.2023.123088

mulative expected discounted capital injection until the time of absolute bankruptcy. Firstly, we show the basic properties of the value function and admissible strategies. Then we get the dynamic programming principles and verification theorem.

Keywords

Dividend and Capital Injection, Debit Interest, Classic Risk Model

1. 引言

分红问题最早由 De Finetti (1957) [1]提出，他提出用直到破产的最大累计分红量来度量保险公司的表现，他研究了一类简单离散时间的随机游动并证明最优分红策略为障碍策略。Gerber (1969)首次通过一个相关离散问题的极限研究了经典风险模型中的最优分红问题，并证明了最优策略为波段策略。关于对分红问题的综述文献，我们可以参考 Schmidli (2008) [2]和 Avanzi (2009) [3]。

分红理论中首先出现的是障碍策略，即当公司盈余水平低于分红界线时，不进行分红，但当盈余超过分红界线时将超过的盈余全部进行分红。一旦障碍分红策略被应用，保险公司的最终破产概率就是 1。因此，很多学者为了减小破产概率，给分红率设置了一个上限，继而讨论分红率有界的最优分红问题。

对分红率有界的研究中，Jeanblanc-Picque 和 Shiryaev (1995) [4]以及 Asmussen 和 Taksar (1997) [5]考虑了布朗运动模型中的分红策略，证明了最优策略是阈值策略，即一旦盈余超过一定的门槛水平，就应该以最大允许的分红率分红。Gerber 和 Shiu (2006) [6]将布朗运动模型推广到了经典风险模型，证明当索赔额分布为指数时，得到的最优分红策略是阈值策略。Azcue 和 Muler (2012) [7]运用粘性解的方法也研究了经典模型下的最优分红问题，将最优值函数刻画为关联 HJB 方程的最小粘性解，并证明了使预期折现分红最大化的最优分红策略是波段策略。Xu 和 Woo (2020) [8]用粘性解的方法，研究了经典风险模型中的最优分红与注资问题。Liu 等人(2020) [9]对经典风险模型进行了推广，考虑了在 Sparre Andersen 风险模型下的最优分红问题，并给出了一种迭代算法来逼近最优值函数和最优分红策略。

在经典风险模型中，一旦盈余小于零我们就说破产发生。但实际上，我们可以对模型进行推广，在经典风险模型的基础上考虑借贷，当盈余水平为负时，保险公司可以按照一定利率向银行贷款来维持继续运营，同时利用保费收入继续偿还债务，这样就有可能度过难关从而重新获利。由这一想法得出了带借贷利率的经典风险模型和绝对破产的概念。Gerber (1971)首先在经典风险模型引入了在借贷利率中的绝对破产概率。关于带借贷利率的保险风险模型的研究，可以参见 Dassios 和 Embrechts (1989) [10]，Embrechts 和 Schmidli (1994) [11]，Zhou 和 Zhang (2005) [12]，Cai (2007) [13]，Yin and Wang (2010)。

另一方面，为了克服 de Finetti 的最优分红问题中几乎肯定会出现破产的情况，恢复资本的一个更现实的选择是注资。对于注资的研究，Pafumi (1998)考虑一旦公司余额降到零就对公司注入必要的资金以使公司继续运行，Dickson 和 Waters (2004) [14]引入了当盈余低于零时股东进行注资的方法，即股东注入资金使得公司的盈余恢复到零点，从而公司可以继续经营，参见 Gerber 等人(2006) [15]。因此，注资策略提供了可以令公司保持良性运营的手段。Scheer 和 Schmidli (2011) [16]考虑了在经典风险模型中注资和管理成本的最优分红问题，他们证明了只有当盈余降至零以下时才会进行注资，在这种情况下，通过求

解相关的方程得到最优分红策略是波段策略。Jin 等人(2017) [17]利用马尔可夫链近似技术，研究了经典风险模型下的注资和交易成本的最优分红策略的数值结果。

本文假设在分红率有界的情况下，保险公司的盈余在低于零时并不会破产，而是可以选择向银行贷款，从而我们把保险公司的盈余过程看作是带借贷利率的经典风险模型，研究加入分红和注资两个控制之后的最优分红与注资问题。本文严格推导了值函数满足的动态规划原理，得到相应的 HJB 方程并证明了值函数是 HJB 方程的几乎处处解及验证定理。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们描述了模型和必要的假设。在第 3 节中，证明了值函数的一些基本性质并给出了可行策略的刻画，为寻找值函数和最优分红策略提供理论基础。在第 4 节，给出动态规划原理和值函数满足的 HJB 方程，证明了相应的验证定理，本节给出的动态规划原理及其证明与通常形式稍有不同，将绝对破产时刻 τ^{π} 换成了第一次索赔到达时刻 τ_1，但本质上是相同的。

2. 模型介绍

带借贷利率的经典风险模型盈余过程为：

$$X_t = x + \int_0^t \left(c + \beta X_s \mathbf{1}_{\{X_s<0\}} \right) \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{1}$$

其中，x 是初始余额，$c>0$ 是保费收入率。$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ 为复合泊松过程，表示直到时刻 t 的累计索赔额。$\{N_t\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，代表截止到 t 时刻索赔发生的次数，Y_i 表示第 i 次的索赔额大小，该索赔额序列 $\{Y_i\}$ 不仅独立同分布，且具有共同的分布函数 F 和有限的期望值 μ。$\{N_t\}$ 与 $\{Y_i\}$ 相互独立。我们记 τ_i 为第 i 次索赔发生时刻。

当盈余水平为负时，保险公司可以按照利率 β 向银行贷款继续运营，同时用保费收入继续偿还债务，其中，$\beta>0$ 是借贷利率。假设公司的还款是连续动态的，当 $X_t<0$，公司需要贷款 $|X_t|$ 来弥补赤字，假设在 $(t,t+\Delta]$ 内无索赔发生，则公司的盈余满足：

$$X_{t+\Delta} = X_t + c\Delta + X_t\left(\mathrm{e}^{\beta\Delta t} - 1\right)$$

其中 $X_{t+\Delta}$ 是剩余赤字，$X_t\left(\mathrm{e}^{\beta\Delta t}-1\right)$ 是还贷支出。令 $\Delta t \to 0$，则 $X_t' = c + \beta X_t$。可见当负盈余达到或低于水平 $-\dfrac{c}{\beta}$ 时，盈余就永远不能再回到正的水平，因此 $-\dfrac{c}{\beta}$ 被称作绝对破产限，而当保险公司的盈余额等于或小于 $-\dfrac{c}{\beta}$ 时，称作绝对破产发生了。

令 L_t 为到时间 t 的累积分红量，C_t 表示截至时间 t 的累计注资量，称 $\pi = \{L_t, C_t\}$ 为控制策略。在给定控制策略 π 的情况下，受控盈余过程为：

$$X_t^{\pi} = x + \int_0^t \left(c + \beta X_s^{\pi} I_{\{X_s^{\pi}<0\}} \right) \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - L_t + C_t, \tag{2}$$

相应的绝对破产时刻为

$$\tau^{\pi} := \inf\left\{ t \ge 0 : X_t^{\pi} \le -\frac{c}{\beta} \right\}$$

$\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P}\right)$ 为完备的带流概率空间，其中，Ω 为 $\mathbb{R}_+$ 上具有左右极限的路径的集合，带借贷利率的经典风险模型盈余过程 $\{X_t\}$ 是定义其上的随机过程，$\{\mathcal{F}_t\}$ 为 $\{X_t\}$ 生成的 σ-代数流。一个控制策略 π 称作可行的，如果它满足如下条件：

1) 红过程$\{L_t\}$是$\{\mathcal{F}_t\}$-适应、非降、绝对连续过程：$L_t=\int_0^t u_s\mathrm{d}s$，其中分红率过程$u_t$满足$0\le u_t\le l_0$，而常数$l_0>0$为给定的分红率上界；

2) 注资过程$\{C_t\}$也是非降的，左连右极的，$\mathcal{F}_t$-适应的且$C_0=0$。

3) 当$0<t<\tau^{\pi}$时，$L_t\le X_t+C_t+\dfrac{c}{\beta}$，即分红不能导致绝对破产。

记Π_x是初始盈余为x的所有可行控制策略的集合。当分红密度$u_t\le u_0$时，在可行策略π下，预期累计贴现分红与预期贴现注资成本之差的期望为：

$$V_{\pi}(x):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right] \tag{3}$$

其中$\delta>0$为贴现因子，$k>1$是罚金因子，可理解为注资会产生比例交易费用。$\mathbb{E}_x$是$X_0=x$时的期望。

最优分红与注资问题所要寻找的值函数为

$$V(x):=\sup_{\pi\in\Pi_x}V_{\pi}(x), \tag{4}$$

其中，$x>-\dfrac{c}{\beta}$。约定当$x<-\dfrac{c}{\beta}$时，$V(x)=0$。

3. 值函数的基本性质和可行策略

3.1. 值函数的基本性质

引理 3.1.1：对$x>-\dfrac{c}{\beta}$，值函数$V(x)$满足：

1) 有界的并且$\lim\limits_{x\to\infty}V(x)=\dfrac{l_0}{\delta}$；

2) 是增的并且是局部 Lipschitz 连续的.满足

$$0\le V(y)-V(x)\le V(y)\left[1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0(x,y)}\right]$$

其中

$$t_0(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y-x}{c}, & y>x\ge 0;\\[2mm] \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{c}{c+\beta x}+\dfrac{y}{c}, & y>0>x>\dfrac{c}{\beta};\\[2mm] \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{c+\beta y}{c+\beta x}, & 0\ge y>x>\dfrac{c}{\beta}.\end{cases}$$

证明：1) 显然，$V(x)\le\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta t}l_0\mathrm{d}t=\dfrac{l_0}{\delta}$。并且$V(x)\ge\int_0^{\tau_1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\delta t}l_0\mathrm{d}t=\dfrac{\lambda l_0}{\lambda+\delta}>0$，

考虑一种可行策略$\hat{\pi}$是以l_0的利率支付股息且不注资时，绝对破产时间$\tau^{\hat{\pi}}$ 定义为：

$$\tau^{\hat{\pi}}=\inf\left\{t>0,x+\int_0^t\left(c+\beta X_s^{\hat{\pi}}\mathbf{1}_{\left\{X_s^{\hat{\pi}}<0\right\}}-l_0\right)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i<-\frac{c}{\beta}\right\}$$

则$V(x)\ge V_{\hat{\pi}}(x)=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^{\hat{\pi}}}\mathrm{e}^{-\delta s}l_0\mathrm{d}s\right]$，随着$x\to\infty$有$\tau^{\hat{\pi}}\to\infty$ a.s.，由控制收敛定理，上述方程的右端收敛到$\dfrac{l_0}{\delta}$，即$\lim\limits_{x\to\infty}V(x)\ge\dfrac{l_0}{\delta}$。结合前面得到的另一个不等式，得到$\lim\limits_{x\to\infty}V(x)=\dfrac{l_0}{\delta}$。

2) 显然，$V(x)$ 在 x 中是增的。下面证明值函数的局部 Lipschitz 连续性。

对任意 $\epsilon>0$，存在可行策略 $\bar{\pi}$，使得 $V_{\bar{\pi}}(y)\ge V(y)-\epsilon$。考虑如下定义策略 $\pi=\{L_t,C_t\}\in\Pi_x$：$\pi_t=\begin{cases}\bar{\pi}_{t-h}, & (t\wedge\tau_1)\ge t_0(x,y)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，对任意给定的可允许策略 $\bar{\pi}=\left(\overline{L_t},\overline{C_t}\right)\in\Pi_y$。我们得到

$$V(x)\ge V_\pi(x)\ge\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_1\ge t_0(x,y)\}}\mathrm{e}^{-\delta h(x,y)}V_{\bar{\pi}}(y)\right]\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0(x,y)}V_{\bar{\pi}}(y)\right]\ge\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0(x,y)}V(y)-\epsilon\text{。}$$

由 ϵ 的任意性，有

$$0\le V(y)-V(x)\le\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0(x,y)}\right)V(y)\text{。}$$

3.2. 可行策略

对任意 $x>-\dfrac{c}{\beta}$，设 $\mathbb{U}_x$ 为可测函数 $l=(\alpha,\gamma):\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+^2$ 的集合，满足：

1) $\alpha(\cdot)$ 是非降的，且存在可测函数 m，满足 $0\le m(s)\le u_0$ 使 $\alpha(t)=\int_0^t m(s)\mathrm{d}s$；

2) $\gamma(\cdot)$ 是非降、左连右极的函数且 $\gamma(0)=0$；

3) $\alpha(t)<x_t+\gamma(t)+-\dfrac{c}{\beta}$，其中 $x_t=x+\int_0^t\left(c+\beta x_s\mathbf{1}_{\{x_s<0\}}\right)\mathrm{d}s$。

引理 3.2.1：一个分红注资策略 $\{L_t,C_t\}$ 是可行的当且仅当，存在两个 $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$-可测的函数 $\alpha(x,t)$ 和 $\gamma(x,t)$ 对所有的 $x>-\dfrac{c}{\beta}$，$\alpha(x,\cdot)\in\mathbb{U}_x$，$\gamma(x,\cdot)\in\mathbb{V}_x$ 以及 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数 $\alpha^{(n)}=\alpha^{(n)}(\omega,t)$、$\gamma^{(n)}=\gamma^{(n)}(\omega,t)$ 对任意 $\omega\in\Omega$ 和 $n=1,2,\cdots$，使得 $\alpha^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{U}_{X_{\tau_n}^L}$，$\gamma^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{U}_{X_{\tau_n}^C}$，使得

$$L_t=\begin{cases}\alpha(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ L_{\tau_n}+\alpha^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{5}$$

$$C_t=\begin{cases}\gamma(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ C_{\tau_n}+\gamma^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{6}$$

证明：充分性由可行策略定义可知显然成立。我们只需要证明必要性，注意到 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是一个跳流，即对于 $t\in\mathbb{R}_+$，$n=0,1,\cdots$，

$$\mathcal{F}_t\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\}=\mathcal{F}_{\tau_n}\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\}$$

其中

$$\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\}\text{，}\quad\mathcal{F}_{\tau_n}=\sigma\{X_0;\tau_1,Y_1;\cdots;\tau_n,Y_n\}\text{，}\quad n=1,2,\cdots$$

对任意 $n=1,2,\cdots$，存在 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数 $\alpha^{(n)}=\alpha^{(n)}(\omega,t)$ 使得(5)式成立，存在 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数 $\gamma^{(n)}=\gamma^{(n)}(\omega,t)$ 使得(6)式成立。由 $\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\}$，根据 Doob 可测性定理可知，存在两个 $\mathcal{B}\left(-\dfrac{c}{\beta},+\infty\right)\times\mathbb{R}_+$-可测的函数 $\alpha(x,t)$，$\gamma(x,t)$ 使得 $L_t=\alpha(X_0,t)$，$C_t=\gamma(X_0,t)$ 对于 $t<\tau_1$。特别地，$\alpha(x,\cdot)\in\mathbb{U}_x$，$\gamma(x,\cdot)\in\mathbb{V}_x$。

4. 动态规划方程和验证定理

4.1. 动态规划方程

引理 4.1.1：(动态规划原理)对于任意的 $x>-\dfrac{c}{\beta}$ 和停时 T，有：

$$V(x)=\sup_{\pi\in\Pi_x}\mathbb{E}_x\left[\int_0^{T\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{T\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s+\mathrm{e}^{-\delta(T\wedge\tau_1)}V\left(X_{T\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] \tag{7}$$

证明：由于$\{\mathcal{F}_t\}$是一个跳流且$X_0=x$，对于给定的停时T存在固定时间$t\geq 0$，使得 $T\wedge\tau_1=t\wedge\tau_1$。所以将任意停时$T$替换为固定时间$t\geq 0$来证明该引理。

定义

$$V(x,t)=\sup_{\pi\in\Pi_x}\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] \tag{8}$$

首先证明$V(x)\leq V(x,t)$。对任意可行策略$\pi=\{L_s,C_s\}$，则

$$V_\pi(x)=\mathbb{E}_x\left(\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right)+\mathbb{E}_x\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right) \tag{9}$$

其中等式右边的第二项满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right)\\
&=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\mid X_{t\wedge\tau_1}^{\pi},t\wedge\tau_1\right)\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}_x\left[\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}u_s\mathrm{d}s-k\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}\mathrm{d}C_s\mid X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]\right]\\
&\leq\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right].
\end{aligned}$$

故$V_\pi(x)\leq V(x,t)$。由于可行策略π的任意性，$V(x)\leq V(x,t)$。

下面证明$V(x)\geq V(x,t)$。给定$\forall\varepsilon>0$取可行策略$\pi=\{L_s,C_s\}\in\Pi_x$使得

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]\geq V(x,t)-\frac{\varepsilon}{2}$$

V 在$\left(-\frac{c}{\beta},+\infty\right)$上是递增的并且是连续的，则可以找到递增序列$-\frac{c}{\beta}=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$，使得若$y\in[x_i,x_{i+1})$，有：

$$V(y)-V(x_i)<\frac{\varepsilon}{4} \tag{10}$$

对于$i=0,1,2,\cdots$成立。

取可行策略$\pi_i=\{L_s^i,C_s^i\}\in\Pi_{x_i}$，使得$V(x_i)-V_{\pi_i}(x_i)<\frac{\varepsilon}{4}$。

定义一个新策略$\overline{\pi}=\{\overline{L_s},\overline{C_s}\}$：

- 如果$\tau_1\leq t$并且$\tau_1=\tau^\pi$，令$\overline{\pi}=\pi$，$s\geq 0$.
- 如果$\tau_1\leq t$并且$\tau_1<\tau^\pi$或$\tau_1>t$，在$s\in\left(-\frac{c}{\beta},t\wedge\tau_1\right]$令$\overline{\pi}=\pi$；当$X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\in[x_i,x_{i+1})$时，在$s\in\left[t\wedge\tau_1^{\pi},\tau^{\pi_i}\right]$上令$\overline{\pi}=\pi_i$。

注意到对于$-\frac{c}{\beta}<x\leq y$，有$\Pi_x\subseteq\Pi_y$。由上述定义方法可知策略$\overline{\pi}$可行，若$X_t^{\overline{\pi}}\in[x_i,x_{i+1})$有

$$V_{\overline{\pi}}\left(X_t^{\overline{\pi}}\right)=V_{\pi_i}(x_i)\geq V(x_i)-\frac{\varepsilon}{4} \tag{11}$$

根据(10)和(11)有

$$V(x,t)-V_{\bar{\pi}}(x)\le \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}u_s\mathrm{d}s-k\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]-V_{\bar{\pi}}(x)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

再根据 ε 的任意性，有 $V(x,t)\le V_{\bar{\pi}}(x)+\varepsilon\le V(x)$。

综上可得 $V(x)=V(x,t)$。因此，动态规划原理成立。

4.2. 验证定理

定义作用在 $f(x)$ 上的算子

$$\mathcal{L}f(x)=\left(c+\beta x1_{\{x<0\}}\right)f'(x)-(\lambda+\delta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x) \tag{12}$$

$$\mathcal{L}_{u_0}f(x)=\left(c-u_0+\beta x1_{\{x<0\}}\right)f'(x)+u_0-(\lambda+\delta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x) \tag{13}$$

其中，$\mathcal{G}f(x)=\int_0^{\infty}f(x-y)\mathrm{d}F(y)$。

相应的拟变分不等式为：

$$\mathcal{L}f(x)\le 0$$

$$\mathcal{L}_{u_0}f(x)\le 0$$

$$f'(x)-k\le 0$$

$$\left(\mathcal{L}f(x)\right)\left(\mathcal{L}_{u_0}f(x)\right)\left(f'(x)-k\right)=0$$

或等价地

$$\max\left\{\mathcal{L}f(x),\mathcal{L}_{u_0}f(x),f'(x)-k\right\}=0 \tag{14}$$

性质 4.2.1：值函数 V 是 QVI (14)的几乎处处解。

证明：对任意固定的 $x>-\dfrac{c}{\beta}$ 和 $l=(\alpha,\gamma)\in\mathbb{U}_x$，令

$$\phi_x^l(t)=x+\int_0^t\left(c+\beta\phi_x^l(s)\mathbf{1}_{\{\phi_x^l(s)<0\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha(t)+\gamma(t)$$

显然 $\phi_x^l(t)$ 是左连右极的，记 $v^l(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}\alpha(s)-k\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}\gamma(s)$。

对策略 $(L,C)\in\Pi_x$，由引理 3.2.1，存在 $l=(\alpha,\gamma)$，使得

$$L_t=\alpha(x,t),\quad 0\le t<\tau_1;$$

$$C_t=\gamma(x,t),\quad 0\le t<\tau_1。$$

于是可以将(7)式重写为:

$$V(x)=\sup_{l\in\mathbb{U}_x}\mathbb{E}_x\left[v^l(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] \tag{15}$$

因此

$$V(x)\ge\mathbb{E}_x\left[v^l(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]$$

令 $t\to 0$，有

$$V(x) \geq v^l(0_+) + V(\phi_x^l(0_+)) = -k\Delta_+\gamma(0) + V(x + \Delta_+\gamma(0))$$

从而

$$V(x) \geq -k\Delta_+\gamma(0) + V(x + \Delta_+\gamma(0))$$

由 l 的任意性，有

$$V'(x) - k \leq 0 \tag{16}$$

令 $h > 0$ 充分小，定义函数

$$\varphi(x,h) = x + \int_0^h \left(c + \beta\varphi(x,s)\mathbf{1}_{\{\varphi(x,s)<0\}}\right)\mathrm{d}s$$

由(15)式有

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X_{h\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]$$

经过整理可得

$$\begin{aligned}
0 &\geq \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X_{h\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] - V(x) \\
&\geq \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}V(\varphi(x,h)) + \int_0^h \lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^\infty V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s - V(x) \\
&= \frac{V(\varphi(x,h)) - V(x)}{h} - \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h} + \frac{\int_0^h \lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^\infty V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}
\end{aligned}$$

因为 V 是绝对连续的，$V'(x)$ 几乎处处存在。令 $h \to 0$，有

$$\left(c + \beta x 1_{\{x<0\}}\right)V'(x) - (\lambda+\delta)V(x) + \lambda\mathcal{G}V(x) \leq 0\text{，a.e.}$$

定义函数

$$\psi(x,h) = x + \int_0^h \left(c + \beta\psi(x,s)\mathbf{1}_{\{\psi(x,s)<0\}} - u_0\right)\mathrm{d}s$$

可得

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x\left[\int_0^{h\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta t}u_0\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X_{h\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]$$

经过整理可得

$$\begin{aligned}
0 &\geq \mathbb{E}_x\left[\int_0^{h\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta t}u_0\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X_{h\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right] - V(x) \\
&\geq \mathrm{e}^{-\lambda h}\left[\int_0^h \mathrm{e}^{-\delta t}u_0\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\delta h}V(\psi(x,h))\right] - V(x) \\
&\quad + \int_0^h \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s}u_0\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta t}\int_0^\infty V(\psi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\right]\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{V(\psi(x,h)) - V(x)}{h} - \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)V(\psi(x,h))}{h} \\
&\quad + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\delta t}u_0\mathrm{d}t + \frac{\int_0^h \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta t}u_0\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta t}\int_0^\infty V(\psi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\right]\mathrm{d}s}{h}.
\end{aligned}$$

对上式取极限，令 $h \to 0$

$$\left(c+\beta x1_{\{x<0\}}-u_0\right)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+u_0+\lambda\mathcal{G}V(x)\le 0\text{，a.e.}$$

令 $\mathbb{B}=\left\{x:\mathcal{L}_{u_0}V(x)=0\right\}$，$\mathbb{D}=\left\{x:V'(x)=k\right\}$，$\mathbb{C}=\left(-\frac{c}{\beta},\infty\right)\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{D})$。对 $x\in\mathbb{C}$ 存在 $h>0$ 使得初始余额为 $x'\in(x-ch,x+ch)\subset\mathbb{C}$ 时立刻分红或注资不是最优的。因此有

$$\begin{aligned}0&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{h\wedge\tau_1}\right)\right]-V(x)\\&=\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{h}-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h}+\frac{\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^\infty V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}\end{aligned}$$

令 $h\to 0$，

$$\left(c+\beta x1_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{G}V(x)=0$$

在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处成立。再由 $\left(-\frac{c}{\beta},\infty\right)=\mathbb{B}\cup\mathbb{C}$ 可得

$$\left(\mathcal{L}V(x)\right)\left(\mathcal{L}_{u_0}V(x)\right)\left(V'(x)-k\right)=0$$

在 $\left(-\frac{c}{\beta},\infty\right)$ 上几乎处处成立。因此，$V(x)$ 是 QVI (14)的几乎处处解

令 $f(x)$ 为非降的、局部 Lipschitz 连续的 QVI(14)的几乎处处解。令

$$a(x)=\arg\max_{-\frac{c}{\beta}\le u\le x}\left\{f(u)-u\right\}\tag{17}$$

$$z(x)=\arg\max_{-\frac{c}{\beta}\le u\le x}\left\{f(u)-ku\right\}\tag{18}$$

对 $x\ge-\frac{c}{\beta}$。

$$\beta_1^*(x)=\begin{cases}u_0, & \mathcal{L}_{u_0}f(x)=0;\\ 0, & \mathcal{L}_{u_0}f(x)<0.\end{cases}\tag{19}$$

$$\beta_2^*(x)=\begin{cases}z(x)-x, & f'(x)-k=0;\\ 0, & f'(x)-k<0.\end{cases}\tag{20}$$

定义

$$L_t^*=\begin{cases}\alpha^*(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ L_{\tau_n}+\alpha^*_{X_{\tau_n}}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{21}$$

$$C_t^*=\begin{cases}\gamma^*(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ C_{\tau_n}+\gamma^*_{X_{\tau_n}}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{22}$$

其中

$$\alpha^*(x,t)=\int_0^t\beta_1^*\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\mathrm{d}s,\gamma^*(x,t)=\sum_{0\le s<t}\beta_2^*\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)$$

满足

$$\psi_x^{l^*}(t)=x+\int_0^t\left(c+\beta\psi_x^{l^*}(s)\mathbf{1}_{\left\{\psi_x^{l^*}(s)<0\right\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha^*(t)+\gamma^*(t)$$

显然 $l^*(x,t)=\left(\alpha^*(x,t),\gamma^*(x,t)\right)\in\mathbb{U}_x$ 且 $\pi^*=\left(L^*,C^*\right)\in\Pi_x$ 。

有了以上的定义，接下来证明验证定理。

定理 4.2.2 如果一个非降的局部 Lipschitz 连续函数 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是方程(14)的一个几乎处处解并且满足 $f(x)\le\frac{u_0}{\delta}$ （$x\le-\frac{c}{\beta}$ 时 $f(x)=0$），则由(21)和(22)式定义的策略 $\pi^*=\left(L^*,C^*\right)$ 是最优的且 $f=V_{\pi^*}=V$ 。

证明：考虑引理 3.2.1 中(5)和(6)式定义的策略 $(L,C)\in\Pi_x$， τ_n 和 τ_{n+1} 之间的过程可以描述为

$$\phi_x^{(n)}(t)=x+\int_0^t\left(c+\beta\phi_x^{(n)}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_x^{(n)}(s)<0\right\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha^{(n)}(t)+\gamma^{(n)}(t)$$

定义算子 $\mathcal{A}^{(n)}$ 为

$$\mathcal{A}^{(n)}f(x,t)=f\left(\phi_x^{(n)}(t)\right)-f(x)+\lambda\int_0^t\left[(\mathcal{G}f-f)\left(\phi_x^{(n)}(s)\right)\right]\mathrm{d}s$$

由 Stieltjes 积分的分部积分法，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X^\pi_{t\wedge\tau_{n+1}-}\right)-\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}f\left(X^\pi_{\tau_n}\right)\\&=\int_{[\tau_n,t\wedge\tau_{n+1}]}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathcal{A}^{(n)}\mathrm{d}f\left(\phi^{(n)}_{X^\pi_{\tau_n}}(s-\tau_n)\right)-\delta\int_{\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

则我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\delta t}f\left(X_t^\pi\right)&=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X^\pi_{(t\wedge\tau_{n+1})^-}\right)-\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}f\left(X^\pi_{\tau_n}\right)\right]+\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left[f\left(X^\pi_{\tau_n}\right)-f\left(X^\pi_{\tau_n-}\right)\right]\\&=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\int_{\left(0,(t\wedge\tau_{n+1})^-\right]}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathcal{A}^{(n)}f\left(X^\pi_{\tau_n},\mathrm{d}s\right)-\delta\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X^\pi_{s-}\right)\mathrm{d}s+M_t\end{aligned}$$

其中

$$M_t=\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left[f\left(X^\pi_{\tau_n}\right)-f\left(X^\pi_{\tau_n^-}\right)\right]-\lambda\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\left[(\mathcal{G}f-f)\left(X_s^\pi\right)\right]\mathrm{d}s$$

由 $f(x)\le\frac{l_0}{\delta}$，

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left|f\left(X^\pi_{\tau_n}\right)-f\left(X^\pi_{\tau_n^-}\right)\right|\right]\le2\frac{l_0}{\delta}\mathbb{E}_x\left[N_t\right]<\infty$$

因此，M 是一个零初值鞅。

在式子两边同时添加 $\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s$，并同时取期望

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^\pi\right)}f\left(X^\pi_{t\wedge\tau^\pi}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right]\\&=f(x)+\sum_{n=0}^{N_{t\wedge\tau^\pi}}\mathbb{E}_x\left[\int_{(0,t\wedge\tau_\pi\wedge\tau_{n+1}]^-}\mathrm{e}^{-\delta(\tau_n+s)}\left(\mathrm{d}\mathcal{A}^{(n)}f\left(X^\pi_{\tau_n}\right),s\right)+\mathrm{d}v^{(n)}(s)\right]-\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\delta\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s\right]\end{aligned}$$

其中 $v^{(n)}(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}\alpha^{(n)}(s)-k\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}\gamma^{(n)}(s)$ 。对于 $x>-\frac{c}{\beta}$，令

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f(t)=\mathcal{A}^{l^{(n)}} f\left(X_{\tau_n}^\pi,t\right)+v^{l^{(n)}}(t)-\delta\int_0^t f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s$$

对 $t\in\mathbb{R}_+$。考虑勒贝格分解

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f(t)=\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^c(t)+\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^{pd}(t)$$

其中 $\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^c(t)$ 和 $\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^{pd}(t)$ 分别为连续部分和纯离散部分。f 是局部 Lipschitz 连续的函数，则 f 绝对连续且几乎处处可微，因此存在一个密度函数 g 使得 $f(y)-f(x)=\int_x^y g(h)\mathrm{d}h$ 且 $g(x)=f'(x)$ 几乎处处成立。因此，

$$\left(c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)g(x)-(\lambda+\delta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x)=\mathcal{L}f(x)\text{，a.e.}$$

$$\left(c-u_0+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)g(x)+u_0-(\lambda+\delta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x)=\mathcal{L}_{u_0}f(x)\text{，a.e.}$$

$$g(x)-k\le 0$$

由于 f 几乎处处满足(14)式，于是有

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^c(t)=&\int_0^t\left(c+\beta\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)\mathbf{1}_{\left\{\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)<0\right\}}\right)g\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)\\&-(\lambda+\delta)f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_{X_{\tau_n}}^{l^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left\{\mathcal{L}_{u_0}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s\\\le&\, 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}} f\right)^{pd}(t)=&\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s^+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(s)\right)+\Delta_+\alpha^{(n)}(s)\right\}\\&+\sum_{0\le h<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(h^+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{l^{(n)}}(h)\right)-k\Delta_+\gamma^{(n)}(h)\right\}\\\le&\, 0\end{aligned}$$

将上述两个式子代入，有

$$f(x)\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^\pi\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^\pi}^\pi\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s-k\int_0^{t\wedge\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s\right]$$

由于 f 非负，令 $t\to\infty$，有 $f(x)\ge V_\pi(x)$，进一步可以得到 $f(x)\ge V(x)$。

另一方面，令 $\mathbb{B}=\left\{x:\mathcal{L}_{u_0}f(x)=0\right\}$，$\mathbb{D}=\left\{x:f'(x)-k=0\right\}$ 和 $\mathbb{C}=\left(-\frac{c}{\beta},\infty\right)\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{D})$。由于 f 几乎处处满足(14)式，因此 $\mathcal{L}f(x)=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中几乎处处成立且在 $\mathbb{B}$ 中 $\mathcal{L}_{u_0}f(x)=0$，在 $\mathbb{D}$ 中 $f'(x)-k=0$。由于 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{D}$ 是干预区间，于是 $X_t^{\pi^*}\in\mathbb{C}$ 几乎处处成立。其中 $\left(L^*,C^*\right)$ 是由(21)和(22)式定义的。

这表明

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_x^{l^*}f\right)^c(t)=&\int_0^t\left\{\left(c+\beta\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\mathbf{1}_{\left\{\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)<0\right\}}\right)g\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)-(\lambda+\delta)f\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\right.\\&\left.+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s+\int_0^t\left\{\mathcal{L}_{u_0}f\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s\\=&\,0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_x^{l^*} f\right)^{pd}(t)=&\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{l^*}\left(s^+\right)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{l^*}(s)\right)+\Delta_+\alpha^*(s)\right\}\\&+\sum_{0\le h<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{l^*}\left(h^+\right)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{l^*}(h)\right)-k\Delta_+\gamma^*(h)\right\}\\=&\,0\end{aligned}$$

用 π^* 和 l^* 对应的替换掉 π 和 $l^{(n)}$，有

$$f(x)=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi^*}}^{\pi^*}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s^*-k\int_0^{t\wedge\tau^{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}C_s^*\right]$$

同时，由于

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi^*}}^{\pi^*}\right)\right]&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau^{\pi^*}}f\left(X_{\tau^{\pi^*}}^{L^*}\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{\pi^*}\le t\right\}}\right]+\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta t}f\left(X_t^{\pi^*}\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{L^*}>t\right\}}\right]\\&\le\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta t}f\left(X_t^{\pi^*}\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{\pi^*}>t\right\}}\right]\\&\le\mathrm{e}^{-\delta t}\frac{u_0}{\delta}\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$ 可得，$f(x)=V_{\pi^*}(x)\le V(x)$。定理得证。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su Un'Impostazione Alternativa Della Teoria Collettiva del Rischio. *Transactions of the* 15*th International Congress of Actuaries*, **2**, 433-443.

[2] Schmidli, H. (2008) Stochastic Control in Insurance. In: Melnick, E.L. and Everitt, B.S., Eds., *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*, Wiley, Hoboken. https://doi.org/10.1002/9780470061596.risk0374

[3] Avanzi, B. (2009) Strategies for Dividend Distribution: A Review. *North American Actuarial Journal*, **13**, 217-251. https://doi.org/10.1080/10920277.2009.10597549

[4] Jeanblanc-Picqué, M. and Shiryaev, A.N. (1995) Optimization of the Flow of Dividends. *Russian Mathematical Surveys*, **50**, 257-277. https://doi.org/10.1070/RM1995v050n02ABEH002054

[5] Asmussen, S. and Taksar, M. (1997) Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Pay-out. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **20**, 1-15. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(96)00017-0

[6] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (2006) On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model. *North American Actuarial Journal*, **10**, 76-93. https://doi.org/10.1080/10920277.2006.10596249

[7] Azcue, P. and Muler, N. (2012) Optimal Dividend Policies for Compound Poisson Processes: The Case of Bounded Dividend Rates. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **51**, 26-42. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.02.011

[8] Xu, R. and Woo, J.K. (2020) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with a Penalty Payment at Ruin: Restricted Dividend Payments. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **92**, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.02.008

[9] Liu, Y., Liu, Z. and Liu, G. (2020) Optimal Dividend Problems for Sparre Andersen Risk Model with Bounded Dividend Rates. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2020**, 128-151. https://doi.org/10.1080/03461238.2019.1655475

[10] Dassios, A. and Embrechts, P. (1989) Martingales and Insurance Risk. *Communications in Statistics*. *Stochastic Models*, **5**, 181-217. https://doi.org/10.1080/15326348908807105

[11] Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994) Ruin Estimation for a General Insurance Risk Model. *Advances in Applied Probability*, **26**, 404-422. https://doi.org/10.2307/1427443

[12] Zhou, M. and Zhang, C. (2005) Absolute Ruin under Classical Risk Model. *Acta Mathematicae Applicate Sinica*, **28**, 57-80.

[13] Cai, J. (2007) On the Time Value of Absolute Ruin with Debit Interest. *Advances in Applied Probability*, **39**, 343-359. https://doi.org/10.1239/aap/1183667614

[14] Dickson, D.C. and Waters, H.R. (2004) Some Optimal Dividends Problems. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **34**, 49-74. https://doi.org/10.1017/S0515036100013878

[15] Gerber, H.U., Shiu, E.S. and Smith, N. (2006) Maximizing Dividends without Bankruptcy. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **36**, 5-23. https://doi.org/10.1017/S0515036100014392

[16] Scheer, N. and Schmidli, H. (2011) Optimal Dividend Strategies in a Cramer—Lundberg Model with Capital Injections and Administration Costs. *European Actuarial Journal*, **1**, 57-92. https://doi.org/10.1007/s13385-011-0007-3

[17] Jin, Z., Yang, H.-L. and Yin, G. (2017) A Numerical Approach to Optimal Dividend Policies with Capital Injections and Transaction Costs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **33**, 221-238. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0653-6