Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(3), 1340-1350
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123136

Hans汉斯

一类带有p-Laplacian算子的分数阶积分边值问题的多重正解

武 瑜[*]，**刘 畅**

太原师范学院，数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2023年2月27日；录用日期：2023年3月24日；发布日期：2023年3月31日

摘 要

本文研究了一类带有p-Laplacian算子的分数阶积分边值问题正解的存在性，通过研究格林函数的性质，运用锥拉伸锥压缩不动点定理以及Leggett-Williams不动点定理，获得了该边值问题至少存在一个正解及三个正解的充分条件，并给出实例验证所得结论。

关键词

p-Laplacian算子，分数阶微分方程，边值问题

Multiple Positive Solutions for Fractional Integral Boundary Value Problems with p-Laplacian Operators

Yu Wu[*]**, Chang Liu**

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Feb. 27th, 2023; accepted: Mar. 24th, 2023; published: Mar. 31st, 2023

Abstract

Studying the properties of Green's function and using the cone stretching cone compression fixed point theorem and the Leggett-Williams fixed point theorem, this paper studies the existence of positive solutions for a class of fractional integral boundary value problems with p-Laplacian op-

[*]通讯作者。

文章引用: 武瑜, 刘畅. 一类带有 p-Laplacian 算子的分数阶积分边值问题的多重正解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1340-1350. DOI: 10.12677/aam.2023.123136

erators, obtains sufficient conditions for the existence of at least one positive solution and three positive solutions to the boundary value problems, and gives some examples illustrating the results obtained.

Keywords

p-Laplacian Operators, Fractional Differential Equations, Boundary Value Problems

1. 引言

分数阶微积分是由整数阶微积分推广而来的，已广泛应用于控制系统、空气动力学、流体力学等众多工程分支中。因此，分数阶微分方程理论研究近年来得到了快速发展，研究成果非常丰富[1] [2] [3] [4] [5]。其中：文[4]运用锥理论得到了一类分数阶无穷点边值问题存在一个局部正解以及多个局部正解的充分条件；文[5]利用 Schauder 不动点定理及凹算子不动点定理建立了高阶分数阶多点边值问题正解的存在性及唯一正解的存在性结果。

带有 p-Laplacian 算子的方程模型能更好地描述多孔介质中的湍流、弹性理论等诸多领域中的实际问题，目前，带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程受到众多学者的关注[6] [7] [8] [9] [10]。其中：文[9]研究了如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\left(\phi_p\left(D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right)+f\left(t,u(t)\right)=0,0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u(1)=D_{0+}^{\alpha}u(0)=0, \\ D_{0+}^{\alpha}u(1)=\lambda D_{0+}^{\alpha}u(\xi), \end{cases}$$

其中：D_{0+}^{α} 和 D_{0+}^{β} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数，$2<\alpha\le 3$，$1<\beta\le 2$，$0<\xi<1$，$\lambda\ge 0$，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，$\phi_p^{-1}=\phi_q$，$1/p+1/q=1$。作者应用锥上的不动点定理获得了上述边值问题至少存在一个和两个正解的充分条件。文[10]研究了如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶积分边值问题

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\alpha}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}x(t)\right)\right)=f\left(t,x(t),D_{0+}^{\beta}x(t)\right),0<t<1, \\ D_{0+}^{\beta}x(t)=0, \qquad \left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}x(0)\right)\right)'=0, \\ D_{0+}^{\gamma}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}x(1)\right)\right)=I_{0+}^{v}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}x(\eta)\right)\right), \\ x(0)=0, \qquad D_{0+}^{\beta-1}x(1)=I_{0+}^{w}g\left(\xi,x(\xi)\right)+k, \end{cases}$$

其中：D_{0+}^{α}，D_{0+}^{β} 和 D_{0+}^{γ} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数，I_{0+}^{v}，I_{0+}^{w} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶积分，$0<\gamma<1<\beta<2<\alpha<3$，$v,w>0$，$0<\eta,\xi<1$，$k\in R$，$f\in C([0,1]\times R\times R,R)$，$g\in C([0,1]\times R,R)$，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，$\phi_p^{-1}=\phi_q$，$1/p+1/q=1$。作者应用上下解方法和单调迭代方法得到了上述边值问题极值解的存在性的充分条件。

受上述文献启发，本文讨论如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶积分边值问题

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\alpha}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)\right)=\lambda f\left(t,u(t),(Tu)(t)\right),0<t<1, \\ u(0)=D_{0+}^{\beta}u(0)=D_{0+}^{\beta-1}u(1)=\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(0)\right)\right)'=0, \\ D_{0+}^{\gamma}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(1)\right)\right)=I_{0+}^{w}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(\eta)\right)\right), \end{cases} \tag{1}$$

其中：D_{0+}^{α}，D_{0+}^{β}，D_{0+}^{γ} 是 Riemann-Liouville 分数阶导数，I_{0+}^{w} 是 Riemann-Liouville 分数阶积分，$0<\gamma<1<\beta<2<\alpha<3$，$0<\eta<1$，$\lambda,w>0$，$f\in C\left((0,1)\times[0,\infty)\times[0,\infty),[0,\infty)\right)$，$(Tu)(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s$，且 $K\in C\left(D,[0,+\infty)\right)$，$D=\left\{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]:t\geq s\right\}$，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，$\phi_p^{-1}=\phi_q$，$1/p+1/q=1$。本文运用锥拉伸锥压缩不动点定理以及 Leggett-Williams 不动点定理研究该边值问题正解的存在性。

2. 预备知识和引理

定义 1 [1]函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中：等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义。

定义 2 [1]连续函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中：等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义，$n=\min\{m\in Z:m\geq\alpha\}$，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

引理 1 [1]设 $\alpha>0$，$u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，$D_{0+}^{\alpha}u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},$$

其中：$n=\min\{m\in Z:m\geq\alpha\}$，$c_i\in R$，$i=1,2,\cdots,n$。

引理 2 若 $y(t)\in C[0,1]$，则分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\alpha}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)\right)=y(t),0<t<1, \\ u(0)=D_{0+}^{\beta}u(0)=D_{0+}^{\beta-1}u(1)=\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(0)\right)\right)'=0, \\ D_{0+}^{\gamma}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(1)\right)\right)=I_{0+}^{w}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(\eta)\right)\right), \end{cases}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1H(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

其中：

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases} t^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}, & 0\leq s\leq t\leq 1, \\ t^{\beta-1}, & 0\leq t\leq s\leq 1, \end{cases}$$

$$
H(s,\tau)=\frac{1}{\Lambda}\begin{cases}
(s-\tau)^{\alpha-1}\left[\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\eta^{\alpha+w-1}\right] & \\
\quad+\left[\Gamma(\alpha+w)(1-\tau)^{\alpha-\gamma-1}-\Gamma(\alpha-\gamma)(\eta-\tau)^{\alpha+w-1}\right]s^{\alpha-1}, & 0\le\tau\le\eta,s\le 1,\\
\left[\Gamma(\alpha+w)(1-\tau)^{\alpha-\gamma-1}-\Gamma(\alpha-\gamma)(\eta-\tau)^{\alpha+w-1}\right]s^{\alpha-1}, & 0\le s\le\tau\le\eta\le 1,\\
(s-\tau)^{\alpha-1}\left[\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\eta^{\alpha+w-1}\right]+\Gamma(\alpha+w)(1-\tau)^{\alpha-\gamma-1}s^{\alpha-1}, & 0\le\eta\le\tau\le s\le 1,\\
\Gamma(\alpha+w)(1-\tau)^{\alpha-\gamma-1}s^{\alpha-1}, & 0\le\eta,s\le\tau\le 1,
\end{cases}
$$

其中：$\Lambda=\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\eta^{\alpha+w-1}\right]$。

证明 由 $\phi_p^{-1}=\phi_q$ 以及引理 1 可得，$-D_{0+}^{\alpha}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)\right)=y(t)$ 等价于

$$
\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)=-I_{0+}^{\alpha}y(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_3t^{\alpha-3}\text{，}\quad c_1,c_2,c_3\in R\text{，}
$$

由边界条件 $D_{0+}^{\beta}u(0)=0$，$\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(0)\right)\right)'=0$ 可得 $c_2=c_3=0$。故

$$
\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)=-I_{0+}^{\alpha}y(t)+c_1t^{\alpha-1} \tag{2}
$$

对(2)式两边求 γ 阶导数得

$$
D_{0+}^{\gamma}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-\gamma-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau+c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)}t^{\alpha-\gamma-1}
$$

对(2)式两边求 w 阶积分得

$$
I_{0+}^{w}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha+w)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha+w-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau+c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+w)}t^{\alpha+w-1}
$$

由边界条件 $D_{0+}^{\gamma}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(1)\right)\right)=I_{0+}^{w}\left(\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(\eta)\right)\right)$ 可得

$$
c_1=\frac{\Gamma(\alpha+w)\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-\gamma-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau-\Gamma(\alpha-\gamma)\int_0^{\eta}(\eta-\tau)^{\alpha+w-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau}{\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\eta^{\alpha+w-1}\right]} \tag{3}
$$

将(3)式代入(2)式可得

$$
\phi_p\left(-D_{0+}^{\beta}u(t)\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau+c_1t^{\alpha-1}=\int_0^1H(t,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}
$$

令 $\phi_q\left(\int_0^1H(t,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=h(t)$，可得 $D_{0+}^{\beta}u(t)=-h(t)$，再由引理 1 可得

$$
\begin{aligned}
u(t)&=-I_{0+}^{\beta}h(t)+d_1t^{\beta-1}+d_2t^{\beta-2}\\
&=-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s+d_1t^{\beta-1}+d_2t^{\beta-2},d_1,d_2\in R.
\end{aligned} \tag{5}
$$

由边界条件 $u(0)=0$ 得 $d_2=0$。再由定义 2 对(5)式两边求 $\beta-1$ 阶导数可得

$$
D_{0+}^{\beta-1}u(t)=-D_{0+}^{\beta-1}I_{0+}^{\beta}h(t)+d_1D_{0+}^{\beta-1}t^{\beta-1}=-\int_0^th(s)\mathrm{d}s+d_1\Gamma(\beta).
$$

由边界条件 $D_{0+}^{\beta-1}u(1)=0$ 得

$$
d_1=\frac{\int_0^1h(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\beta)}
$$

于是边值问题有唯一解

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s + d_1 t^{\beta-1} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6}$$

证毕。

引理 3 函数 $G(t,s)$， $H(t,s)$ 满足如下性质：

1) 对任意的 $t,s\in[0,1]$， $G(t,s)\ge 0$， $H(t,s)\ge 0$；

2) $\max\limits_{t\in[0,1]} G(t,s) = G(s,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}s^{\beta-1} \le \frac{1}{\Gamma(\beta)}$， $s\in[0,1]$；

3) $$\min_{t\in[1/4,3/4]} G(t,s) =: m(s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{\beta-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\beta-1}, & s\in\left[0,\frac{1}{4}\right]; \\ \min\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{\beta-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\beta-1}, \frac{1}{4^{\beta-1}}\right\}, & s\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right); \\ \frac{1}{4^{\beta-1}}, & s\in\left[\frac{3}{4},1\right]. \end{cases}$$

证明 1) 由函数 $G(t,s)$ 的表达式易知，对任意的 $t,s\in[0,1]$， $G(t,s)\ge 0$。

对于函数 $H(t,s)$，注意到 $\alpha-\gamma-1<\alpha+w-1$ 以及 $1<\alpha-\gamma<2<\alpha+w$，则有

$$\Gamma(\alpha-\gamma) < 1 < \Gamma(\alpha+w)$$

$$(1-s)^{\alpha-\gamma-1} > (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1} > (\eta-s)^{\alpha+w-1}$$

进而有 $\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\eta^{\alpha+w-1} > \Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma) > 0$，以及

$$\Gamma(\alpha+w)(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - \Gamma(\alpha-\gamma)(\eta-s)^{\alpha+w-1} \ge \left[\Gamma(\alpha+w)-\Gamma(\alpha-\gamma)\right](\eta-s)^{\alpha+w-1} > 0$$

进而容易得到对任意的 $t,s\in[0,1]$， $H(t,s)\ge 0$。

2) 对于函数 $G(t,s)$，通过简单计算，可得当 $0<t\le s$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}(\beta-1)t^{\beta-2} > 0$$

当 $0\le s<t$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}(\beta-1)\left[t^{\beta-2} - (t-s)^{\beta-2}\right] < 0$$

即 $G(t,s)$ 在 $t\le s$ 上是关于 t 的增函数，在 $s<t$ 上是关于 t 的减函数。进而有

$$\max_{t\in[0,1]} G(t,s) = G(s,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}s^{\beta-1} \le \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \quad s\in[0,1]$$

3) 令

$$g_1(t,s) = \frac{t^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad g_2(t,s) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

可得

$$
\begin{aligned}
\min_{t\in[1/4,3/4]} G(t,s) &= \begin{cases} g_1\left(\frac{3}{4},s\right), & s\in\left[0,\frac{1}{4}\right]; \\ \min\left\{g_1\left(\frac{3}{4},s\right), g_2\left(\frac{1}{4},s\right)\right\}, & s\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right); \\ g_2\left(\frac{1}{4},s\right), & s\in\left[\frac{3}{4},1\right]; \end{cases} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{\beta-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\beta-1}, & s\in\left[0,\frac{1}{4}\right]; \\ \min\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{\beta-1} - \left(\frac{3}{4}-s\right)^{\beta-1}, \frac{1}{4^{\beta-1}}\right\}, & s\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right); \\ \frac{1}{4^{\beta-1}}, & s\in\left[\frac{3}{4},1\right]; \end{cases} \\
&=: m(s),
\end{aligned}
$$

证毕。

设 E 是实 Banach 空间，θ 为 E 中的零元素。P 为 E 中的非空凸闭子集，若

$$x\in P, \lambda\geq 0 \Rightarrow \lambda x\in P;\quad x\in P, -x\in P \Rightarrow x=\theta,$$

则称 P 为 E 中的锥。

引理 4 [3]设 E 是一个 Banach 空间，P 为 E 中的一个锥，Ω_1, Ω_2 是 E 中的两个有界开集，并且 $\Omega_1\subset\Omega_2$。假设 $T: P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)\to P$ 是全连续算子，若下列条件二者成立其一：

(K1) $\|Tx\|\leq\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Tx\|\geq\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_2$

(K2) $\|Tx\|\geq\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Tx\|\leq\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_2$

那么 T 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有一个不动点。

定义 3 [3]设 P 为 Banach 空间 E 中的锥。若映射 $\psi: P\to[0,\infty)$ 连续且 $\forall x,y\in P$，$\forall\eta\in[0,1]$，有 $\psi(\eta x+(1-\eta)y)\geq\eta\psi(x)+(1-\eta)\psi(y)$，则称 ψ 是 P 上非负连续凹泛函。

引理 5 [3] 设常数 $0<a<b<d\leq c$，$T:\overline{P_c}\to\overline{P_c}$ 是全连续算子，ψ 是 P 上的一个非负连续凹泛函，且对任意的 $x\in P_c$，有 $\psi(x)\leq\|x\|$。又设

(L1) $\{x\in P(\psi,b,d) | \psi(x)>b\}\neq\varnothing$ 且对 $x\in P(\psi,b,d)$，有 $\psi(Tx)>b$；

(L2) 当 $x\in\overline{P_a}$ 时，$\|Tx\|<a$；

(L3) 当 $x\in P(\psi,b,c)$ 且 $\|Tx\|>d$ 时，$\psi(Tx)>b$.

则算子 T 至少有三个不动点 x_1,x_2,x_3，满足 $\|x_1\|<a$，$b<\psi(x_2)$，$\|x_3\|>a$，$\psi(x_3)<b$。

3. 主要结果

设 $E=C[0,1]$。对任意的 $u\in E$，定义其范数为

$$\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$$

容易证明 E 为 Banach 空间。再令

$$P=\{u\in E \mid u(t)\geq 0, t\in[0,1]\}$$

则 P 是 E 中的锥。定义泛函

$$\psi(u)=\min_{t\in[1/4,3/4]}u(t),$$

则它是 P 中的非负连续凹泛函。定义算子 A 如下：对任意的 $u\in P$，

$$(Au)(t)=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1] \tag{7}$$

引理 6 算子 $A:P\to P$ 是全连续算子。

证明 根据引理 3 的 1)以及函数 f 的非负连续性可得，对任意的 $u\in P$ 有

$$(Au)(t)=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geq 0,\quad t\in[0,1]$$

所以 $A(P)\subset P$。以下证明 A 为紧算子。设 Ω 是锥 P 中的有界集，即存在 $R_1>0$，使得

$$\|x\|\leq R_1,\quad \forall x\in\Omega$$

设 $W_{R_1}=\sup\left\{f(t,u_1,u_2):(t,u_1,u_2)\in\left([0,1]\times[0,R_1]\times\left[0,k^*R_1\right]\right)\right\}$，其中

$$k^*=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t K(t,s)\mathrm{d}s$$

进而对任意的 $u\in\Omega$，由引理 3 的 2)得

$$\begin{aligned}|(Au)(t)|&=\left|\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\leq\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\leq\frac{\phi_q\left(\lambda W_{R_1}\right)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由此可知 $A(\Omega)$ 为 E 中一致有界的子集合。

再证 $A(\Omega)$ 为 E 中等度连续的子集合。对任意的 $0\leq t_1<t_2\leq 1$，$u\in\Omega$ 有

$$\begin{aligned}|(Au)(t_2)-(Au)(t_1)|&\leq\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\leq\phi_q\left(\lambda W_{R_1}\right)\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

又 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，从而一致连续，故 $A(\Omega)$ 为 E 中等度连续的子集合。进而集合 $A(\Omega)$ 是一致有界且等度连续的，根据 Arzela-Ascoli 定理可知 $A(\Omega)$ 是 E 中的相对紧集。

最后证明 $A:P\to P$ 是连续算子。设 $\{u_n\}\subset\Omega$，$u\in\Omega$，当 $n\to+\infty$ 时，有 $\|u_n-u\|\to 0$，故存在常数 $R_0>1$，使得 $\|u\|<R_0$，$\|u_n\|<R_0$，$n=1,2,\cdots$。于是对 $s\in[0,1]$，

$$\left|\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u_n(\tau),(Tu_n)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)-\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right|\to 0,n\to+\infty.$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u_n(\tau),(Tu_n)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\leq 2\phi_q\left(\lambda W_{R_0}\right)\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s<+\infty,\end{aligned}$$

其中 $W_{R_0}=\sup\left\{f(t,u_1,u_2):(t,u_1,u_2)\in\left([0,1]\times[0,R_0]\times\left[0,k^*R_0\right]\right)\right\}$。由 Lebesgue 控制收敛定理可知，

$$\left|\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u_n(\tau),(Tu_n)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\to 0,n\to+\infty.$$

进而根据引理 3 的 2)得

$$\begin{aligned}\left|(Au_n)(t)-(Au)(t)\right| &= \left|\int_0^1 G(t,s)\left[\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u_n(\tau),(Tu_n)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left.-\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\right]\mathrm{d}s\right|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left|\int_0^1 \phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u_n(\tau),(Tu_n)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right.\\ &\quad \left.-\int_0^1 \phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\to 0, n\to+\infty.\end{aligned}$$

则 $A:P\to P$ 是连续算子。证毕。

为了方便叙述，记：

$$M=\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 \phi_q\left(\lambda\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right]^{-1}$$

$$N=\left[\int_0^1 m(s)\phi_q\left(\lambda\int_{1/4}^{3/4} H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right]^{-1}$$

定理 1 若存在两个常数 $r_2>r_1>0$，使得

(H1) $\forall(t,u,v)\in[1/4,3/4]\times[0,r_1]\times[0,k^*r_1]$，$f(t,u,v)\ge(Nr_1)^{p-1}$，

(H2) $\forall(t,u,v)\in[0,1]\times[0,r_2]\times[0,k^*r_2]$，$f(t,u,v)\le(Mr_2)^{p-1}$，

则边值问题(1)至少有一个正解 u，使得 $r_1\le\|u\|\le r_2$。

证明 令 $\Omega_1=\{u\in P\,|\,\|u\|<r_1\}$，当 $u\in\partial\Omega_1$ 时，有 $0\le u(t)\le r_1$，$0\le(Tu)(t)\le k^*r_1$，$t\in[0,1]$。由(H1)及引理 3 的 3)可得

$$\begin{aligned}(Au)(t) &= \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &\ge \int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_{1/4}^{3/4} H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &\ge \int_0^1 \min_{t\in[1/4,3/4]} G(t,s)\phi_q\left(\int_{1/4}^{3/4} H(s,\tau)\lambda\phi_p(Nr_1)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &= Nr_1\int_0^1 m(s)\phi_q\left(\lambda\int_{1/4}^{3/4} H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &= r_1=\|u\|,\forall t\in[1/4,3/4],\end{aligned}$$

因而当 $u\in\partial\Omega_1$ 时，有 $\|Au\|\ge\|u\|$。

另一方面，令 $\Omega_2=\{u\in P\,|\,\|u\|<r_2\}$，当 $u\in\partial\Omega_2$ 时，有 $0\le u(t)\le r_2$，$0\le(Tu)(t)\le k^*r_2$，$t\in[0,1]$。由(H2)及引理 3 的 2)可得

$$\begin{aligned}\|Au\| &= \max_{t\in[0,1]}\left|(Au)(t)\right|\\ &= \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f\left(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 \phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda\phi_p(Mr_2)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &= \frac{Mr_2}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 \phi_q\left(\lambda\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\ &= r_2=\|u\|,\forall t\in[0,1],\end{aligned}$$

因而当 $u\in\partial\Omega_2$ 时，有 $\|Au\|\le\|u\|$。

由引理 4 可知算子 A 至少有一个不动点 u，即边值问题(1)至少有一个正解且满足 $r_1\le\|u\|\le r_2$。证毕。

定理 2 假设存在正常数且满足 $0<a<b<c$，使得：

(H3) 当 $(t,u,v)\in[0,1]\times[0,a]\times\left[0,k^*a\right]$ 时，$f(t,u,v)\le(Ma)^{p-1}$；

(H4) 当 $(t,u,v)\in[1/4,3/4]\times[b,c]\times\left[0,k^*c\right]$ 时，$f(t,u,v)\ge(Nb)^{p-1}$；

(H5) 当 $(t,u,v)\in[0,1]\times[0,c]\times\left[0,k^*c\right]$ 时，$f(t,u,v)\le(Mc)^{p-1}$。

则边值问题(1)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3，且满足

$$\max_{t\in[0,1]}|u_1(t)|<a,\quad b<\min_{t\in[1/4,3/4]}|u_2(t)|,\quad a<\max_{t\in[0,1]}|u_3(t)|,\quad \min_{t\in[1/4,3/4]}|u_3(t)|<b$$

证明 若 $u\in\overline{P_c}$，则 $\|u\|\le c$，由假设(H5)可得

$$\begin{aligned}\|Au\|&=\max_{t\in[0,1]}|(Au)(t)|\\&=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda\phi_p(Mc)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{Mc}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=c,\end{aligned}$$

从而说明对任意的 $u\in\overline{P_c}$，$\|Au\|\le c$，故有 $A\left(\overline{P_c}\right)\subset\overline{P_c}$。同理，若 $u\in\overline{P_a}$，由假设(H3)可得 $\|Au\|\le a$，所以引理 5 中的条件(L2)成立。

令 $u(t)=\dfrac{b+c}{2}$，$0\le t\le 1$，则 $u(t)=\dfrac{b+c}{2}<c$ 且 $\psi(u(t))=\min\limits_{t\in[1/4,3/4]}\dfrac{b+c}{2}>b$，因而 $u(t)=\dfrac{b+c}{2}\in P(\psi,b,c)$，即 $\{u\in P(\psi,b,c)\,|\,\psi(u)>b\}\ne\varnothing$。若 $u\in P(\psi,b,c)$，则 $b\le u(t)\le c$，从而由假设(H4)可得

$$\begin{aligned}\psi(Au)&=\min_{t\in[1/4,3/4]}|(Tu)(t)|\\&=\min_{t\in[1/4,3/4]}\left|\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\lambda f(\tau,u(\tau),(Tu)(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\ge\int_0^1 m(s)\phi_q\left(\int_{1/4}^{3/4}H(s,\tau)\lambda\phi_p(Nb)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=Nb\int_0^1 m(s)\phi_q\left(\lambda\int_{1/4}^{3/4}H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=b,\end{aligned}$$

即对任意的 $u\in P(\psi,b,c)$，$\psi(Au)>b$。所以引理 5 中条件(L1)成立。

如果 $d=c$，那么引理 5 的条件(L1)可以推出条件(L3)。

综上，由引理 5 可知，边值问题(1)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3，且满足

$$\max_{t\in[0,1]}|u_1(t)|<a,\quad b<\min_{t\in[1/4,3/4]}|u_2(t)|,\quad a<\max_{t\in[0,1]}|u_3(t)|,\quad \min_{t\in[1/4,3/4]}|u_3(t)|<b。$$

4. 例子

例 1 考虑如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶积分边值问题

$$\begin{cases} -D_{0+}^{11/4}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(t)\right)\right)=t+u(t)+\mathrm{e}^{-\left|\int_0^t t^2(1-s)^2u(s)\mathrm{d}s\right|},0<t<1, \\ u(0)=D_{0+}^{4/3}u(0)=D_{0+}^{1/3}u(1)=\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(0)\right)\right)'=0, \\ D_{0+}^{1/2}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(1)\right)\right)=I_{0+}^{5/2}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(3/4)\right)\right), \end{cases} \tag{8}$$

此即在边值问题(1)中，$\alpha=11/4$，$\beta=4/3$，$\gamma=1/2$，$w=5/2$，$\eta=3/4$，$\lambda=1$，$p=2$，$(Tu)(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s=\int_0^t t^2(1-s)^2u(s)\mathrm{d}s$ 及 $f(t,u,v)=t+u+\mathrm{e}^{-|v|}$，$\forall t\in[0,1]$，$u,v\geq 0$。

通过计算可得 $k^*=\sup\limits_{t\in[0,1]}\int_0^t K(t,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}$，$q=2$，$M\approx 21.8691$，$N\approx 49.2083$。选取 $r_1=0.1$，$r_2=0.4$ 有

$$f(t,u,v)=t+u+\mathrm{e}^{-|v|}+5>5\geq Nr_1\approx 4.9208,\quad (t,u,v)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[0,0.1]\times\left[0,\frac{1}{30}\right)$$

$$f(t,u,v)=t+u+\mathrm{e}^{-|v|}+4\leq 6.4<Mr_2\approx 8.7476,\quad (t,u,v)\in[0,1]\times[0,0.4]\times\left[0,\frac{2}{15}\right)$$

于是定理 1 的条件都满足，所以边值问题(8)至少存在一个正解 u，使得 $0.1\leq\|u\|\leq 0.4$。

例 2 考虑如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶积分边值问题

$$\begin{cases} -D_{0+}^{11/4}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(t)\right)\right)=f\left(t,u(t),(Tu)(t)\right),0<t<1, \\ u(0)=D_{0+}^{4/3}u(0)=D_{0+}^{1/3}u(1)=\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(0)\right)\right)'=0, \\ D_{0+}^{1/2}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(1)\right)\right)=I_{0+}^{5/2}\left(\phi_2\left(-D_{0+}^{4/3}u(3/4)\right)\right), \end{cases} \tag{9}$$

此即在边值问题(1)中，$\alpha=11/4$，$\beta=4/3$，$\gamma=1/2$，$w=5/2$，$\eta=3/4$，$\lambda=1$，$p=2$，$(Tu)(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s=\int_0^t t^2(1-s)^2u(s)\mathrm{d}s$ 及

$$f(t,u,v)=\begin{cases} t+\mathrm{e}^{-|v|}+45u^3, & 0\leq u\leq 1, \\ t+\mathrm{e}^{-|v|}+55u-10, & 1<u\leq 2, \\ t+\mathrm{e}^{-|v|}+10\sqrt{2u}+80, & u>2, \end{cases}$$

通过计算可得 $k^*=\sup\limits_{t\in[0,1]}\int_0^t K(t,s)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}$，$q=2$，$M\approx 21.8691$，$N\approx 49.2083$。选取 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$，$c=8$ 有

$$f(t,u,v)=t+\mathrm{e}^{-|v|}+45u^3\leq 6.375<Ma\approx 10.9346,\quad (t,u,v)\in[0,1]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{6}\right]$$

$$f(t,u,v)=t+\mathrm{e}^{-|v|}+55u-10>100>Nb\approx 98.4166,\quad (t,u,v)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[2,8]\times\left[0,\frac{8}{3}\right]$$

$$f(t,u,v)=t+\mathrm{e}^{-|v|}+10\sqrt{2u}+80\leq 122<Mc\approx 174.9528,\quad (t,u,v)\in[0,1]\times[0,8]\times\left[0,\frac{8}{3}\right]$$

于是定理 2 的条件都满足，所以边值问题(9)至少有三个正解 u_1,u_2,u_3，且满足

$$\max_{0\leq t\leq 1}|u_1(t)|<\frac{1}{2},\quad 2<\min_{1/4\leq t\leq 3/4}|u_2(t)|,\quad \frac{1}{2}<\max_{0\leq t\leq 1}|u_3(t)|,\quad \min_{1/4\leq t\leq 3/4}|u_3(t)|<2.$$

参考文献

[1] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.

[2] Mena, J.C., Sauco, J.H. and Kishin, S. (2021) Existence and Uniqueness of Positive Solutions for a Class of Singular Fractional Differential Equation with Infinite-Point Boundary Value Conditions. *The Royal Academy of Sciences*, **115**, 1-12. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00994-1

[3] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 第三版. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.

[4] Zhang. X.Q. (2015) Positive Solutions for a Class of Singular Fractional Differential Equation with Infinite-Point Boundary Value Conditions. *Applied Mathematics Letters*, **39**, 22-27. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.08.008

[5] Zhai, C.B. and Wang, L. (2017) Some Existence, Uniqueness Results on Positive Solutions for a Fractional Differential Equation with Infinite-Point Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **22**, 566-577. https://doi.org/10.15388/NA.2017.4.10

[6] Wang, Y., Liu, L.S. and Wu, Y.H. (2015) Extremal Solutions for p-Laplacian Fractional Integro-Differential Equation with Integral Conditions on Infinite Intervals via Iterative Computation. *Advances in Difference Equations*, **24**, 1-14. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0358-1

[7] Wang, W.X., Duan, J.Y. and Guo, X.Z. (2022) Successive Iteration and Positive Solutions for Fractional Integral Boundary Value Problem with p-Laplacian Operator. *Mathematica Applicata*, **35**, 147-155.

[8] Tian, Y.S., Bai, Z.B. and Sun, S.J. (2019) Positive Solutions for a Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator. *Advances in Difference Equations*, **2019**, 1-14. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2280-4

[9] 田元生, 李小平, 葛渭高. p-Laplacian 分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 应用数学学报, 2018, 41(4): 529-539.

[10] He, Y. (2018) Extremal Solutions for p-Laplacian Fractional Differential Systems Involving the Riemann-Liouville Integral Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, **2018**, 1-11. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1443-4