Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(3), 980-992**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123100

带借贷利率的复合泊松模型的脉冲分红与注资问题

罗　彬

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2023年2月13日；录用日期：2023年3月8日；发布日期：2023年3月15日

摘　要

本文研究了带借贷利率的复合泊松模型的脉冲分红与注资问题。本文目标是最大化绝对破产界之上分红现值与注资现值之差的期望值。我们先得到值函数的性质，给出可行策略的定义，然后根据随机控制理论证明了动态规划原理，启发式得出QVI不等式并且证明值函数是该不等式的几乎处处解，最后在最优策略存在的前提下给出验证定理的证明。

关键词

借贷利率，脉冲分红与注资，复合泊松模型

Impulse Dividend and Capital Injection Problem in the Compound Poisson Model with Debit Interest

Bin Luo

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Feb. 13th, 2023; accepted: Mar. 8th, 2023; published: Mar. 15th, 2023

Abstract

In this paper, we study the problem of impulse dividend and capital injection in the compound Poisson model with debit interest. The objective is to maximize the expected present value of the dividends minus the discounted costs of capital injections until the absolute bankruptcy boundary. Firstly, we get the properties of the value function and give the definition of the admissible strate-

文章引用: 罗彬. 带借贷利率的复合泊松模型的脉冲分红与注资问题[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 980-992.
DOI: 10.12677/aam.2023.123100

gy. Then, we prove the dynamic programming principle according to the stochastic control theory, elicit the QVI inequality and prove that the value function is almost everywhere solution of the inequality. Finally, we give the proof of the verification theorem on the premise of the existence of the optimal strategy.

Keywords

Debit Interest, Impulse Dividend and Capital Injection, Compound Poisson Model

1. 引言

最优分红问题可以追溯到 De Finetti (1957) [1]，他首次用直到破产的最大累计分红量来度量保险公司的表现，证明了简单离散风险模型下最优分红策略是障碍(barrier)策略。1969 年，Gerber [2]用一个相关离散问题取极限的方法证明了在经典风险模型下最优的分红策略一般为波段(band)策略。关于最优分红问题的发展现状，可参见 Albrecher & Thonhauser (2009) [3]的综述及 Schmidli (2008) [4]与 Azcue & Muler (2014) [5]的两本专著。

为使风险模型贴近实际，学者们进一步考虑了交易费用对最优分红策略的影响。固定交易费用的存在往往会使得最优化问题变得复杂，由此产生了的随机脉冲控制问题。Bai & Guo (2010) [6]研究了经典模型的脉冲分红问题，并在索赔额为指数分布的情况下得到了解析解。Thonhauser & Albrecher (2011) [7]也在该模型下进一步讨论了简单脉冲分红策略的最优性。

在市场实践中，当公司遭遇到财务困难时，管理者可能会选择由股东注资或者向银行贷款来摆脱困境，不会轻易宣布破产。若选择由股东进行注资，则此时的目标变为如何实现破产前积累折现分红量与累积折现注资量之差的期望值最大化。Paulsen (2008) [8]研究了一般的扩散模型，存在固定交易费用下的最优脉冲分红与注资问题。张帅琪和刘国欣(2012) [9]研究了复合 Poisson 风险模型下带比例与固定交易费用的最优分红和注资问题。Yao *et al.* (2014) [10]考虑了存在由注资引起的固定成本的情况下，对偶风险模型下最优分红和注资问题。若选择向银行进行贷款，这时的模型变为经典 Cramer-Lundberg 风险模型的一种推广——带借贷利率的复合 Poisson 风险模型。Dassios & Embrechts (1989) [11]提出这一模型并且使用鞅方法研究当索赔额服从指数分布时的绝对破产概率。Embrechts & Schmidli (1994) [12]用 PDMP 理论方法研究了一般风险模型的绝对破产概率。近年来，诸多学者对这类问题进行了广泛的研究。Zhou & Zhang (2005) [13]用 PDMP 理论方法给出了古典风险模型下绝对破产概率的一个明确表达式。Cai, Gerber & Yang (2006) [14]研究了 O-U 模型的绝对破产问题。Cai (2007) [15]给出了经典风险模型中绝对破产的期望折现罚函数。

本文充分考虑市场摩擦，假设每次分红和注资都要消耗比例交易费用和固定交易费用。通过脉冲控制方法，我们研究最大化在绝对破产限之上分红现值和注资现值之差的期望值的性能指标函数。本文的其余结构如下：第 2 节详细地阐述了该问题并给出对应的模型介绍。第 3 节给出值函数的性质和可行策略的定义。第 4 节根据随机控制理论证明了动态规划原理，启发式的得出值函数所满足的 QVI 方程，证明了验证定理。

2. 模型介绍

不受控时，带借贷利率的复合 Poisson 风险模型$\{X_t\}_{t\ge0}$可以表示为

$$X_t = x+\int_0^t\left(c+\beta X_s I_{\{X_s<0\}}\right)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i, \tag{1}$$

其中 x 为初始资本，$c>0$ 是保费收入率，$\beta>0$ 是借贷利率，$\{N_t\}_{t\ge0}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程。索赔额序列$\{Y_i\}_{i\ge1}$为一列独立同分布严格正随机变量，它们具有共同的连续密度函数 $p(y)$，并且具有有限的期望值，即 $\mathbb{E}[Y_i]=\mu<\infty$。索赔额序列$\{Y_i\}$与索赔计数过程$\{N_t\}$是相互独立的。如果强调初值 x，记概率及期望分别为 $\mathbb{P}_x,\mathbb{E}_x$。否则，省略 x 记为 $\mathbb{P},\mathbb{E}$。

在该模型下，假设公司的贷款是连续动态的。若在 t 时刻 $X(t)<0$，则公司需贷款$|X(t)|$并用后续的保费收入偿还贷款及借贷利息来弥补赤字继续经营。假设在$(t,t+\Delta t]$内无索赔发生，则公司的盈余满足：

$$X(t+\Delta t)=X(t)+c\Delta t+X(t)\left(\mathrm{e}^{\beta\Delta t}-1\right),$$

其中 $X(t+\Delta t)$ 是剩余赤字，$X(t)$ 是原赤字，$c\Delta t$ 是新增保费收入，$X(t)\left(\mathrm{e}^{\beta\Delta t}-1\right)$ 是还贷支出。令 $\Delta t\to0$，得到

$$X'(t)=c+\beta X(t).$$

可以看到，当 $X(t)>-\dfrac{c}{\beta}$ 时，$X'(t)>0$，在没有索赔发生的情况下，$X(t)$严格单调增加，公司的经营还有可能恢复。而当 $X(t)\le-\dfrac{c}{\beta}$ 时，$X(t)$严格单调递减，保险公司不能恢复。这时我们称保险公司绝对破产，$-\dfrac{c}{\beta}$ 称为绝对破产界。

假设 z 为从盈余过程中取出的分红量，则股东们实际得到的分红量为 $-K_1+k_1z$。其中 $K_1\in(0,\infty),k_1\in(0,1]$ 均为常数，K_1 为每次分红时产生的与分红额独立的固定交易费用，$1-k_1$ 为分红时要支付的税率。假设 h 为公司想得到的注资额，则股东就必须要支付 K_2+k_2h，其中 $K_2\in(0,\infty),k_2\in[1,\infty)$ 均为常数，K_2 为每次注资时产生的固定交易费用，$k_2\ge1$ 为注资时的比例交易成本率。

给定带流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},\mathbb{P})$，其中 Ω 为具有左、右极限的集合，$\{\mathcal{F}_t\}$ 为过程 X 的自然 σ-代数流。记$\{D_t\}$为从 0 时刻到 t 时刻的累计分红量，$\{Z_t\}$为从 0 时刻到 t 时刻的累计注资量。控制策略 $\pi=(D,Z)$ 称为可容许策略如果 π 满足以下条件：

1) $\{D_t\}$ 是非降的，左连右极的，关于$\{\mathcal{F}_t\}$适应的纯跳过程且 $D_0=0$，

$$D_t=\sum_{0\le s<t}\Delta_+D_s,\quad t\ge0; \tag{2}$$

2) $\{Z_t\}$ 是非降的，左连右极的，关于$\{\mathcal{F}_t\}$适应的纯跳过程且 $Z_0=0$，

$$Z_t=\sum_{0\le s<t}\Delta_+Z_s,\quad t\ge0; \tag{3}$$

3) 对于 $0\le t<\tau^\pi$，$0\le\Delta_+D_t\le X_t^\pi+\dfrac{c}{\beta}$；

4) 对于 $0\le t<\tau^\pi$，$\Delta_+D_t\cdot\Delta_+Z_t=0$。

受控盈余过程 X_t^π 为

$$X_t^\pi=x+\int_0^t\left(c+\beta X_s^\pi\mathbf{1}_{\{X_s^\pi<0\}}\right)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-D_t+Z_t. \tag{4}$$

绝对破产时刻定义为

$$\tau^\pi := \inf\left\{t \ge 0 : X_{t+}^\pi \le -\frac{c}{\beta}\right\}.$$

记 Π 是所有可容许策略的集合，Π_x 是初始盈余为 x 的所有可容许的控制策略的集合。其中，条件(3)说明公司每次分红不能导致赤字发生，条件(4)说明分红和注资不可同时发生。

对每个可容许策略 π，性能指标函数 $V^\pi(x)$ 定义如下：

$$V^\pi(x) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<\tau^\pi} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+ D_s - K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+ D_s>0\}}\right) - \sum_{0\le s<\tau^\pi} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+ Z_s + K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+ Z_s>0\}}\right)\right], \tag{5}$$

表示为绝对破产前的累计折现分红量和累计折现注资量之差的数学期望，其中 $\delta > 0$ 为折现因子。

我们的目标是找到最优可行策略来最大化性能指标函数，下面定义值函数 V：

$$V(x) := \sup\left\{V^\pi(x); \pi \in \Pi\right\}. \tag{6}$$

最优策略 $\pi^* \in \Pi$ 是使得下面等式成立的策略：

$$V(x) = V^{\pi^*}(x).$$

3. 值函数和可行策略的性质

3.1. 值函数的性质

引理 3.1. 对于 $x > -\dfrac{c}{\beta}$，值函数 $V(x)$ 满足

$$0 \le V(x) \le k_1\left(x + \frac{c}{\delta} + \frac{c}{\beta}\right). \tag{7}$$

证明： 当 $x < 0$ 时，我们定义策略 π 如下：$D_t = Z_t = 0$，则得到 $V(x) \ge V^\pi(x) = 0$。现考虑策略 π：在初始时刻，将 $x + \dfrac{c}{\beta} - \varepsilon$ 立即分红，将之后的保费收入进行分红并且不进行资金注入，这样得到上界：

$$V^\pi(x) \le k_1\left(x + \frac{c}{\delta} + \frac{c}{\beta} - \varepsilon\right).$$

因为 ε 任意小并且取遍所有可允许策略，则得到

$$V(x) \le k_1\left(x + \frac{c}{\delta} + \frac{c}{\beta}\right).$$

引理 3.2. 对于 $x > -\dfrac{c}{\beta}$，值函数 $V(x)$ 是非减的并且是局部 Lipschitz 连续的。

证明： 显然，对两个不同的初始资本采取同样的策略，那么就有值函数 $V(x)$ 是增的。对任意给定的可允许策略 $\bar{\pi} = \left(\bar{D}_t, \bar{Z}_t\right) \in \Pi_{x+ch}$。当 $x > -\dfrac{c}{\beta}$ 时，令 $h > 0$，考虑如下定义策略 $\pi = \{D_t, Z_t\}$：

$$\pi_t = \begin{cases} \bar{\pi}_{t-h}, & (\tau_1 \wedge t) \ge h, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

由于 $P(\tau_1 \ge h) = \mathrm{e}^{-\lambda h}$，则

$$
\begin{aligned}
V(x)\ge V^{\pi}(x)&=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\sum_{0\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\mid\tau_1\right]\right]\\
&=P(\tau_1\ge h)\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\sum_{0\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\mid\tau_1\ge h\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\lambda h}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\sum_{h\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\sum_{h\le s<\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\mid\mathcal{F}_h\right]\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\lambda h}\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta h}\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<\tau^{\pi}-h}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\sum_{0\le s<\tau^{\pi}-h}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\mid\mathcal{F}_h\right]\right]\\
&=\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\mathbb{E}_{x+ch}\left[\sum_{0\le s<\tau^{\pi}-h}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+\bar{D}_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\sum_{0\le s<\tau^{\pi}-h}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+\bar{Z}_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}V^{\bar{\pi}}(x+ch),
\end{aligned}
$$

因此

$$V(x)\ge\sup_{\bar{\pi}\in\Pi_{x+ch}}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}V^{\bar{\pi}}(x+ch)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}V(x+ch).$$

根据$V(x)$的有界性，我们得到

$$0\le V(x+ch)-V(x)\le V(x+ch)\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)\le V(x+ch)(\lambda+\delta)h.$$

由此可证明$V(x)$在$\left(-\frac{c}{\beta},+\infty\right)$上的局部 Lipschitz 连续性。

3.2. 可行策略

令$\mathbb{U}_x$与$\mathbb{V}_x$分别为定义于$\mathbb{R}_+$上的非减左连右极的阶梯函数$\alpha_1(t)$与$\alpha_2(t)$的集合，满足

1) $\Delta_+\alpha_1(t):=\alpha_1(t+)-\alpha_1(t)\le x_t$，其中$x_t=x+\int_0^t\left(c+\beta x_s\mathbf{1}_{x_s<0}\right)\mathrm{d}s+\alpha_2(t)-\alpha_1(t)$；

2) $\Delta_+\alpha_1(t)\Delta_+\alpha_2(t)=0$，

对所有$t\in\mathbb{R}_+$成立；$\alpha_1(0)=\alpha_2(0)=0$。

定理 3.3. 一个分红注资策略$\{D_t,Z_t\}$是可行的，当且仅当存在两个$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$-可测的函数$\alpha_1(x,t)$和$\alpha_2(x,t)$对所有的$x>-\frac{c}{\beta}$，$\alpha_1(x,\cdot)\in\mathbb{U}_x,\alpha_2(x,\cdot)\in\mathbb{V}_x$以及$\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数$\alpha_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}(\omega,t)$和$\alpha_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}(\omega,t)$对任意$\omega\in\Omega$和$n=1,2,\cdots$，$\alpha_1^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{U}_{X^D_{\tau_n}}$，$\alpha_2^{(n)}(\omega,\cdot)\in\mathbb{V}_{X^Z_{\tau_n}}$，使得

$$D_t=\begin{cases}\alpha_1(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ D_{\tau_n}+\alpha_1^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{8}$$

$$Z_t=\begin{cases}\alpha_2(X_0,t), & 0\le t\le\tau_1;\\ Z_{\tau_n}+\alpha_2^{(n)}(t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1},n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{9}$$

证明：先看充分性，显然(8)、(9)式定义的策略是可行的。我们只需要证明必要性。注意到$\mathcal{F}_t$是一个跳流，即对于$t\in\mathbb{R}_+$，$n=0,1,\cdots$，

$$\mathcal{F}_t\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\}=\mathcal{F}_{\tau_n}\cap\{\tau_n\le t<\tau_{n+1}\},$$

其中，

$$\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\},\quad\mathcal{F}_{\tau_n}=\sigma\{X_0;\tau_1,Y_1;\cdots;\tau_n,Y_n\},\quad n=1,2,\cdots$$

对任意 $n=1,2,\cdots$，存在 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数 $\alpha_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}(\omega,t)$ 使得(8)式成立，存在 $\mathcal{F}_{\tau_n}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-可测函数 $\alpha_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}(\omega,t)$ 使得(9)式成立。由 $\mathcal{F}_0=\sigma\{X_0\}$。根据 Doob 可测性定理可知，存在两个 $\mathcal{B}\left(-\frac{c}{\beta},+\infty\right)\times\mathbb{R}_+$-可测的函数 $\alpha_1(x,t),\alpha_2(x,t)$，使得 $D_t=\alpha_1^*(X_0,t),Z_t=\alpha_2^*(X_0,t),t<\tau_1$。特别地，$\alpha_1(x,\cdot)\in\mathbb{U}_x$，$\alpha_2(x,\cdot)\in\mathbb{V}_x$。

4. 动态规划原理和验证定理

4.1. 动态规划原理

引理 4.1. (动态规划原理)对于任意的 $x>-\frac{c}{\beta}$ 和停时 T，可以写出如下方程：

$$V(x)=\sup_{\pi\in\Pi_x}\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{0\le s<T\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right] -\sum_{0\le s<T\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right]+\mathrm{e}^{-\delta(T\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{T\wedge\tau_1}\right)\Bigg]. \tag{10}$$

证明：我们仅需证明对任意固定的时间 $t\ge0$ (10)式成立。令

$$V(x,t)=\sup_{\pi\in\Pi_x}\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right] -\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right]+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{t\wedge\tau_1}\right)\Bigg]. \tag{11}$$

首先证明 $V(x)\le V(x,t)$，任取一个可行策略 $\pi=\{D_s,Z_s\}\in\Pi_x$，则

$$V_\pi(x)=\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\left(\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\right) +\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\left(\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\right)\Bigg],$$

其中，等式右边的第二项满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\left(\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)-\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\right)\right]\\
&=\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)\\
&\quad-\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\Bigg]\\
&=\mathbb{E}_x\Bigg[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}_x\left[\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)\mid X^\pi_{t\wedge\tau_1}\right]\\
&\quad-\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}_x\left[\sum_{t\wedge\tau_1\le s<\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\delta(s-t\wedge\tau_1)}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\mid X^\pi_{t\wedge\tau_1}\right]\Bigg]\\
&\le\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X^\pi_{t\wedge\tau_1}\right)\right].
\end{aligned}$$

故 $V_\pi(x)\le V(x,t)$。由于可行策略 π 的任意性，$V(x)\le V(x,t)$。

下面证明 $V(x)\ge V(x,t)$。给定 $\forall\varepsilon>0$ 取可行策略 $\pi=\{D_s,Z_s\}\in\Pi_x$ 使得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)\\&-\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{t\wedge\tau_1}\right)\Bigg]\ge V(x,t)-\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

由于 V 在 $\left(-\frac{c}{\beta},\infty\right)$ 上是递增且连续的，则可以找到递增数列 $-\frac{c}{\beta}=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 使得若 $y\in[x_i,x_{i+1})$，有：

$$V(y)-V(x_i)<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

对于 $i=1,2,\cdots,n,\cdots$ 成立。取可行策略 $\pi_i=\left\{D^i_s,Z^i_s\right\}\in\Pi_{x_i}$ 使得 $V(x_i)-V^{\pi_i}(x_i)<\frac{\varepsilon}{4}$。

定义一个新策略 $\bar{\pi}=\left\{\bar{D}_s,\bar{Z}_s\right\}$：

• 如果 $\tau_1\le t$ 且 $\tau_1=T^{\pi}$，令 $\bar{D}_s=D_s,\bar{Z}_s=Z_s,s\ge0$。

• 如果 $\tau_1\le t$ 且 $\tau_1<\tau^{\pi}$ 或 $\tau_1>t$，在 $s\in[0,t\wedge\tau_1]$ 令；当 $X^{\pi}_{t\wedge\tau_1}\in\left[x_i,x_{i+1}\right)$ 时，在 $s\in\left(t\wedge\tau_1,\tau^{\pi_i}\right]$ 上令 $\bar{\pi}=\pi_i$。

注意到对于 $-\frac{c}{\beta}<x\le y$，有 $\Pi_x\subseteq\Pi_y$。由上述定义方法可知策略 $\bar{\pi}$ 可行，若 $X^{\bar{\pi}}_{t\wedge\tau_1}\in\left[x_i,x_{i+1}\right)$ 有

$$V^{\bar{\pi}}\left(X^{\bar{\pi}}_{t\wedge\tau_1}\right)=V^{\pi_i}(x_i)\ge V(x_i)-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

根据(12)和(13)有

$$\begin{aligned}V(x,t)-V^{\bar{\pi}}(x)&\le\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)\\&\quad-\sum_{0\le s<t\wedge\tau_1}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{t\wedge\tau_1}\right)\Bigg]-V^{\bar{\pi}}(x)+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{t\wedge\tau_1}\right)\right]-\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V^{\bar{\pi}}\left(X^{\bar{\pi}}_{t\wedge\tau_1}\right)\right]+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

再根据 ε 的任意性，有 $V(x,t)\le V^{\bar{\pi}}(x)\le V(x)$。

综上可得 $V(x)=V(x,t)$。因此，动态规划原理成立。

4.2. 验证定理

定义一些关于函数 $f(x)$ 的算子：

1) 分红算子：

$$\mathcal{M}_1f(x):=\sup\left\{f(x-\xi)+k_1\xi-K_1;0<\xi<x+\frac{c}{\beta}\right\}, \tag{14}$$

2) 注资算子：

$$\mathcal{M}_2f(x):=\sup\left\{f(x+\eta)-k_2\eta-K_2;\eta>0\right\}, \tag{15}$$

3) 折现生成算子 $\mathcal{L}$：

$$\mathcal{L}f(x):=\left(c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)f'(x)-(\lambda+\delta)f(x)+\lambda\mathcal{G}f(x),\tag{16}$$

其中，$\mathcal{G}f(x)=\int_0^{\infty}f(x-y)\mathrm{d}F(y)$。

因此，我们可以写出 QVI 不等式：

$$\mathcal{L}f(x)\le 0,$$
$$\mathcal{M}_1f(x)-f(x)\le 0,$$
$$\mathcal{M}_2f(x)-f(x)\le 0,$$
$$\left(\mathcal{M}_1f(x)-f(x)\right)\left(\mathcal{M}_2f(x)-f(x)\right)\left(\mathcal{L}f(x)\right)=0,$$

也可写成

$$\max\left\{\mathcal{L}f(x),\mathcal{M}_1f(x)-f(x),\mathcal{M}_2f(x)-f(x)\right\}=0.\tag{17}$$

命题 4.2. 值函数 V 是 QVI 不等式(17)的几乎处处解。

证明：对于任意的 $x>-\frac{c}{\beta}$ 和 $\alpha_1\in\mathbb{U}_x,\alpha_2\in\mathbb{V}_x$，定义 $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$，

$\phi_x^{\bar{\alpha}}(t):=x+\int_0^t\left(c+\beta\phi_x^{\bar{\alpha}}(s)\mathbf{1}_{\{\phi_x^{\bar{\alpha}}(s)<0\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$ 和

$v^{\bar{\alpha}}(t)=\sum_{0\le s<t}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_1\Delta_+\alpha_1(s)-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+\alpha_1(s)>0\}}\right]-\sum_{0\le s<t}\mathrm{e}^{-\delta s}\left[k_2\Delta_+\alpha_2(s)+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+\alpha_2(s)>0\}}\right]$，显然，$\phi_x^{\bar{\alpha}}(t)$ 是左连右极的。根据定理3.3，对于策略 $\pi=(D,Z)\in\Pi_x$，有 $\alpha_1\in\mathbb{U}_x$，$\alpha_2\in\mathbb{V}_x$ 使得 $D_t=\alpha_1(x,t),Z_t=\alpha_2(x,t),0\le t<\tau_1$。

因此，可将(10)写成如下形式：

$$V(x)=\sup_{\alpha_1\in\mathbb{U}_x,\alpha_2\in\mathbb{V}_x}\mathbb{E}_x\left[v^{\bar{\alpha}}(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right].\tag{18}$$

因此，

$$V(x)\ge\mathbb{E}_x\left[v^{\bar{\alpha}}(t\wedge\tau_1)+\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right].$$

令 $t\to 0$，可得

$$V(x)\ge v^{\alpha_1}(0_+)+V\left(\phi_x^{\alpha_1}(0_+)\right)=k_1\Delta_+\alpha_1(0)-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+\alpha_1(0)>0\}}+V\left(x-\Delta_+\alpha_1(0)\right),$$

或者

$$V(x)\ge v^{\alpha_2}(0_+)+V\left(\phi_x^{\alpha_2}(0_+)\right)=-k_2\Delta_+\alpha_2(0)-K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+\alpha_2(0)>0\}}+V\left(x+\Delta_+\alpha_2(0)\right).$$

由 α_1,α_2 的任意性可以得到

$$\mathcal{M}_1V(x)-V(x)\le 0.\tag{19}$$

$$\mathcal{M}_2V(x)-V(x)\le 0.\tag{20}$$

令 $h>0$ 充分小，定义函数

$$\varphi(x,h)=x+\int_0^h\left(c+\beta\varphi(x,s)\mathbf{1}_{\{\varphi(x,s)<0\}}\right)\mathrm{d}s.$$

由(18)式，有

$$V(x)\ge\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X_{h\wedge\tau_1}^{\pi}\right)\right]\ge\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}V\left(\varphi(x,h)\right)+\int_0^h\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^{\infty}V\left(\varphi(x,s)-y\right)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s.$$

整理上式，两边同时除以 h，得

$$\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{h}-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h}+\frac{\int_0^h \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^\infty V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}\le 0. \tag{21}$$

由单调性和局部 Lipschitz 连续性知 $V'(x)$ 是几乎处处存在的。那么存在一个序列 $h_n\to 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V(\varphi(x,h_n))-V(x)}{\varphi(x,h_n)-x}=\limsup_{h\to 0}\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{\varphi(x,h)-x}=V'(x).$$

又由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x,h)-x}{h}=c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V(\varphi(x,h_n))-V(x)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{V(\varphi(x,h_n))-V(x)}{\varphi(x,h_n)-x}\cdot\frac{\varphi(x,h_n)-x}{h_n}=\left(c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x).$$

令(21)式子中的 $h\to 0$，得

$$0\ge\left(c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{G}V(x).a.e.$$

令 $\mathbb{B}=\{x:\mathcal{M}_1V(x)-V(x)=0 \text{ or } \mathcal{M}_2V(x)-V(x)=0\}$。根据 V，$\mathcal{M}_1V(x)$ 和 $\mathcal{M}_2V(x)$ 的连续性可知区域 $\mathbb{B}$ 是闭集。因此，定义 $\mathbb{C}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{B}$ 就是一个开集。根据前面的推导可以看出，区域 $\mathbb{B}$ 中发生了干涉。取 $x\in\mathbb{C}$，当某个 $h>0$ 足够小时，对于初始余额为 $x'\in(x-ch,x+ch)\subset\mathbb{C}$ 时，初始时刻立即分红或者立即注资不是最优的，因此可以得到

$$V(x)=\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(h\wedge\tau_1)}V\left(X^{\pi}_{h\wedge\tau_1}\right)\right],$$

$$\frac{V(\varphi(x,h))-V(x)}{h}-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}\right)V(\varphi(x,h))}{h}+\frac{\int_0^h \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\int_0^\infty V(\varphi(x,s)-y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s}{h}=0.$$

由于 V 是连续且线性有界的，当令 $h\to 0$ 时右极限存在，因此下式在 $\mathbb{C}$ 上几乎处处成立

$$0=\left(c+\beta x\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{G}V(x).$$

再由 $\mathbb{R}=\mathbb{B}\cup\mathbb{C}$，可以得到

$$\left(\mathcal{M}_1V(x)-V(x)\right)\left(\mathcal{M}_2V(x)-V(x)\right)\left(\mathcal{L}V(x)\right)=0.$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立。因此，$V(x)$ 是 QVI 不等式(17)的几乎处处解。

令 $f(x)$ 为非减的、绝对连续的 QVI 不等式(17)的几乎处处解。定义

$$a(x):=\arg\max_{-\frac{c}{\beta}<u\le x}\{f(u)-k_1u\}. \tag{22}$$

$$d(x):=\arg\max_{-\frac{c}{\beta}<z}\{f(z)-k_2z\}. \tag{23}$$

令

$$\beta^*(x)=\begin{cases}x-a(x), & \mathcal{M}_1f(x)-f(x)=0;\\ 0, & \mathcal{M}_1f(x)-f(x)<0.\end{cases} \tag{24}$$

$$\gamma^*(x)=\begin{cases} d(x)-x, & \mathcal{M}_2 f(x)-f(x)=0; \\ 0, & \mathcal{M}_2 f(x)-f(x)<0. \end{cases} \tag{25}$$

定义

$$D_t^*=\begin{cases} \alpha_1^*(X_0,t), & 0\le t\le \tau_1; \\ D_{\tau_n}+\alpha_1^*(X_{\tau_n},t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1}, n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{26}$$

$$Z_t^*=\begin{cases} \alpha_2^*(X_0,t), & 0\le t\le \tau_1; \\ Z_{\tau_n}+\alpha_2^*(X_{\tau_n},t-\tau_n), & \tau_n<t\le\tau_{n+1}, n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{27}$$

其中，

$$\alpha_1^*(x,t):=\sum_{0\le s<t}\beta^*\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right), \alpha_2^*(x,t):=\sum_{0\le s<t}\gamma^*\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right).$$

$$\bar{\alpha}^*=(\alpha_1^*,\alpha_2^*), \phi_x^{\bar{\alpha}^*}(t):=x+\int_0^t\left(c+\beta\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)<0\right\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha_1^*(t)+\alpha_2^*(t).$$

显然，$\alpha_1^*(x,t)\in\mathbb{U}_x, \alpha_2^*(x,t)\in\mathbb{V}_x$ 且 $(D^*,Z^*)\in\Pi_x$。

定理 4.3. (验证定理)假设非减的且绝对连续的函数 $f:\mathcal{R}\mapsto\mathcal{R}_+$ 是方程(17)的一个几乎处处解，满足

$$f(x)\le k_1\left(x+\frac{c}{\delta}+\frac{c}{\beta}\right).$$

那么(26)，(27)式定义的策略(D^*,Z^*)是最优策略，函数 $f=V_{\pi^*}=V$。

证明：考虑定理 3.3 中式(8)、(9)定义的策略$\{D,Z\}\in\Pi_x$，τ_n 和 τ_{n+1} 之间的受控盈余过程对应的系统为

$$\phi_x^{(n)}(t)=x+\int_0^t\left(c+\beta\phi_x^{(n)}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_x^{(n)}(s)<0\right\}}\right)\mathrm{d}s-\alpha_1^{(n)}(t)+\alpha_2^{(n)}(t).$$

我们有

$$\mathrm{e}^{-\delta t}f(X_t^\pi)=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X_{t\wedge\tau_{n+1}-}^\pi\right)-\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)\right]+\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left[f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right].$$

根据 Stieltjes 分部积分公式，得到

$$\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}f\left(X_{t\wedge\tau_{n+1}-}^\pi\right)-\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)=\int_{[\tau_n,t\wedge\tau_{n+1}]}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{(n)}(s-\tau_n)\right)-\int_{\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}}\delta\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\delta t}f(X_t^\pi)&=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\int_{[\tau_n,t\wedge\tau_{n+1}]}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^\pi}^{(n)}(s-\tau_n)\right)-\int_0^t\delta\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s\\&\quad+\sum_{n=1}^{N_t}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left[f\left(X_{\tau_n}^\pi\right)-f\left(X_{\tau_n-}^\pi\right)\right]\\&=f(x)+\sum_{n=0}^{N_t}\int_{[0,t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n]}\mathrm{e}^{-\delta(\tau_n+s)}\mathrm{d}\mathcal{A}^{(n)}f\left(X_{\tau_n}^\pi,s\right)-\int_0^t\delta\mathrm{e}^{-\delta s}f\left(X_s^\pi\right)\mathrm{d}s+M_t.\end{aligned}$$

其中算子 $\mathcal{A}^{(n)}$ 和过程 M 分别定义如下：

$$\mathcal{A}^{(n)} f(x,t) := f\left(\phi_x^{(n)}(t)\right) - f(x) + \lambda \int_0^t \left[(\mathcal{G}f - f)\left(\phi_x^{(n)}(s)\right)\right] \mathrm{d}s,$$

$$M_t = \sum_{n=1}^{N_t} \mathrm{e}^{-\delta\tau_n} \left[f\left(X_{\tau_n}^{\pi}\right) - f\left(X_{\tau_n-}^{\pi}\right)\right] - \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\delta s}\left[(\mathcal{G}f - f)\left(X_s^{\pi}\right)\right] \mathrm{d}s.$$

注意到，$X_t^{\pi} \le |x| + ct$，$f(x) \le k_1\left(x + \frac{c}{\delta} + \frac{c}{\beta}\right)$，则有

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{N_t} \mathrm{e}^{-\delta\tau_n}\left| f\left(X_{\tau_n}^{\pi}\right) - f\left(X_{\tau_n-}^{\pi}\right)\right|\right] \le 2f(|x|+ct)\cdot \mathbb{E}_x[N_t] < \infty.$$

可知 M_t 是一个零初值的鞅。在式子两边同时加上 $\sum_{0\le s<t} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+ D_s - K_1 \mathbf{1}_{\{\Delta_+ D_s>0\}}\right) - \sum_{0\le s<t} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+ Z_s + K_2 \mathbf{1}_{\{\Delta_+ Z_s>0\}}\right)$ 后，再取期望得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau^{\pi})} f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi}}^{\pi}\right)\right] + \mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi}} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+ D_s - K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+ D_s>0\}}\right)\right] \\
&- \mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi}} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+ Z_s + K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+ Z_s>0\}}\right)\right] \\
&= f(x) + \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{N_{t\wedge\tau^{\pi}}} \int_{[0,t\wedge\tau^{\pi}\wedge\tau_{n+1}-\tau_n]} \mathrm{e}^{-\delta(\tau_n+s)}\left(\mathrm{d}\mathcal{A}^{(n)} f\left(X_{\tau_n}^{\pi}, s\right) + \mathrm{d}v^{(n)}(s)\right)\right] \\
&- \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau^{\pi}} \delta \mathrm{e}^{-\delta s} f\left(X_s^{\pi}\right)\mathrm{d}s\right],
\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$v^{(n)}(t) = \sum_{0\le s<t} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+\alpha_1^{(n)} - K_1\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_1^{(n)}>0\right\}}\right) - \sum_{0\le s<t} \mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+\alpha_2^{(n)} + K_2\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_2^{(n)}>0\right\}}\right).$$

对于 $x \in \mathbb{R}_+$，令

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f(t) = \mathcal{A}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\left(X_{\tau_n}^{\pi}, t\right) + v^{\bar{\alpha}^{(n)}}(t) - \delta\int_0^t f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $\bar{\alpha}^{(n)} = \left(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}\right)$。考虑其勒贝格分解

$$\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f(t) = \left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^c(t) + \left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^{pd}(t),$$

其中，$\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^c(t)$ 和 $\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^{pd}(t)$ 分别表示其连续部分和纯离散部分。f 是局部 Lipschitz 连续的函数，所以 f 绝对连续和几乎处处可微。因此存在一个密度函数 g 使得 $f(y) - f(x) = \int_x^y g(u)\mathrm{d}u$ 和 $g(x) = f'(x)$ 几乎处处成立。因此可以得到，

$$\left(c + \beta x \mathbf{1}_{\{x<0\}}\right) g(x) - (\lambda+\delta) f(x) + \lambda \mathcal{G}f(x) = \mathcal{L}f(x), a.e.$$

和

$$f(x-\xi) - f(x) + k_1\xi - K_1\mathbf{1}_{\{\xi>0\}} \le \left(\mathcal{M}_1 f(x) - f(x)\right) \vee 0, \quad 0 \le \xi < x + \frac{c}{\beta},$$

$$f(x+\eta) - f(x) - k_2\eta - K_2\mathbf{1}_{\{\eta>0\}} \le \left(\mathcal{M}_2 f(x) - f(x)\right) \vee 0, \quad 0 < \eta.$$

由于 f 几乎处处满足 QVI 不等式(17)，有

$$\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^{c}(t)=\int_0^t\left\{\left(c+\beta\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)<0\right\}}\right)g\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)\right)-(\lambda+\delta)f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)\right)+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s\le 0$$

和

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\bar{\alpha}^{(n)}} f\right)^{pd}(t)=&\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha_1^{(n)}}(s+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha_1^{(n)}}(s)\right)+k_1\Delta_+\alpha_1^{(n)}(s)-K_1\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_1^{(n)}(s)>0\right\}}\right\}\\&+\sum_{0\le u<t}\left\{f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha_2^{(n)}}(u+)\right)-f\left(\phi_{X_{\tau_n}^{\pi}}^{\alpha_2^{(n)}}(u)\right)-k_2\Delta_+\alpha_2^{(n)}(u)-K_2\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_2^{(n)}(u)>0\right\}}\right\}\\&\le 0.\end{aligned}$$

将上面两个不等式代入(28)有

$$\begin{aligned}f(x)\ge&\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi}}^{\pi}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s>0\}}\right)\right]\\&-\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s>0\}}\right)\right].\end{aligned}$$

由于 f 非负，令 $t\to\infty$，有 $f(x)\ge V_\pi(x)$，从而得到 $f(x)\ge V(x)$。

另一方面，令 $\mathbb{B}=\left\{x:\mathcal{M}_1f(x)-f(x)=0\text{ or }\mathcal{M}_2f(x)-f(x)=0\right\}$，$\mathbb{C}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{B}$。$f$ 几乎处处满足 QVI 不等式(17)，因此在 $\mathbb{C}$ 上 $\mathcal{L}f(x)=0$ 几乎处处成立，在 $\mathbb{B}$ 上 $\mathcal{M}_1f(x)-f(x)=0$ 或 $\mathcal{M}_2f(x)-f(x)=0$。$\mathbb{B}=\left\{x:\beta^*(x)>0\text{ or }\gamma^*(x)>0\right\}$ 是干涉区间，因此 $X_t^{\pi^*}\in\mathbb{C}$ 几乎处处成立，其中 $\left(D^*,Z^*\right)$ 是由(26)，(27)定义的。这说明

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_x^{\bar{\alpha}^*}f\right)^{c}(t)&=\int_0^t\left\{\left(c+\beta\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\mathbf{1}_{\left\{\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)<0\right\}}\right)g\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right)-(\lambda+\delta)f\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right)+\lambda\mathcal{G}f\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right)\right\}\mathrm{d}s\\&=\int_0^t\mathcal{L}f\left(\phi_x^{\bar{\alpha}^*}(s)\right)\mathrm{d}s=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{H}_x^{\bar{\alpha}^*}f\right)^{pd}(t)=&\sum_{0\le s<t}\left\{f\left(\phi_x^{\alpha_1^*}(s+)\right)-f\left(\phi_x^{\alpha_1^*}(s)\right)+k_1\Delta_+\alpha_1^*(s)-K_1\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_1^*(s)>0\right\}}\right\}\\&+\sum_{0\le u<t}\left\{f\left(\phi_x^{\alpha_2^*}(u+)\right)-f\left(\phi_x^{\alpha_2^*}(u)\right)-k_2\Delta_+\alpha_2^*(u)-K_2\mathbf{1}_{\left\{\Delta_+\alpha_2^*(u)>0\right\}}\right\}\\&=0.\end{aligned}$$

将上面两个等式代入(28)，将 π 和 $\bar{\alpha}^{(n)}$ 换成 π^* 和 $\bar{\alpha}^*$，可得

$$\begin{aligned}f(x)=&\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)}f\left(X_{t\wedge\tau^{\pi^*}}^{\pi^*}\right)\right]+\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_1\Delta_+D_s^*-K_1\mathbf{1}_{\{\Delta_+D_s^*>0\}}\right)\right]\\&-\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\le s<t\wedge\tau^{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\delta s}\left(k_2\Delta_+Z_s^*+K_2\mathbf{1}_{\{\Delta_+Z_s^*>0\}}\right)\right].\end{aligned}$$

同时，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)} f\left(X^{\pi^*}_{t\wedge\tau^{\pi^*}}\right)\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau^{\pi^*}} f\left(X^{\pi^*}_{\tau^{\pi^*}}\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{\pi^*}\le t\right\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta t} f\left(X^{\pi^*}_t\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{\pi^*}>t\right\}}\right] \\
&\le \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta t} f\left(X^{\pi^*}_t\right)\mathbf{1}_{\left\{\tau^{\pi^*}>t\right\}}\right] \le \mathrm{e}^{-\delta t} f\left(|x|+ct\right),
\end{aligned}
$$

可以得到，当$t\to\infty$时，$E_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\left(t\wedge\tau^{\pi^*}\right)} f\left(X^{\pi^*}_{t\wedge\tau^{\pi^*}}\right)\right]\to 0$。再由$\pi^*\in\Pi_x$，有$f(x)=V_{\pi^*}(x)\le V(x)$。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su un' impostazionealternativa dell teoriacollettiva del rischio. *Transactions of the* 15*th International Congress of Actuaries*, New York, Vol. 2, 433-443.

[2] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterienfür den zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Schweiz Verein Versicherungsmath Mitt*, **2**, 185-228.

[3] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2009) Optimality Results for Dividend Problems in Insurance. *RACSAM—Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales*. *Serie A*. *Matematicas*, **103**, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF03191909

[4] Schmidli, H. (2008) Stochastic Control in Insurance. Springer, New York. https://doi.org/10.1002/9780470061596.risk0374

[5] Azcue, P. and Muler, N. (2014) Stochastic Optimization in Insurance: A Dynamic Programming Approach. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0995-7

[6] Bai, L. and Guo, J. (2010) Optimal Dividend Payments in the Classical Risk Model When Payments Are Subject to both Transaction Costs and Taxes. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 36-55. https://doi.org/10.1080/03461230802591098

[7] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2011) Optimal Dividend Strategies for a Compound Poisson Process under Transaction Costs and Power Utility. *Stochastic Models*, **27**, 120-140. https://doi.org/10.1080/15326349.2011.542734

[8] Paulsen, J. (2008) Optimal Dividend Payments and Reinvestments of Diffusion Processes with both Fixed and Proportional Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **47**, 2201-2226. https://doi.org/10.1137/070691632

[9] 张帅琪, 刘国欣. 复合 Poisson 模型带比例与固定交易费用的最优分红与注资[J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(8): 827-843.

[10] Yao, D., Wang, R. and Xu, L. (2014) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with Fixed Costs and Restricted Dividend Rate for a Dual Model. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **10**, 1235-1259. https://doi.org/10.3934/jimo.2014.10.1235

[11] Dassios, A. and Embrechts, P. (1989) Martingales and Insurance Risk. *Communications in Statistics Stochastic Models*, **5**, 181-217. https://doi.org/10.1080/15326348908807105

[12] Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994) Ruin Estimate for a General Insurance Risk Model. *Advances in Applied Probability*, **26**, 404-422. https://doi.org/10.1017/S0001867800026264

[13] Zhou, M. and Zhang, C.S. (2005) Absolute Ruin under Classical Risk Model. *Acta Mathematicae Appcatae Sinace*, **28**, 57-80.

[14] Cai, J., Gerber, H.U. and Hailiang, Y. (2006) Optimal Dividends in an Ornstein-Uhlenbeck Type Model with Credit and Debit Interest. *North American Actuarial Journal*, **10**, 94-119. https://doi.org/10.1080/10920277.2006.10596250

[15] Cai, J. (2007) On the Time Value of Absolute Ruin with Debit Interest. *Advances in Applied Probability*, **39**, 343-359. https://doi.org/10.1239/aap/1183667614